浙江省湖州三校 2023-2024 学年高三上数学期末联考试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等，E 是 SB 的中点，则 AE，SD 所成的角的余弦值为（ ）

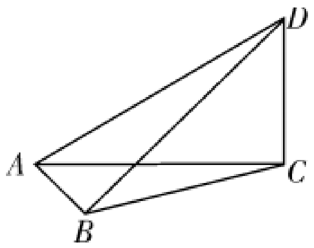
A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

2．设 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos(\pi+\beta)=-\frac{4}{5}(\beta\in(0,\pi))$，则 $\tan(2\alpha-\beta)$ 的值为（　　）

A．$-\frac{7}{24}$　　B．$-\frac{5}{24}$

C．$\frac{5}{24}$　　D．$\frac{7}{24}$

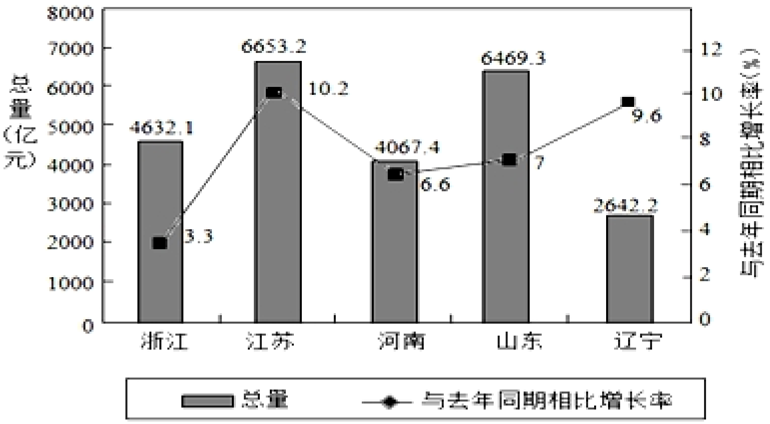
3．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=3$，$\angle ABC=120^\circ$，$\angle ACD=90^\circ$，$\angle CDA=60^\circ$，则 BD 的长度为（　　）



A．$\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　B．$2\sqrt{3}$

C．$3\sqrt{3}$　　D．$\frac{7\sqrt{3}}{3}$

4．如图是 **2017** 年第一季度五省 ***GDP*** 情况图，则下列陈述中不正确的是（　　）



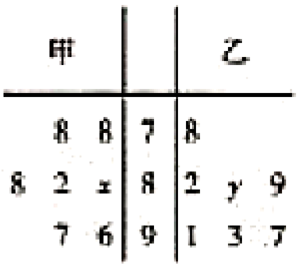
A．2017 年第一季度 *GDP* 增速由高到低排位第 5 的是浙江省．

B．与去年同期相比，2017 年第一季度的 *GDP* 总量实现了增长．

C．2017 年第一季度 *GDP* 总量和增速由高到低排位均居同一位的省只有 1 个

D．去年同期河南省的 *GDP* 总量不超过 4000 亿元．

5．2019 年某校迎国庆 70 周年歌咏比赛中，甲乙两个合唱队每场比赛得分的茎叶图如图所示（以十位数字为茎，个位数字为叶）.若甲队得分的中位数是 86，乙队得分的平均数是 88，则 $x+y=$（　　）



A．170　　B．10　　C．172　　D．12

6．抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 *F*，点 $P(x,y)$ 为该抛物线上的动点，若点 $A(-1,0)$，则 $\dfrac{PF}{PA}$ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

7．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 S_n 为前 n 项和，$2a_9=a_{11}+12$，则 S_{13} 的值是（　　）

A．156　　B．124　　C．136　　D．180

8．已知函数 $f(x)=\ln x+1$，$g(x)=2e^{x-\frac{1}{2}}$，若 $f(m)=g(n)$ 成立，则 $m-n$ 的最小值是（　　）

A．$\frac{1}{2}+\ln 2$　　B．$e-2$　　C．$\ln 2-\dfrac{1}{2}$　　D．$\sqrt{e}-\dfrac{1}{2}$

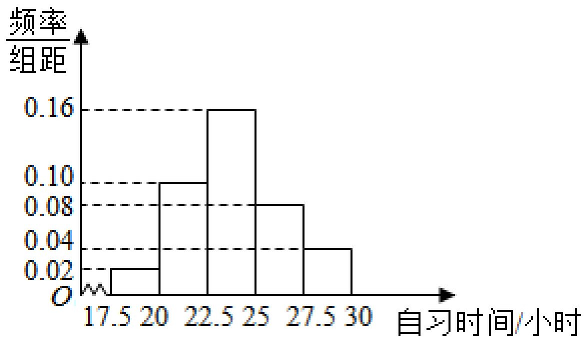
9．若 *x*，*y* 满足约束条件 $\begin{cases} x\text{-}y\le 0, \\ x+y\le 2, \\ x+1\ge 0, \end{cases}$ 则 $z=\dfrac{x+3}{y+2}$ 的取值范围为（　　）

A．$[\frac{2}{5},\frac{4}{3}]$　　　B．$[\frac{2}{5}$，3]　　　C．$[\frac{4}{3}$，2]　　　D．$[\frac{2}{5}$，2]

10．已知 i 为虚数单位，实数 x,y 满足 $(x+2i)i=y-i$，则 $|x-yi|=$（　　）

A．1　　　B．$\sqrt{2}$　　　C．$\sqrt{3}$　　　D．$\sqrt{5}$

11．某学校调查了 200 名学生每周的自习时间（单位：小时），制成了如图所示的频率分布直方图，其中自习时间的范围是 17.5，30]，样本数据分组为 17.5，20），20，22.5），22.5,25），25，27.5），27.5，30）.根据直方图，这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是（　　）



A．56　　　B．60　　　C．140　　　D．120

12．羽毛球混合双打比赛每队由一男一女两名运动员组成. 某班级从 3 名男生 A_1，A_2，A_3 和 3 名女生 B_1，B_2，B_3 中各随机选出两名，把选出的 4 人随机分成两队进行羽毛球混合双打比赛，则 A_1 和 B_1 两人组成一队参加比赛的概率为（　　）

A．$\frac{1}{9}$　　　B．$\frac{2}{9}$　　　C．$\frac{1}{3}$　　　D．$\frac{4}{9}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知 $a,b\in\mathbf{R}$，复数 $z=a-i$ 且 $\frac{z}{1+i}=1+bi$（i 为虚数单位），则 $ab=$__________，$|z|=$__________.

14．设 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，直线 l 过 F_1 交椭圆 C 于 A，B 两点，交 y 轴于 E 点，若满足 $\overrightarrow{F_1E}=2\overrightarrow{AF_1}$，且 $\angle EF_1F_2=60^\circ$，则椭圆 C 的离心率为______.

15．若函数 $f(x)=a\ln x,(a\in R)$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x}$，在公共点处有共同的切线，则实数 a 的值为______.

16．某校高二（4）班统计全班同学中午在食堂用餐时间，有 7 人用时为 6 分钟，有 14 人用时 7 分钟，有 15 人用时为 8 分钟，还有 4 人用时为 10 分钟，则高二（4）班全体同学用餐平均用时为____分钟.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$.

（1）求证：$a^4-a^2b^2+b^4 \geqslant \dfrac{ab\left(a^4+b^4\right)}{a^2+b^2}$；

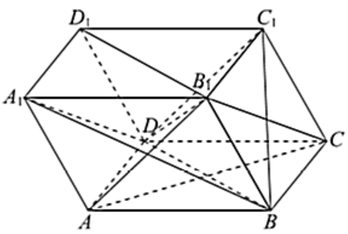
（2）若 $abc=1$，求证：$a^3+b^3+c^3 \geqslant ab+bc+ac$.

18.（12 分）已知函数 $f(x)=ae^x-x^2$.

（1）若曲线 $f(x)$ 存在与 y 轴垂直的切线，求 a 的取值范围.

（2）当 $a\geq 1$ 时，证明：$f(x) \geqslant 1+x-\dfrac{3}{2}x^2$.

19.（12 分）如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$AB_1=CB_1$.



（1）证明：平面 $BDD_1B_1\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若 $\angle DAB=60^\circ$，ΔDB_1B 是等边三角形，求二面角 A_1-BD-C_1 的余弦值.

20.（12 分）某公司欲投资一新型产品的批量生产，预计该产品的每日生产总成本价格) y (单位:万元)是每日产量 x (单位:吨)的函数: $y=\dfrac{32x^2}{x^2-1}lnx\left(x>1\right)$.

（1）求当日产量为 3 吨时的边际成本(即生产过程中一段时间的总成本对该段时间产量的导数)；

（2）记每日生产平均成本 $\dfrac{y}{x}=m$, 求证：$m<16$；

（3）若财团每日注入资金可按数列 $a_n=\dfrac{2n}{4n^2-1}$ (单位:亿元)递减，连续注入 60 天，求证:这 60 天的总投入资金大于 $ln11$ 亿元.

21.（12 分）某生物研究小组准备探究某地区蜻蜓的翼长分布规律，据统计该地区蜻蜓有 A，B 两种，且这两种的个体数量大致相等，记 A 种蜻蜓和 B 种蜻蜓的翼长（单位：mm）分别为随机变量 X，Y，其中 X 服从正态分布 $N\left(45,25\right)$，Y 服从正态分布 $N\left(55,25\right)$.

（Ⅰ）从该地区的蜻蜓中随机捕捉一只，求这只蜻蜓的翼长在区间 $\left[45,55\right]$ 的概率；

（Ⅱ）记该地区蜻蜓的翼长为随机变量 Z，若用正态分布 $N\left(\mu_0,\sigma_0^2\right)$ 来近似描述 Z 的分布，请你根据（Ⅰ）中的结果，求参数 μ_0 和 σ_0 的值（精确到 **0.1**）；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，从该地区的蜻蜓中随机捕捉3只，记这3只中翼长在区间$\left[42.2,57.8\right]$的个数为W，求W的分布列及数学期望（分布列写出计算表达式即可）.

注:若$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$P(\mu-0.64\sigma\le X\le\mu+0.64\sigma)\approx0.4773$，$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\mu\le X\le\mu+2\sigma)\approx0.9546$.

22.（10分）已知数列$\left\{a_n\right\}$是等差数列，前n项和为S_n，且$S_5=3a_3$，$a_4+a_6=8$.

（1）求a_n.

（2）设$b_n=2^n\cdot a_n$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和T_n.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

【解析】

试题分析：设AC、BD的交点为O，连接EO，则$\angle AEO$为AE,SD所成的角或其补角；设正四棱锥的棱长为a，

则$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a,EO=\frac{1}{2}a,OA=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以$\cos\angle AEO=\frac{AE^2+OA^2-EO^2}{2AE\cdot OA}$

$=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+(\frac{1}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}{2\times(\frac{\sqrt{3}}{2}a)\cdot(\frac{1}{2}a)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故**C**为正确答案.

考点：异面直线所成的角.

2、**D**

【解析】

利用倍角公式求得$\tan2\alpha$的值，利用诱导公式求得$\cos\beta$的值，利用同角三角函数关系式求得$\sin\beta$的值，进而求得$\tan\beta$的值，最后利用正切差角公式求得结果.

【详解】

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{3}$，

$\cos\left(\pi+\beta\right)=-\frac{4}{5}=-\cos\beta$，（$\beta\in\left(0,\pi\right)$），

$\therefore\cos\beta=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{3}{5}$，$\tan\beta=\frac{3}{4}$，

$\tan\left(2\alpha-\beta\right)=\frac{\tan2\alpha-\tan\beta}{1+\tan2\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{7}{24}$，

故选：**D.**

【点睛】

该题考查的是有关三角函数求值问题，涉及到的知识点有诱导公式，正切倍角公式，同角三角函数关系式，正切差角公式，属于基础题目.

3、**D**

【解析】

设$\angle ACB=\alpha$，在ΔABC中，由余弦定理得$AC^2=10-6\cos120^\circ=13$，从而求得$CD$，再由由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin120^\circ}$，求得$\sin\alpha$，然后在$\Delta BCD$中，用余弦定理求解.

【详解】

设$\angle ACB=\alpha$，在ΔABC中，由余弦定理得$AC^2=10-6\cos120^\circ=13$，

则$AC=\sqrt{13}$，从而$CD=\sqrt{\frac{13}{3}}$，

由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin120^\circ}$，即$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$，

从而$\cos\angle BCD=\cos\left(90^\circ+\alpha\right)=-\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$，

在ΔBCD中，由余弦定理得：$BD^2=9+\frac{13}{3}+2\times3\times\sqrt{\frac{13}{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}=\frac{49}{3}$，

则$BD=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

故选：**D**

【点睛】

本题主要考查正弦定理和余弦定理的应用，还考查了数形结合的思想和运算求解的能力，属于中档题.

4、**C**

【解析】

利用图表中的数据进行分析即可求解.

【详解】

对于 A 选项：2017 年第一季度 5 省的 GDP 增速由高到低排位分别是：江苏、辽宁、山东、河南、浙江，故 A 正确；

对于 B 选项：与去年同期相比，2017 年第一季度 5 省的 GDP 均有不同的增长，所以其总量也实现了增长，故 B 正确；

对于 C 选项：2017 年第一季度 GDP 总量由高到低排位分别是：江苏、山东、浙江、河南、辽宁，2017 年第一季度 5 省的 GDP 增速由高到低排位分别是：江苏、辽宁、山东、河南、浙江，均居同一位的省有 2 个，故 C 错误；

对于 D 选项：去年同期河南省的 GDP 总量 $4067.4\times\frac{1}{1+6.6\%}\approx 3815.57<4000$，故 D 正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查了图表分析，学生的分析能力，推理能力，属于基础题.

5、D

【解析】

中位数指一串数据按从小（大）到大（小）排列后，处在最中间的那个数，平均数指一串数据的算术平均数.

【详解】

由茎叶图知，甲的中位数为 $80+x=86$，故 $x=6$；

乙的平均数为 $\frac{78+82+80+y+89+91+93+97}{7}=88$，

解得 $y=6$，所以 $x+y=12$.

故选：D.

【点睛】

本题考查茎叶图的应用，涉及到中位数、平均数的知识，是一道容易题.

6、B

【解析】

通过抛物线的定义，转化 $PF=PN$，要使 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 有最小值，只需 $\angle APN$ 最大即可，作出切线方程即可求出比值的最小值.

【详解】

解：由题意可知，抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，$A(-1,0)$，

过 P 作 PN 垂直直线 $x=-1$ 于 N，

由抛物线的定义可知 $PF=PN$，连结 PA，当 PA 是抛物线的切线时，$\dfrac{|PF|}{|PA|}$ 有最小值，则 $\angle APN$ 最大，即 $\angle PAF$ 最大，就是直线 PA 的斜率最大，

设在 PA 的方程为：$y=k(x+1)$，所以 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ y^2=4x \end{cases}$，

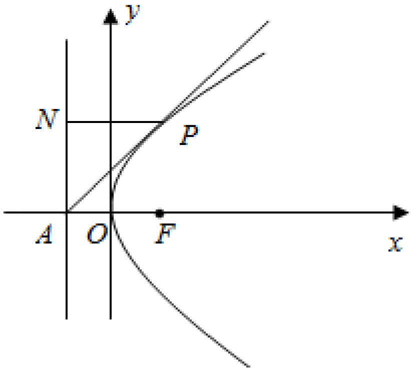
解得：$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$，

所以 $\Delta=(2k^2-4)^2-4k^4=0$，解得 $k=\pm 1$，

所以 $\angle NPA=45^\circ$，

$\dfrac{|PF|}{|PA|}=\cos\angle NPA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.



【点睛】

本题考查抛物线的基本性质，直线与抛物线的位置关系，转化思想的应用，属于基础题.

7、**A**

【解析】

因为 $a_7+a_{11}=2a_9=a_{11}+12$，可得 $a_7=12$，根据等差数列前 n 项和，即可求得答案.

【详解】

Q $a_7+a_{11}=2a_9=a_{11}+12$，

$\therefore a_7=12$，

$\therefore S_{13}=\dfrac{13\left(a_1+a_{13}\right)}{2}=13a_7=13\times 12=156$.

故选：**A.**

【点睛】

本题主要考查了求等差数列前n项和，解题关键是掌握等差中项定义和等差数列前n项和公式，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

8、**A**

【解析】

分析：设$f(m)=g(n)=t$，则$t>0$，把m,n用t表示，然后令$h(t)=m-n$，由导数求得$h(t)$的最小值.

详解：设$f(m)=g(n)=t$，则$t>0$，$m=e^{t-1}$，$n=\ln\frac{t}{2}+\frac{1}{2}=\ln t-\ln 2+\frac{1}{2}$，

$\therefore m-n=e^{t-1}-\ln t+\ln 2-\frac{1}{2}$，令$h(t)=e^{t-1}-\ln t+\ln 2-\frac{1}{2}$，

则$h'(t)=e^{t-1}-\frac{1}{t}$，$h''(t)=e^{t-1}+\frac{1}{t^2}>0$，$\therefore h'(t)$是$(0,+\infty)$上的增函数，

又$h'(1)=0$，$\therefore$当$t\in(0,1)$时，$h'(t)<0$，当$t\in(1,+\infty)$时，$h'(t)>0$，

即$h(t)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，$h(1)$是极小值也是最小值，

$h(1)=\frac{1}{2}+\ln 2$，$\therefore m-n$的最小值是$\frac{1}{2}+\ln 2$.

故选**A**.

点睛: 本题易错选**B**，利用导数法求函数的最值，解题时学生可能不会将其中求$b-a$的最小值问题，通过构造新函数，转化为求函数$h(t)$的最小值问题，另外通过二次求导，确定函数的单调区间也很容易出错.

9、**D**

【解析】

由题意作出可行域，转化目标函数$z=\frac{x+3}{y+2}$为连接点$D\left(-3,-2\right)$和可行域内的点$\left(x,y\right)$的直线斜率的倒数，数形结合即可得解.

【详解】

由题意作出可行域，如图，

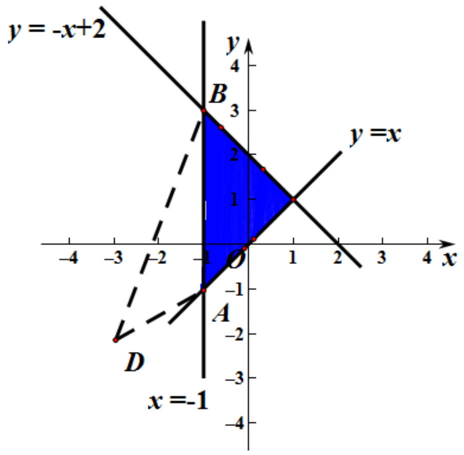
目标函数$z=\frac{x+3}{y+2}$可表示连接点$D\left(-3,-2\right)$和可行域内的点$\left(x,y\right)$的直线斜率的倒数，

由图可知，直线DA的斜率最小，直线DB的斜率最大，

由$\begin{cases}x-y=0\\x+1=0\end{cases}$可得$A\left(-1,-1\right)$，由$\begin{cases}x+y=2\\x+1=0\end{cases}$可得$B\left(-1,3\right)$，

所以$k_{DA}=\frac{-1+2}{-1+3}=\frac{1}{2}$，$k_{DB}=\frac{3+2}{-1+3}=\frac{5}{2}$，所以$\frac{2}{5}\le z\le 2$.

故选：**D**.



【点睛】

本题考查了非线性规划的应用，属于基础题.

10、D

【解析】

$\because (x+2i)i = y-i, \therefore -2+xi = y-i, \therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$，

则 $|x-yi| = |-1+2i| = \sqrt{5}.$

故选 D.

11、C

【解析】

试题分析：由题意得，自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $(0.16+0.08+0.04)\times 2.5 = 0.7$，故自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $0.7\times 200 = 140$，故选 C.

考点：频率分布直方图及其应用.

12、B

【解析】

根据组合知识，计算出选出的 4 人分成两队混合双打的总数为 $\dfrac{C_3^2C_3^2C_2^1C_2^1}{A_2^2}$，然后计算 A_1 和 B_1 分在一组的数目为 $C_2^1C_2^1$，最后简单计算，可得结果.

【详解】

由题可知：

分别从 3 名男生、3 名女生中选 2 人 ：$C_3^2C_3^2$

将选中 2 名女生平均分为两组：$\dfrac{C_2^1C_1^1}{A_2^2}$