学习目标

1.理解n次方根、n次根式的概念；

2.正确运用根式运算性质化简、求值；

3.体会分类讨论思想、符号化思想的作用.

知识点一　n次方根，n次根式

思考　若$x^2=3$，这样的x有几个？它们叫作3的什么？怎么表示?

答案　这样的 x 有 2 个，它们都称为 3 的平方根，记作$\pm\sqrt{3}$.

一般地，有：(1)a的n次方根定义

如果__$x^n=a$__，那么x叫做a的n次方根，其中$n>1$，且$n\in \mathbf{N}^*$.

(2)a的n次方根的表示

n 的奇偶性	a 的 n 次方根的表示符号	a 的取值范围
n 为奇数	$\sqrt[n]{a}$	$a\in\mathbf{R}$
n 为偶数	$\pm\sqrt[n]{a}$	$[0,+\infty)$

(3)根式

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里n叫做根指数，a叫做被开方数.

答案

知识点二　根式的性质

思考　我们已经知道若 $x^2=3$，则 $x=\pm\sqrt{3}$，那么$(\sqrt{3})^2$等于什么？$\sqrt{3^2}$呢？$\sqrt{(-3)^2}$呢？

答案　把 $x=\sqrt{3}$代入方程 $x^2=3$，有$(\sqrt{3})^2=3$；

$\sqrt{3^2}=\sqrt{9}$，$\sqrt{9}$代表 9 的两个平方根中正的那一个，即 3.

$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$.

一般地，有：(1)$\sqrt[n]{0}=$ __0__ $(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；

(2)$(\sqrt[n]{a})^n=$ __a__ $(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；

(3)$\sqrt[n]{a^n}=a$(n 为大于 1 的奇数)；

(4)$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}\underline{\ a\ }(a\geqslant 0)\\ \underline{\ -a\ }(a<0)\end{cases}$ (n 为大于 1 的偶数).

类型一　根式的意义

例 1　求使等式$\sqrt{(a-3)(a^2-9)}=(3-a)\sqrt{a+3}$成立的实数 a 的取值范围.

解　$\sqrt{(a-3)(a^2-9)}=\sqrt{(a-3)^2(a+3)}$

$=|a-3|\sqrt{a+3}$,

要使$|a-3|\sqrt{a+3}=(3-a)\sqrt{a+3}$,

需$\begin{cases}a-3\leqslant 0,\\ a+3\geqslant 0,\end{cases}$　解得 $a\in[-3,3]$.

对于$\sqrt[n]{a}$，当 n 为偶数时，要注意两点：(1)只有 $a\geqslant 0$ 才有意义；(2)只要$\sqrt[n]{a}$有意义，$\sqrt[n]{a}$必不为负.

跟踪训练1 若$\sqrt{a^2-2a+1}=a-1$，求 a 的取值范围.

解 $\because\sqrt{a^2-2a+1}=|a-1|=a-1$,

$\therefore a-1\geqslant 0$,

$\therefore a\geqslant 1$.

解析答案

类型二　利用根式的性质化简或求值

例2　化简：

(1)$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$；

解　$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=|3-\pi|=\pi-3$.

(2)$\sqrt{(a-b)^2}(a>b)$；

解　$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=a-b$.

解析答案

(3)$(\sqrt{a-1})^2+\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt[3]{(1-a)^3}$.

解 由题意知$a-1\geqslant 0$，

即$a\geqslant 1$.

原式$=a-1+|1-a|+1-a=a-1+a-1+1-a=a-1$.

反思与感悟

n 为奇数时$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a$，$a$ 为任意实数均可；

n 为偶数时，$a\geqslant 0$，$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ 才有意义，且$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$；

而 a 为任意实数$\sqrt[n]{a^n}$均有意义，且$\sqrt[n]{a^n}=|a|$.