专题 13 函数模型及其应用

【考点预测】

1.几种常见的函数模型：

函数模型	函数解析式
一次函数模型	$f(x)=ax+b(a$，b 为常数且 $a\neq 0)$
反比例函数模型	$f(x)=\dfrac{k}{x}+b(k$，b 为常数且 $a\neq 0)$
二次函数模型	$f(x)=ax^2+bx+c(a$，b，c 为常数且 $a\neq 0)$
指数函数模型	$f(x)=ba^x+c(a$，b，c 为常数，$b\neq 0$，$a>0$，$a\neq 1)$
对数函数模型	$f(x)=b\log_a x+c(a$，b，c 为常数，$b\neq 0$，$a>0$，$a\neq 1)$
幂函数模型	$f(x)=ax^n+b(a$，b 为常数，$a\neq 0)$

2.解函数应用问题的步骤：

(1)审题：弄清题意，识别条件与结论，弄清数量关系，初步选择数学模型；

(2)建模：将自然语言转化为数学语言，将文字语言转化为符号语言，利用已有知识建立相应的数学模型;

(3)解模：求解数学模型，得出结论；

(4)还原：将数学问题还原为实际问题.

【题型归纳目录】

题型一：二次函数模型，分段函数模型

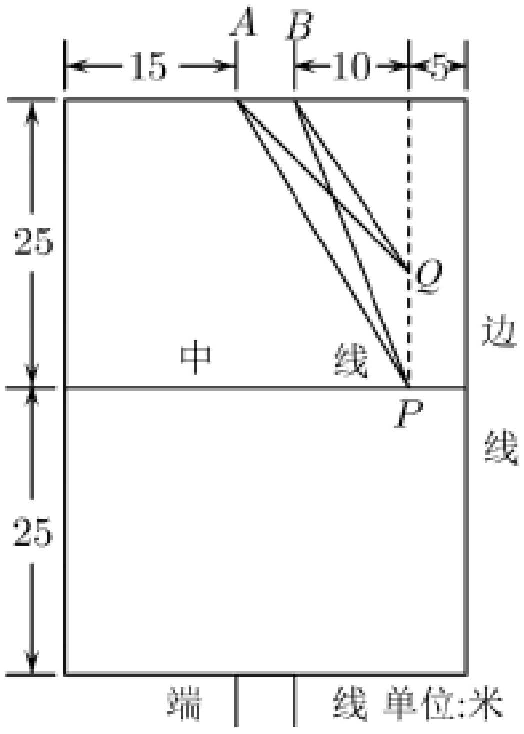
题型二：对勾函数模型

题型三：指数函数、对数函数模型

【典例例题】

题型一：二次函数模型，分段函数模型

例 1．（2022·黑龙江·哈尔滨三中三模（理））如图为某小区七人足球场的平面示意图，AB 为球门，在某次小区居民友谊比赛中，队员甲在中线上距离边线5米的 P 点处接球，此时 $\tan\angle APB=\frac{5}{31}$，假设甲沿着平行边线的方向向前带球，并准备在点 Q 处射门，为获得最佳的射门角度（即 $\angle AQB$ 最大），则射门时甲离上方端线的距离为（　　）



A．$5\sqrt{5}$　　B．$5\sqrt{6}$　　C．$10\sqrt{2}$　　D．$10\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】

先根据题意解出 AB 长度，设 $QH=h$，得到 $\cos\angle AQB=\frac{h^2+150}{\sqrt{h^4+325h^2+22500}}$，再分析求值域，判断取等条件即可求解.

【详解】

设 $AB=x$，并根据题意作如下示意图，由图和题意得：$PH=25$，$BH=10$，

所以 $\tan\angle BPH=\frac{BH}{HP}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$，且 $\tan\angle APB=\frac{5}{31}$，

所以 $\tan\angle APH=\tan\left(\angle APB+\angle BPH\right)=\frac{\frac{5}{31}+\frac{2}{5}}{1-\frac{5}{31}\times\frac{2}{5}}=\frac{3}{5}$，

又 $\tan\angle APH=\frac{AH}{PH}=\frac{AB+BH}{PH}=\frac{x+10}{25}$，所以 $\frac{x+10}{25}=\frac{3}{5}$，解得 $x=5$，即 $AB=5$，

设 $QH=h$，$h\in[0,25]$，则 $AQ=\sqrt{QH^2+AH^2}=\sqrt{h^2+15^2}$，

$BQ=\sqrt{QH^2+BH^2}=\sqrt{h^2+10^2}$，所以在 $\triangle AQB$ 中，

有 $\cos\angle AQB=\dfrac{AQ^2+BQ^2-AB^2}{2AQ\times BQ}=\dfrac{h^2+150}{\sqrt{h^4+325h^2+22500}}$，

令 $m=h^2+150\left(150\le m\le 775\right)$，所以 $h^2=m-150$，

所以 $\cos\angle AQB=\dfrac{m}{\sqrt{\left(m-150\right)^2+325\left(m-150\right)+22500}}=\dfrac{1}{\sqrt{-\dfrac{3750}{m^2}+\dfrac{25}{m}+1}}$，

因为 $150\le m\le 775$，所以 $\dfrac{1}{775}\le\dfrac{1}{m}\le\dfrac{1}{150}$，则要使 $\angle AQB$ 最大，

即 $\cos\angle AQB=\dfrac{1}{\sqrt{-\dfrac{3750}{m^2}+\dfrac{25}{m}+1}}$ 要取得最小值，即 $\sqrt{-\dfrac{3750}{m^2}+\dfrac{25}{m}+1}$ 取得最大值，

即 $-\dfrac{3750}{m^2}+\dfrac{25}{m}+1$ 在 $\dfrac{1}{775}\le\dfrac{1}{m}\le\dfrac{1}{150}$ 取得最大值，

令 $t=\dfrac{1}{m}\in\left[\dfrac{1}{775},\dfrac{1}{150}\right]$，　$f\left(t\right)=-3750t^2+25t+1$，

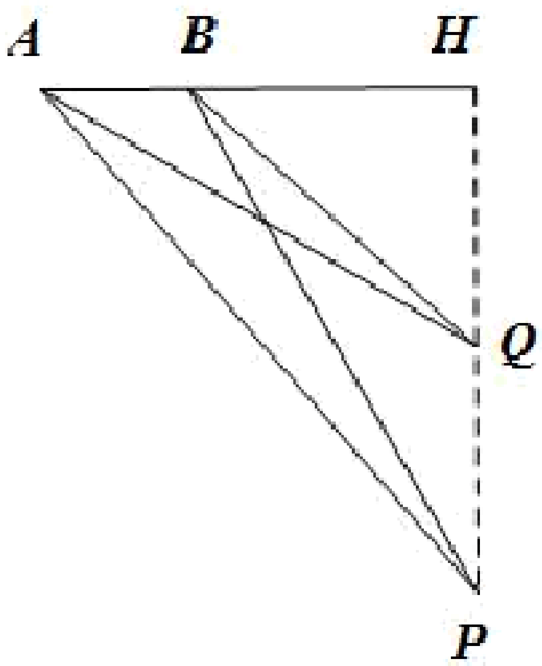
所以 $f\left(t\right)$ 的对称轴为：$t=\dfrac{1}{300}$，所以 $f\left(t\right)$ 在 $\left[\dfrac{1}{775},\dfrac{1}{300}\right]$ 单调递增，在 $\left[\dfrac{1}{300},\dfrac{1}{150}\right]$ 单调递减，

所以当 $t=\dfrac{1}{300}$ 时，$f\left(t\right)$ 取得最大值，即 $\angle AQB$ 最大，此时 $\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{300}$，即 $m=300$，

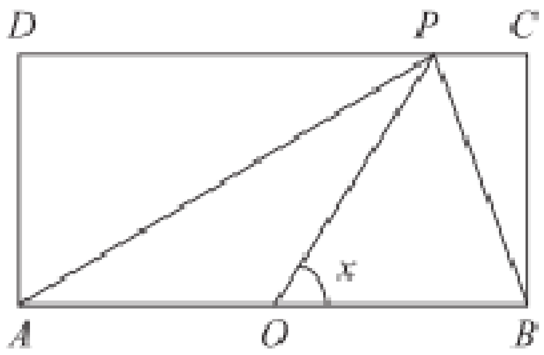
所以 $h^2=150$，所以 $h=5\sqrt{6}$，即为获得最佳的射门角度（即 $\angle AQB$ 最大），

则射门时甲离上方端线的距离为：$5\sqrt{6}$.

故选：B.



例 2.（2022·甘肃酒泉·模拟预测（文））如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC、CD 与 DA 运动，记 $\angle BOP=x$，将 $\triangle PAB$ 的面积表示为关于 x 的函数 $f\left(x\right)$，则 $f\left(x\right)=$（　　）



A. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$f\left(x\right)=2\tan x$

B. 当 $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right]$ 时，$f\left(x\right)=-\tan x$

C. 当 $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ 时，$f\left(x\right)=-\tan x$

D. 当 $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ 时，$f\left(x\right)=\tan x$

【答案】C

【解析】

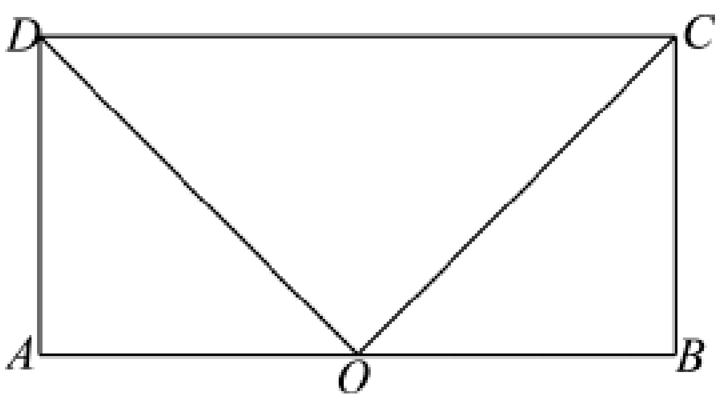
【分析】

分 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$、$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$、$x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ 三种情况讨论，求出 $\triangle PAB$ 的边 AB 上的高，结合三角形的面积公式可得出 $f\left(x\right)$ 的表达式.

【详解】

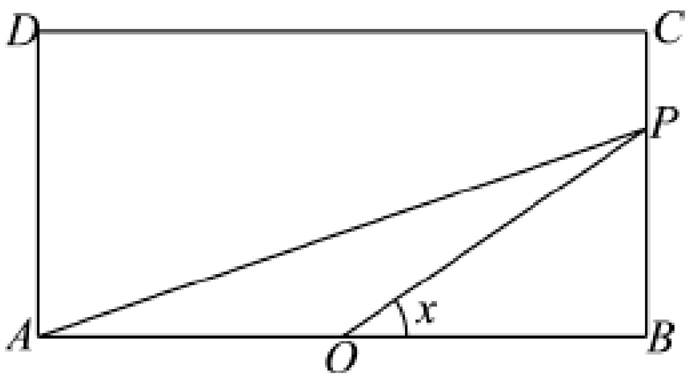
$\because OB=OC=1$，则 $\angle BOC=\frac{\pi}{4}$，易得 $OC=OD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\therefore OC^2+OD^2=CD^2$，

所以，$\angle COD=\frac{\pi}{2}$，则 $\angle BOD=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$.

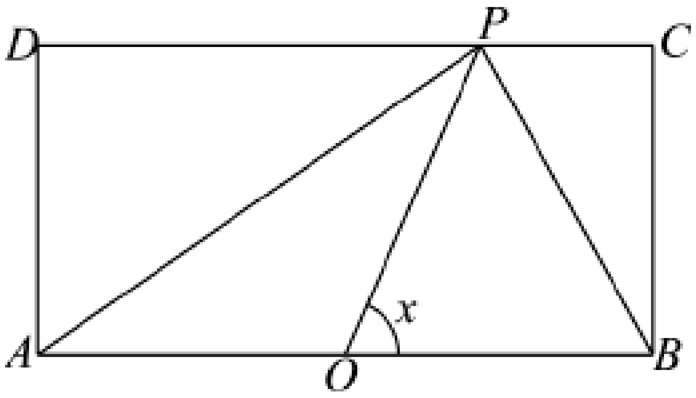


当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，点 P 在线段 BC 上（不包括点 B），则 $PB=OB\tan x=\tan x$，

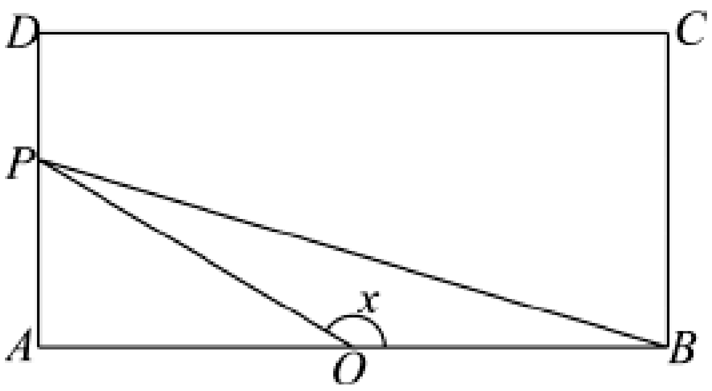
此时，$f\left(x\right)=\frac{1}{2}AB\tan x=\tan x$；



当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 时，点 P 在线段 CD 上（不包括点 C），此时 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}AB\cdot BC=1$；



当 $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ 时，点 P 在线段 DA 上（不包括点 A），



此时 $\angle POA=\pi-x$，则 $PA=OA\tan\left(\pi-x\right)=-\tan x$，则 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}AB\cdot PA=-\tan x$.

故选：C.

例 **3**.（2022·上海交大附中高三开学考试）2020 年 11 月 5 日至 10 日，第三届中国国际进口博览会在上海举行，经过三年发展，进博会让展品变商品，让展商变投资商，交流创意和理念，联通中国和世界，国际采购、投资促进、人文交流，开放合作四大平台作用不断凸显，成为全球共享的国际公共产品.在消费品展区，某企业带来了一款新型节能环保产品参展，并决定大量投放市场.已知该产品年固定研发成本为 150 万元，每生产 1 万台需另投入 380 万元.设该企业一年内生产该产品 x 万台且全部售完，每万台的销售收入为 $R(x)$ 万元，且 $R(x)=\begin{cases}500-2x,0<x\le 20\\370+\frac{2140}{x}-\frac{6250}{x^2},x>20\end{cases}$.

(1)写出年利润 S（万元）关于年产量 x（万台）的函数解析式；（利润 = 销售收入—成本）

(2)当年产量为多少万台时，该企业获得的年利润最大？并求出最大年利润.

【答案】(1) $S=\begin{cases}-2x^2+120x-150,0<x\le 20\\-10x-\frac{6250}{x}+1990,x>20\end{cases}$

(2)当年产量为 25 万台时，该企业获得的年利润最大，最大为 1490 万元

【解析】

【分析】

（1）分$0<x\le 20$和$x>20$两种情况，由利润 = 销售收入—成本，知$S=xR(x)-(380x+150)$，再代入$R(x)$的解析式，进行化简整理即可，

（2）当$0<x\le 20$时，利用配方法求出s的最大值，当$x>20$时，利用基本不等式求出s的最大值，比较两个最大值后，取较大的即可

(1)

当$0<x\le 20$时，$S=xR(x)-(380x+150)$

$=500x-2x^2-380x-150$

$=-2x^2+120x-150$，

当$x>20$时，$S=xR(x)-(380x+150)$

$=370x+2140-\dfrac{6250}{x}-380x-150$

$=-10x-\dfrac{6250}{x}+1990$，

所以年利润s（万元）关于年产量x（万台）的函数解析式为

$$S=\begin{cases}-2x^2+120x-150,0<x\le 20\\ -10x-\dfrac{6250}{x}+1990,x>20\end{cases}$$

(2)

当$0<x\le 20$时，$S=-2x^2+120x-150=-2(x-30)^2+1650$，

所以函数s在$(0,20]$上单调递增，所以当$x=20$时，s取得最大值 1450，

当$x>20$时，$S=-10x-\dfrac{6250}{x}+1990=-(10x+\dfrac{6250}{x})+1990$

$\le -2\sqrt{10x\cdot\dfrac{6250}{x}}+1990=-500+1990=1490$，

当且仅当$10x=\dfrac{6250}{x}$，即$x=25$时取等号，此时s取得最大值 1490，

因为$1490>1450$，

所以当年产量为 25 万台时，该企业获得的年利润最大，最大为 1490 万元

例 **4**.（2022·全国·高三专题练习）某厂借嫦娥奔月的东风，推出品牌为“玉兔”的新产品，生产“玉兔”的固定成本为 20000 元，每生产一件“玉兔”需要增加投入 100 元，根据初步测算，总收益满足函数

$R(x)=\begin{cases}400x-\dfrac{1}{2}x^2,(0\le x\le 400)\\ 80000,(x>400)\end{cases}$，其中 x 是“玉兔”的月产量.

(1)将利润 $f(x)$表示为月产量 x 的函数；

(2)当月产量为何值时，该厂所获利润最大？最大利润是多少？(总收益＝总成本＋利润)

【答案】(1) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+300x-20000,(0\leqslant x\leqslant 400)\\-100x+60000,(x>400)\end{cases}$；

(2)300，25000 元.

【解析】

【分析】

(1)由题意，由总收益 = 总成本 + 利润可知，分 $0\leqslant x\leqslant 400$ 及 $x>400$ 求利润，利用分段函数表示；

(2)在 $0\leqslant x\leqslant 400$ 及 $x>400$ 分别求函数的最大值或取值范围，从而确定函数的最大值．从而得到最大利润.

(1)

由题意，当 $0\leqslant x\leqslant 400$ 时，$f(x)=400x-0.5x^2-20000-100x=300x-0.5x^2-20000$；

当 $x>400$ 时，$f(x)=80000-100x-20000=60000-100x$；

故 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+300x-20000,(0\leqslant x\leqslant 400)\\-100x+60000,(x>400)\end{cases}$；

(2)

当 $0\leqslant x\leqslant 400$ 时，$f(x)=300x-0.5x^2-20000$；

当 $x=300$ 时，$f(x)_{max}=f(300)=25000$ (元)

当 $x>400$ 时，$f(x)_{max}<f(400)=20000$ (元)

$\because 25000>20000$，

$\therefore$ 当 $x=300$ 时，该厂所获利润最大，最大利润为 25000 元.

例 5.（2022·河北·模拟预测）劳动实践是大学生学习知识、锻炼才干的有效途径，更是大学生服务社会、回报社会的一种良好形式某大学生去一服装厂参加劳动实践，了解到当该服装厂生产的一种衣服日产量为 x 件时，售价为 s 元/件，且满足 $s=820-2x$，每天的成本合计为 $600+20x$ 元，请你帮他计算日产量为__________件时，获得的日利润最大，最大利润为__________万元.

【答案】 200 7.94

【解析】

【分析】

将利润表示为关于 x 的一个二次函数，求出该函数的最值即可.

【详解】

由题意易得日利润 $y=s\times x-(600+20x)=x(820-2x)-(600+20x)=-2(x-200)^2+79400$，

故当日产量为 200 件时，获得的日利润最大，最大利润为 7.94 万元，

故答案为：200，7.94.

【方法技巧与总结】

1.分段函数主要是每一段自变量变化所遵循的规律不同，可以先将其当做几个问题，将各段的变化规律分别

找出来，再将其合到一起，要注意各段自变量的范围，特别是端点值.

2.构造分段函数时，要准确、简洁，不重不漏.

题型二：对勾函数模型

例 **6**．（2022·全国·高三专题练习）某企业投入100万元购入一套设备，该设备每年的运转费用是0.5万元，此外每年都要花费一定的维护费，第一年的维护费为2万元，由于设备老化，以后每年的维护费都比上一年增加2万元．为使该设备年平均费用最低，该企业需要更新设备的年数为（　　）

A．8　　　　B．10　　　　C．12　　　　D．13

【答案】B

【解析】

【分析】

设该企业需要更新设备的年数为$x\left(x\in N^*\right)$，设备年平均费用为y万元，求得y关于x的表达式，利用基本不等式求出y的最小值及其对应的x值，即可得出结论.

【详解】

设该企业需要更新设备的年数为$x\left(x\in N^*\right)$，设备年平均费用为y万元，

则x年后的设备维护费用为$2+4+6+\cdots+2x=\dfrac{x\left(2+2x\right)}{2}=x\left(x+1\right)$，

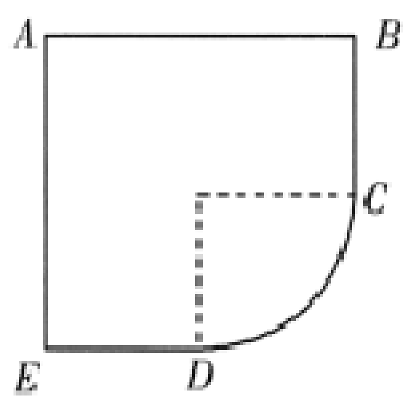
所以x年的平均费用为$y=\dfrac{100+0.5x+x\left(x+1\right)}{x}=x+\dfrac{100}{x}+\dfrac{3}{2}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{100}{x}}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{43}{2}$（万元），

当且仅当$x=10$时，等号成立，

因此，为使该设备年平均费用最低，该企业需要更新设备的年数为10.

故选：B.

例 **7**．（2022·全国·高三专题练习）迷你KTV是一类新型的娱乐设施，外形通常是由玻璃墙分隔成的类似电话亭的小房间，近几年投放在各大城市商场中，受到年轻人的欢迎．如图是某间迷你KTV的横截面示意图，其中$AB=AE=\dfrac{3}{2}$，$\angle A=\angle B=\angle E=90°$，曲线段$CD$是圆心角为$90°$的圆弧，设该迷你$KTV$横截面的面积为$S$，周长为$L$，则$\dfrac{S}{L}$的最大值为___________．（本题中取$\pi=3$进行计算）



【答案】$6-3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

设圆弧的半径为 x，根据平面几何知识写出 $\frac{S}{L}$ 关于 x 的函数关系式，运用基本不等式求解函数的最大值即可.

【详解】

设圆弧的半径为 $x(0<x\le\frac{3}{2})$，根据题意可得：$BC=DE=AB-x=\frac{3}{2}-x$

$$S=AEDE+(AB-DE)(AE-x)+\frac{1}{4}\pi\cdot x^2=\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}-x\right)+\left(\frac{3}{2}-x\right)\cdot x=\frac{9}{4}-x^2+\frac{\pi x^2}{4}$$

$$L=2AB+BC+DE+\frac{2\pi x}{4}=6-2x+\frac{\pi x}{2}$$

$\because \pi=3\therefore S=\frac{9-x^2}{4}$，$L=6-\frac{1}{2}x$

$\therefore \frac{S}{L}=\frac{9-x^2}{12-2x}$

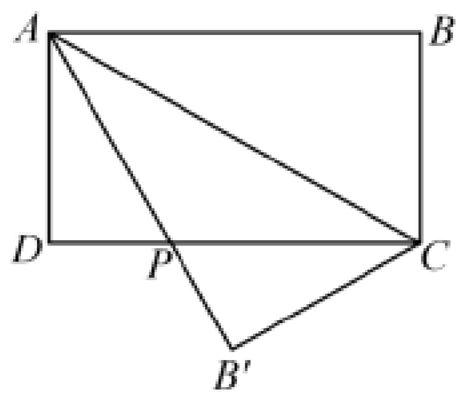
令 $t=12-2x\ (9\le t<12)$，则，$x=\frac{12-t}{2}\therefore\frac{S}{L}=\frac{9-\left(\frac{12-t}{2}\right)^2}{t}=-\left(\frac{t}{4}+\frac{27}{t}\right)+6$

根据基本不等式，$\frac{t}{4}+\frac{27}{t}\ge 2\sqrt{\frac{27}{4}}=3\sqrt{3}$，当却仅当 $\frac{t}{4}=\frac{27}{t}$，即 $t=6\sqrt{3}$ 时取“=”.

$6\sqrt{3}\in[9,12)$，$\therefore t=6\sqrt{3}$ 时，$\frac{S}{L}_{max}=6-3\sqrt{3}$

故答案为：$6-3\sqrt{3}$.

例 8.（2022·全国·高三专题练习）如图所示，设矩形 $ABCD(AB>AD)$ 的周长为 $20\,\text{cm}$，把 $\triangle ABC$ 沿 AC 折叠，AB 折过去后交 DC 于点 P，设 $AB=x\,\text{cm}$，$AD=y\,\text{cm}$.



(1)建立变量 y 与 x 之间的函数关系式 $y=f(x)$，并写出函数 $y=f(x)$ 的定义域;

(2)求 $\triangle ADP$ 的最大面积以及此时的 x 的值.

【答案】(1) $y=f(x)=10-x$，定义域为 $(5,10)$

(2) $x=5\sqrt{2}$， $\triangle ADP$ 的最大面积为 $\left(75-50\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$

【解析】

【分析】

（1）由题意可得 $y=10-x$，再由 $AB>AD$ 可求出 x 的取值范围，

（2）设 $AP=CP=z$，在直角三角形 ADP 中利用勾股定理可得 $z=x+\dfrac{50}{x}-10$，从而可求得

$S_{\triangle ADP}=\dfrac{1}{2}\cdot(10-x)\left(x-x-\dfrac{50}{x}+10\right)$，化简后利用基本不等式可求得结果

(1)

因为 $AB=x$， $AD=y$，矩形 $ABCD$ 的周长为 20cm，

所以 $2x+2y=20\Rightarrow y=10-x$，因为 $AB>AD$，所以 $x>10-x>0$，

解得 $5<x<10$．所以 $y=f(x)=10-x$，定义域为 $(5,10)$.

(2)

因为 $ABCD$ 是矩形，所以有 $\angle D=\angle B=90°$， $AD=CB$．

因为 $\triangle AB'C$ 是 $\triangle ABC$ 沿 AC 折起所得，

所以有 $\angle B'=\angle B=90°$， $CB'=CB$，因此有 $\angle B'=\angle D=90°$，

$CB'=DA$，所以 $\triangle ADP\cong\triangle CB'P$，因此 $AP=CP$， $DP=B'P$．

设 $AP=CP=z$．而 $ABCD$ 是矩形，所以 $DC=AB$，

因此 $DP=DC-CP=x-z$．

在直角三角形 ADP 中，有 $AP^2=AD^2+DP^2\Rightarrow z^2=(10-x)^2+(x-z)^2\Rightarrow z=x+\dfrac{50}{x}-10$， $5<x<10$．

所以 $S_{\triangle ADP}=\dfrac{1}{2}AD\cdot DP=\dfrac{1}{2}\cdot y\cdot(x-z)=\dfrac{1}{2}\cdot(10-x)\left(x-x-\dfrac{50}{x}+10\right)$，

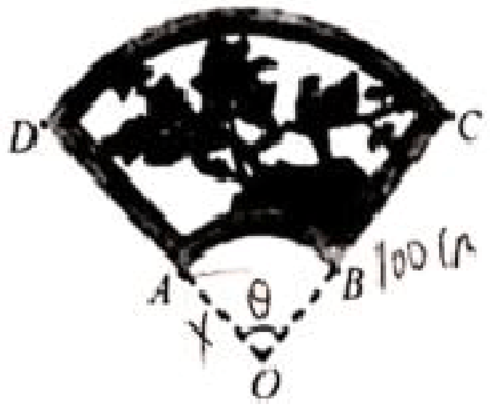
化简得 $S_{\triangle ADP}=75-5x-\dfrac{250}{x}=75-\left(5x+\dfrac{250}{x}\right)\le 75-2\sqrt{5x\cdot\dfrac{250}{x}}=75-50\sqrt{2}$，

当且仅当 $5x=\dfrac{250}{x}$ 时取等号，即 $x=5\sqrt{2}$ 时， $\triangle ADP$ 的最大面积为 $\left(75-50\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$.

例 **9**．（2022·全国·高三专题练习）砖雕是江南古建筑雕刻中很重要的一种艺术形式，传统砖雕精致细腻、气韵生动、极富书卷气．如图是一扇环形砖雕，可视为扇形 OCD 截去同心扇形 OAB 所得部分．已知扇环周长 $=300\text{cm}$，大扇形半径 $OD=100\text{cm}$，设小扇形半径 $OA=x\text{cm}$， $\angle AOB=\theta$ 弧度，则

①θ 关于 x 的函数关系式 $\theta(x)=$__________.

②若雕刻费用关于 x 的解析式为 $w(x)=10x+1700$，则砖雕面积与雕刻费用之比的最大值为_________.



【答案】 $\dfrac{100+2x}{100+x}$， $x\in(0,100)$； 3

【解析】

【分析】

利用弧长公式求 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{DC}$ 根据扇环周长可得θ 关于 x 的函数关系式；根据扇形面积公式求出扇环面积，进而得出砖雕面积与雕刻费用之比，再利用基本不等式即可求解.

【详解】

由题意可知，$\angle AOB=\theta$， $OA=x$ ， $OD=100$，

所以 $\overset{\frown}{AB}=\theta\cdot x$， $AD=BC=100-x$， $\overset{\frown}{DC}=100\theta$，

扇环周长 $\overset{\frown}{AB}+AD+BC+\overset{\frown}{DC}=\theta\cdot x+200-2x+100\theta=300$，

解得 $\theta=\dfrac{100+2x}{100+x}, x\in(0,100)$，

砖雕面积即为图中环形面积，记为S，

则 $S=S_{扇形DOC}-S_{扇形AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot OD\cdot\overset{\frown}{DC}-\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot\overset{\frown}{AB}$

$=\dfrac{1}{2}\times100\times100\theta-\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot\theta x=5000\theta-\dfrac{\theta}{2}x^2=\left(5000-\dfrac{x^2}{2}\right)\cdot\dfrac{100+2x}{100+x}$，

即雕刻面积与雕刻费用之比为 m，

则 $m=\dfrac{S}{w(x)}=\dfrac{(10000-x^2)(100+2x)}{2(100+x)(10x+1700)}=\dfrac{(100-x)(50+x)}{10(x+170)}$，

令 $t=x+170$，则 $x=t-170$，

$\therefore m=\dfrac{(270-t)(t-120)}{10t}=\dfrac{-t^2+390t-120\times270}{10t}=-\dfrac{t}{10}-\dfrac{12\times270}{t}+39$

$\le-2\sqrt{\dfrac{t}{10}\cdot\dfrac{12\times270}{t}}+39=-36+39=3$ ，当且仅当 $t=180$ 时（即 $x=10$ ）取等号，

所以砖雕面积与雕刻费用之比的最大值为3.

故答案为：$\dfrac{100+2x}{100+x}$， $x\in(0,100)$； 3

【方法技巧与总结】

1.解决此类问题一定要注意函数定义域；

2.利用模型 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ 求解最值时，注意取得最值时等号成立的条件.

题型三：指数函数、对数函数模型

例 **10**．（2022·全国·模拟预测）天文学上用绝对星等衡量天体的发光强度，用目视星等衡量观测者看到的天体亮度，可用 $M=m-5\lg\frac{d}{d_0}$ 近似表示绝对星等 M、目视星等 m 和观测距离 d（单位：光年）之间的关系．已知织女星的绝对星等为 0.58，目视星等为 0.04，大角星的绝对星等为 -0.38，目视星等为 -0.06，则观测者与织女星和大角星间的距离的比值约为（　　）

A．$10^{-2.2}$　　　　B．$10^{0.172}$　　　　C．$10^{-0.044}$　　　　D．$10^{-0.172}$

【答案】D

【解析】

【分析】

设观测者与织女星和大角星间的距离分别为 d_1，d_2，根据题意，列出方程组，化简整理，即可得答案.

【详解】

设观测者与织女星和大角星间的距离分别为 d_1，d_2，则有 $\begin{cases}0.58=0.04-5\lg\frac{d_1}{d_0}\\-0.38=-0.06-5\lg\frac{d_2}{d_0}\end{cases}$，

两式相减得 $5\lg\frac{d_1}{d_2}=-0.86$，所以 $\lg\frac{d_1}{d_2}=-0.172$，$\frac{d_1}{d_2}=10^{-0.172}$，

故选:D.

例 **11**．（2022·河南·模拟预测（文））金针菇采摘后会很快失去新鲜度，甚至腐烂，所以超市销售金针菇时需要采取保鲜膜封闭保存．已知金针菇失去的新鲜度 h 与其采摘后时间 t（天）满足的函数解析式为 $h=m\ln(t+a)$，$(a>0)$．若采摘后 1 天，金针菇失去的新鲜度为 40%，采摘后 3 天，金针菇失去的新鲜度为 80%．那么若不及时处理，采摘下来的金针菇在多长时间后开始失去全部新鲜度（已知 $\sqrt{2}\approx1.414$，结果取一位小数）（　　）

A．4.0 天　　　　B．4.3 天　　　　C．4.7 天　　　　D．5.1 天

【答案】C

【解析】

【分析】

由已知条件两式相除求出 a，设 t 天后开始失去全部新鲜度，则 $m\ln(t+1)=1$，再与已知一式相除可求得 t.

【详解】

由已知 $\begin{cases}m\ln(1+a)=0.4\\m\ln(3+a)=0.8\end{cases}$，相除得 $\frac{\ln(3+a)}{\ln(1+a)}=2$，$\ln(3+a)=2\ln(1+a)$，$(1+a)^2=3+a$，

因为 $a>0$，故解得 $a=1$，

设t天后开始失去全部新鲜度，则$m\ln(t+1)=1$，又$m\ln(1+1)=0.4$，

所以$\dfrac{\ln(t+1)}{\ln 2}=\dfrac{1}{0.4}$，$2\ln(t+1)=5\ln 2=\ln 32$，$(t+1)^2=32$，$t+1=\sqrt{32}=4\sqrt{2}=4\times 1.414=5.656$，$t=4.656\approx 4.7$．

故选：C.

例 **12**．（2022·陕西西安·三模（理））2022 年 4 月 16 日，神舟十二号 3 名航天员告别了工作生活 183 天的中国空间站，安全返回地球中国征服太空的关键是火箭技术，在理想情况下，火箭在发动机工作期间获得速度增量的公式$\Delta v=v_e\ln\dfrac{m_0}{m_1}$，其中$\triangle v$为火箭的速度增量，$v_e$为喷流相对于火箭的速度，$m_0$和$m_1$分别代表发动机开启和关闭时火箭的质量，在未来，假设人类设计的某火箭v_e达到 5 公里/秒$\dfrac{m_0}{m_1}$，从 100 提高到 600，则速度增量$\triangle v$增加的百分比约为（　　）（参考数据：$\ln 2\approx 0.7$，$\ln 3\approx 1.1$，$\ln 5\approx 1.6$

A．15%　　　B．30%　　　C．35%　　　D．39%

【答案】D

【解析】

【分析】

根据题意，速度的增量为$\triangle v_1=5\ln 100$，$\triangle v_2=5\ln 600$，结合对数的运算性质，即可求解.

【详解】

由题意，当$\dfrac{m_0}{m_1}=100$时，速度的增量为$\triangle v_1=5\ln 100$；

当$\dfrac{m_0}{m_1}=200$时，速度的增量为$\triangle v_2=5\ln 600=5\ln 100+5\ln 6$，

所以$\dfrac{\triangle v_2-\triangle v_1}{\triangle v_1}=\dfrac{5\ln 100+5\ln 6-5\ln 100}{5\ln 100}=\dfrac{\ln 6}{\ln 100}=\dfrac{\ln 2+\ln 3}{2(\ln 2+\ln 5)}\approx 39\%$.

故选：D.

例 **13**．（2022·贵州·模拟预测（理））生物入侵是指生物由原生存地侵入到另一个新的环境，从而对入侵地的生态系统造成危害的现象.若某入侵物种的个体平均繁殖数量为Q，一年四季均可繁殖，繁殖间隔T为相邻两代间繁殖所需的平均时间.在物种入侵初期，可用对数模型$K(n)=\lambda\ln n$（λ为常数）来描述该物种累计繁殖数量n与入侵时间K（单位：天）之间的对应关系，且$Q=\dfrac{T}{\lambda}+1$，在物种入侵初期，基于现有数据得出$Q=6$，$T=50$.据此估计该物种累计繁殖数量比初始累计繁殖数量增加11倍所需要的时间为（$\ln 2\approx 0.69$，$\ln 3\approx 1.10$）（　　）

A．22.0 天　　　B．13.8 天　　　C．24.8 天　　　D．17.9 天

【答案】C

【解析】

【分析】

根据已知数据可求得λ，设初始时间为K_1，累计繁殖数量增加11倍后的时间为K_2，利用K_2-K_1，结合对数运算法则可求得结果.

【详解】

$\because Q=\frac{T}{\lambda}+1$，$Q=6$，$T=50$，$\therefore 6=\frac{50}{\lambda}+1$，解得：$\lambda=10$.

设初始时间为K_1，初始累计繁殖数量为n，累计繁殖数量增加11倍后的时间为K_2，

则$K_2-K_1=\lambda\ln(12n)-\lambda\ln n=\lambda\ln12=10(2\ln2+\ln3)\approx24.8$（天）.

故选：C.

例 **14**．（2022·四川省泸县第二中学模拟预测（理））2020 年底，国务院扶贫办确定的贫困县全部脱贫摘帽，脱贫攻坚取得重大胜利！为进一步巩固脱贫攻坚成果，持续实施乡村振兴战略，某企业响应政府号召，积极参与帮扶活动．该企业 2021 年初有资金 150 万元，资金的年平均增长率固定，每三年政府将补贴 10 万元．若要实现 2024 年初的资金达到 270 万元的目标，资金的年平均增长率应为（参考值：$\sqrt[3]{1.82}\approx1.22, \sqrt[3]{1.73}\approx1.2$）（　　）

A．10%　　　　B．20%　　　　C．22%　　　　D．32%

【答案】B

【解析】

【分析】

设年平均增长率为x，依题意列方程求x即可.

【详解】

由题意，设年平均增长率为x，则$150(1+x)^3+10=270$，

所以$x=\sqrt[3]{\frac{26}{15}}-1\approx1.2-1=0.2$，故年平均增长率为20%.

故选：B

例 **15**．（2022·广西·模拟预测（理））异速生长规律描述生物的体重与其它生理属性之间的非线性数量关系通常以幂函数形式表示．比如，某类动物的新陈代谢率y与其体重x满足$y=kx^{\alpha}$，其中k和α为正常数，该类动物某一个体在生长发育过程中，其体重增长到初始状态的 16 倍时，其新陈代谢率仅提高到初始状态的 8 倍，则α为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．$\frac{2}{3}$　　　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】

初始状态设为(x_1,y_1)，变化后为(x_2,y_2)，根据x_1,x_2，y_1,y_2的关系代入后可求解.

【详解】

设初始状态为(x_1,y_1)，则$x_2=16x_1$，$y_2=8y_1$，

又$y_1=kx_1^{\alpha}$，$y_2=kx_2^{\alpha}$，即$8y_1=k\left(16x_1\right)^{\alpha}=k\cdot16^{\alpha}x_1^{\alpha}$，

$\frac{8y_1}{y_1}=\frac{k\cdot16^{\alpha}x_1^{\alpha}}{kx_1^{\alpha}}$，$16^{\alpha}=8$，$2^{4\alpha}=2^3$，$4\alpha=3$，$\alpha=\frac{3}{4}$.

故选：D.

例 **16**．（2022·贵州贵阳·二模（理））2021 年 11 月 24 日，贵阳市修文县发生了 4.6 级地震，所幸的是没有人员伤亡和较大财产损失，在抗震分析中，某结构工程师提出：由于实测地震记录的缺乏，且考虑到强震记录数量的有限性和地震动的不可重复性，在抗震分析中还需要人工合成符合某些指定统计特征的非平稳地震波时程，其中地震动时程强度包络函数$f\left(t\right)=\begin{cases}\left(\frac{t}{t_1}\right)^2, & 0<t\leqslant t_1\\ 1, & t_1<t\leqslant t_2\\ \frac{1}{e^{c\left(t-t_2\right)}}, & t_2<t\leqslant t_d\end{cases}$，$t_1,t_2$（单位：秒）分别为控制强震平稳段的首末时刻；$t_d$（单位：秒）表示地震动总持时；$c$是衰减因子，控制下降段衰减的快慢．在一次抗震分析中，地震动总持时是 20 秒，控制强震平稳段的首末时刻分别是 5 秒和 10 秒，衰减因子是 0.2，则当$t=15$秒时，地震动时程强度包络函数值是（　　）

A．e^{-1}　　B．1　　C．9　　D．e^{-2}

【答案】A

【解析】

【分析】

由题可得当$10<t\leq20$时，$f\left(t\right)=\frac{1}{e^{0.2(t-10)}}$，即得.

【详解】

由题可知$t_1=5,t_2=10$，$t_d=20$，$c=0.2$，

∴当$10<t\leq20$时，$f\left(t\right)=\frac{1}{e^{0.2(t-10)}}$，

∴当$t=15$秒时，地震动时程强度包络函数值是$f\left(15\right)=\frac{1}{e^{0.2(15-10)}}=\frac{1}{e}$.

故选：A.

【方法技巧与总结】

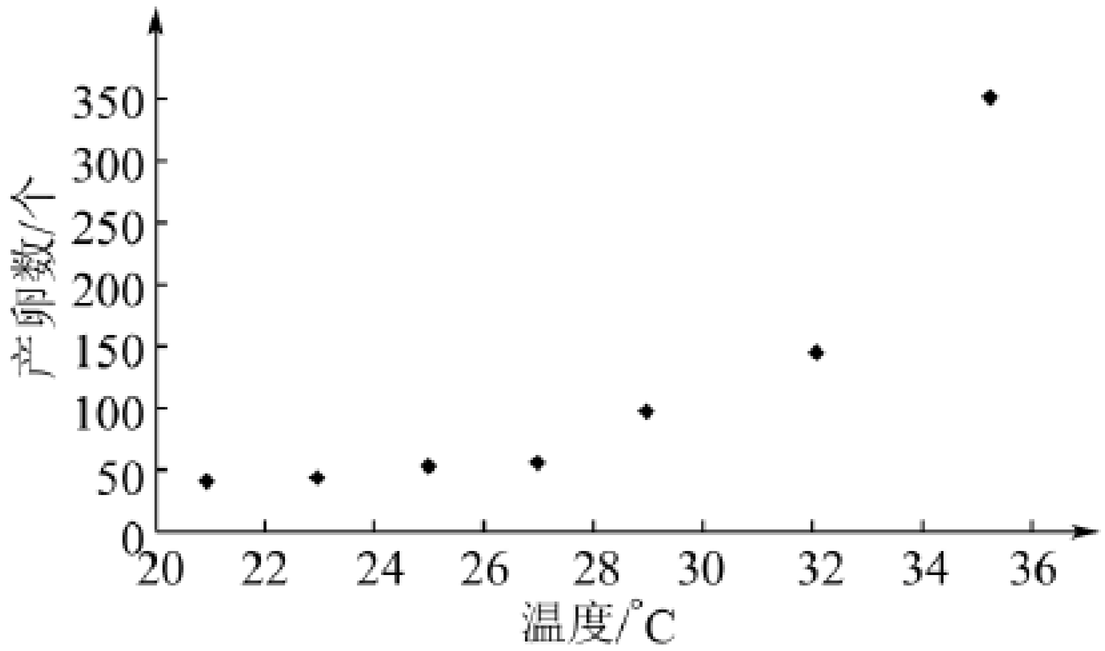
1.在解题时，要合理选择模型，指数函数模型是增长速度越来越快(底数大于 1)的一类函数模型，与增长率、银行利率有关的问题都属于指数模型.

2.在解决指数函数、对数函数模型问题时，一般先需通过待定系数法确定函数解析式，再借助函数图像 求解最值问题.

【过关测试】

一、单选题

1．（2022·辽宁葫芦岛·二模）某生物兴趣小组为研究一种红铃虫的产卵数 y 与温度 x（单位：℃）的关系.现收集了 7 组观测数据 $(x_i, y_i)(i=1,2,L,7)$ 得到下面的散点图：



由此散点图，在 20℃至 36℃之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为红铃虫产卵数 y 和温度 x 的回归方程类型的是（　　）

A． $y=a+bx$　　　　B． $y=a+\dfrac{b}{x}$　　　　C． $y=a+be^x$　　　　D． $y=a+b\ln x$

【答案】C

【解析】

【分析】

结合散点图的特点，选择合适的方程类型作为回归方程类型.

【详解】

由散点图可以看出红铃虫产卵数 y 随着温度 x 的增长速度越来越快，

所以 $y=a+be^x$ 最适宜作为红铃虫产卵数 y 和温度 x 的回归方程类型.

故选：C

2．（2022·全国·模拟预测）影响租金的因素有设备的价格、融资的利息和费用、税金、租赁保证金、运费、各种费用的支付时间、租金的计算方法等，而租金的计算方法有附加率法和年金法等，其中附加率法每期租金 R 的表达式为 $R=P\dfrac{(1+N\cdot i)}{N}+P\cdot r$（其中 P 为租赁资产的价格；N 为租赁期数，可按月、季、半年、年计；i 为折现率；r 为附加率）.某小型企业拟租赁一台生产设备，租金按附加率法计算，每年年末支付，已知设备的价格为 84 万元，折现率为 8%，附加率为 4%，若每年年末应付租金为 24.08 万元，则该设备的租期为（　　）

A．4 年　　　　B．5 年　　　　C．6 年　　　　D．7 年

【答案】C

【解析】

【分析】

根据题意构造函数，即可求解.

【详解】

由题意，R＝24.08 万元，P＝84 万元，i＝8%，r＝4%，则 $24.08=84\cdot\frac{\left(1+N\cdot 8\%\right)}{N}+84\times 4\%$，解得 N＝6，

故选:C.

3．（2022·全国·模拟预测）随着社会的发展，人与人的交流变得广泛，信息的拾取、传输和处理变得频繁，这对信息技术的要求越来越高，无线电波的技术也越来越成熟．其中电磁波在空间中自由传播时能量损耗满足传输公式：$L=32.44+20\lg D+20\lg F$，其中 D 为传输距离，单位是 km，F 为载波频率，单位是 MHz，L 为传输损耗（亦称衰减），单位为 dB．若载波频率增加了 1 倍，传输损耗增加了 18dB，则传输距离增加了约（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$，$\lg 4\approx 0.6$）（　　）

A．1 倍　　B．2 倍　　C．3 倍　　D．4 倍

【答案】C

【解析】

【分析】

由题，由前后两传输公式做差，结合题设数量关系及对数运算，即可得出结果

【详解】

设 L' 是变化后的传输损耗，F' 是变化后的载波频率，D' 是变化后的传输距离，则 $L'=L+18$，$F'=2F$，

$18=L'-L=20\lg D'+20\lg F'-20\lg D-20\lg F=20\lg\frac{D'}{D}+20\lg\frac{F'}{F}$，则 $20\lg\frac{D'}{D}=18-20\lg 2\approx 12$，即

$\lg\frac{D'}{D}\approx 0.6\approx \lg 4$，从而 $D'\approx 4D$，即传输距离增加了约 3 倍，

故选：C.

4．（2022·全国·模拟预测）施工企业承包工程，一般实行包工包料，需要有一定数量的备料周转金，由建设单位在开工前拨给施工企业一定数额的预付备料款，构成施工企业为该承包工程储备和准备主要材料、结构件所需的流动资金．确定工程预付款起扣点的依据是：未完施工工程所需主要材料和构件的费用等于工程预付款的数额．计算公式为：$T=P-\frac{M}{N}$（T：工程预付款起扣点，P：承包工程合同总额，M：工程预付款数额，N：主要材料及构件所占比重）．某施工企业承接了一个合同总额为 208 万元的新工程，该工程预付款起扣点为 160 万元，主要材料及构件所占比重为 65%，则建设单位应预付给施工企业的金额为合同总额的（　　）

A．12%　　B．15%　　C．18%　　D．21%

【答案】B

【解析】