陕西省铜川市2024届高三第二次质量检测数学（理科）试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．若集合 $M=\{x|2x-1>5\}$，$N=\{x\in \mathrm{N}^{*}|-1<x<5\}$，则$\left(\complement_{\mathrm{R}}M\right)\cap N=$（　　）

A．$\{0,1,2,3\}$　　B．$\{1,2,3\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{1,2\}$

2．已知复数$(1+2\mathrm{i})(z-1)=-2+\mathrm{i}$，则$|z|=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．3

3．从$1,2,\cdots,9$这九个数字中任取两个，这两个数的和为质数的概率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{4}{9}$　　C．$\frac{7}{18}$　　D．$\frac{13}{36}$

4．已知一个圆柱的高不变，它的体积扩大为原来的9倍，则它的侧面积扩大为原来的（　　）

A．$\sqrt{3}$倍　　B．3倍　　C．$3\sqrt{3}$倍　　D．9倍

5．已知A，B是$\odot C$：$(x-2)^2+(y-4)^2=25$上的两个动点，P是线段AB的中点，若$|AB|=6$，则点P的轨迹方程为（　　）

A．$(x-4)^2+(y-2)^2=16$　　B．$(x-2)^2+(y-4)^2=11$

C．$(x-2)^2+(y-4)^2=16$　　D．$(x-4)^2+(y-2)^2=11$

6．已知函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x<0$时，$f(x)=\mathrm{e}^{x}$，则$f(\ln 2)=$（　　）

A．-2　　B．2　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

7．设F为抛物线$C_1:y^2=2x$的焦点，点P在抛物线上，点Q在准线l上，满足$PQ\,/\!/\,x$轴．若$|PQ|=|QF|$，则$|PF|=$（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{3}$　　C．3　　D．$3\sqrt{3}$

8．在递增等比数列$\{a_n\}$中，其前n项和为S_n，且$6a_7$是a_8和a_9的等差中项，则$\frac{S_6}{S_3}=$（　　）

A．28　　B．20　　C．18　　D．12

9．已知函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$且满足$f\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，则$\omega$的最小值为（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．1　　　　D．2

10．已知函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f'\left(x\right)\ln x+\frac{1}{x}f\left(x\right)<0$（其中 $f'\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的导数），若 $a=f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$，$b=f\left(e^{\frac{1}{3}}\right)$，$c=f\left(e^{\frac{1}{4}}\right)$，则下列选项中正确的是（　）

A．$6a<4b<3c$　　B．$6a<3c<4b$　　C．$4b<6a<3c$　　D．$4b<3c<6a$

11．正四棱锥 $P-ABCD$ 内有一球与各面都相切，球的直径与边 AB 的比为 $4:5$，则 PA 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为（　）

A．$\frac{5}{4}$　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$\frac{10\sqrt{2}}{9}$　　　　D．$\frac{20\sqrt{2}}{9}$

12．已知斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 经过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的右焦点 F，交双曲线 C 的右支于 A，B 两点，且 $\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{FB}$，则双曲线的离心率为（　）

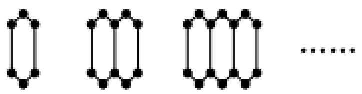
A．$\frac{6}{5}$　　　　B．$\frac{7}{5}$　　　　C．$\frac{10}{7}$　　　　D．$\frac{4}{3}$

二、填空题

13．已知向量 $\vec{a}=(t-2,3),\vec{b}=(3,-1)$，且 $(\vec{a}+2\vec{b})\parallel\vec{b}$，则 $|\vec{a}|=$_________.

14．已知锐角 α,β 满足 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3}{5}$，则 $\cos\left(\alpha-\beta\right)=$________.

15．如图所示是一系列有机物的结构简图，途中的“小黑点”表示原子，两黑点间的“短线”表示化学键，按图中结构第 n 个图的化学键和原子的个数之和为_____个.(用含 n 的代数式表示)



(1)　　(2)　　(3)　　(n)

16．已知函数 $f(x)=[a(x-1)-2\ln x]e^x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为______.

三、解答题

17．清明节，又称踏青节、行清节、三月节、祭祖节等，是传统的重大春祭节日，扫墓祭祀、缅怀祖先，是中华民族自古以来的优良传统．某社区进行流动人口统计，随机抽取了100人了解他们今年是否回老家祭祖，得到如下不完整的 2×2 列联表：

	回老家	不回老家	总计
50 周岁及以下		55	
50 周岁以上	15		40
总计			100

(1)根据统计完成以上2×2列联表，并根据表中数据估计该社区流动人口中 50 周岁以上的居民今年回老家祭祖的概率；

(2)能否有 99.9%的把握认为回老家祭祖与年龄有关？

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$．

参考数据：

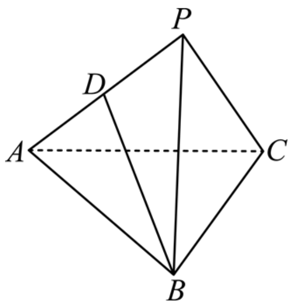
$P(K^2\geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

18．在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a，b，c，$\tan A\tan B+\tan A\tan C=3\tan B\tan C$．

(1)证明：$3c^2+3b^2=5a^2$；

(2)若$a=\sqrt{15}$，当A取最大值时，求$\triangle ABC$的面积．

19．如图，在三棱锥$P-ABC$中，侧面$PAC\perp$底面ABC，且$\triangle ABC$为等边三角形，$PA\perp PC$，$\angle PAC=\dfrac{\pi}{6}$，$D$为$PA$的中点．



(1)求证：$AP\perp BD$；

(2)求直线BD与平面PBC所成角的正弦值．

20．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在椭圆$C$上，且椭圆$C$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)相互垂直且斜率存在的直线l_1，l_2都过点$B\left(1,0\right)$，直线l_1与椭圆相交于P、Q两点，直线l_2与椭圆相交于M、N两点，点D为线段PQ的中点，点E为线段MN的中点，证明：直线DE过定点.

21．已知函数$f(x)=\ln x+\frac{3}{x}-\frac{a}{x^2}$.

(1)若$a=0$，求$f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

(2)若x_1,x_2（$x_1<x_2$）是$f\left(x\right)$的两个极值点，证明：$\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<\frac{3}{4a}$.

22．在平面直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数）．以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho=-2\sin\theta$.

(1)求曲线C_1的极坐标方程和曲线C_2的直角坐标方程；

(2)设直线$l:\sqrt{3}x+y=0$与曲线C_1，C_2分别交于A，B两点（异于极点），求线段AB的长度.

23．已知$a>0,b>0$，函数$f\left(x\right)=\left|x+a\right|+\left|x-b\right|$的最小值为2，证明：

(1)$3a^2+b^2\geq 3$；

(2)$\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b}\geq 3$.

参考答案：

1．B

【分析】由题知，对集合M，N进行转化，根据补集的概念求出$\complement_{\mathbf{R}}M$，结合交集的运算求出$\left(\complement_{\mathbf{R}}M\right)\cap N$.

【详解】由题意知$M=\left\{x\middle|2x-1>5\right\}=\left\{x\middle|x>3\right\}$，$N=\left\{x\in \mathrm{N}^{*}\middle|-1<x<5\right\}=\{1,2,3,4\}$，

所以$\complement_{\mathbf{R}}M=\left\{x\middle|x\le 3\right\}$,$\left(\complement_{\mathbf{R}}M\right)\cap N=\{1,2,3\}$.

故选：B.

2．A

【分析】

利用复数的除法运算法则求出复数，再利用复数模的公式求解即可.

【详解】$z=\dfrac{-2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}+1=\dfrac{(-2+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}+1=\dfrac{5\mathrm{i}}{5}+1=1+\mathrm{i}$，则$|z|=\sqrt{2}$.

故选：A.

3．C

【分析】

求所有组合个数，列举和为质数的情况，古典概型求概率.

【详解】

这九个数字中任取两个，有C_9^2种取法，

和为质数有$(1,2),(1,4),(2,3),(1,6),(2,5),(3,4),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(4,9),(5,8),(6,7)$，

$(8,9)$共14种情况，

因此所求概率为$\dfrac{14}{\mathrm{C}_9^2}=\dfrac{7}{18}$.

故选：C.

4．B

【分析】

根据圆柱体积公式可求得$r'=3r$，代入圆柱侧面积公式即可求得结果.

【详解】

设圆柱的高为h，底面半径为r，则其体积$V=\pi r^2h$，侧面积为$S=2\pi rh$；

设体积扩大9倍后的底面半径为r'，则$9V=9\pi r^2h=\pi r'^2h$，$\therefore r'=3r$，

$\therefore$其侧面积变为$S'=2\pi r'h=6\pi rh$，$\therefore S'=3S$，即侧面积扩大为原来的3倍.

故选：B.

5．C

【分析】

由圆的垂径定理得$CP\perp AB$，利用勾股关系求得$|CP|=4$，结合圆的定义即可求出点P的轨迹方程.

【详解】

因为AB中点为P，所以$CP\perp AB$，又$|AB|=6$，所以$|CP|=\sqrt{25-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=4$，

所以点P在以C为圆心，4为半径的圆上，其轨迹方程为$(x-2)^2+(y-4)^2=16$.

故选：C.

6．C

【分析】因为函数$f(x)$为奇函数，所以$f(\ln 2)=-f(-\ln 2)=-\mathrm{e}^{-\ln 2}$从而求解.

【详解】

因为函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，且$x<0$时，$f(x)=\mathrm{e}^x$

所以$f(\ln 2)=-f(-\ln 2)=-\mathrm{e}^{-\ln 2}=-\frac{1}{2}$，故C项正确.

故选：C.

7．A

【分析】

先根据题意和抛物线的性质可得到$\triangle PQF$为等边三角形，进而即可求得$|PF|$的值.

【详解】依题意有$|PQ|=|QF|=|PF|$，则$\triangle PQF$为等边三角形，

又$PQ\parallel x$轴，所以$|PF|=|PQ|=4|OF|=2$.

故选：A.

8．A

【分析】

由等比数列的通项公式求出q，再由等比数列的前n项和公式代入化简即可得出答案.

【详解】根据题意得$12a_7 = a_8 + a_9$，$12 = q + q^2$，解得$q = 3$或$q = -4$（舍），

则$\dfrac{S_6}{S_3} = \dfrac{\dfrac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}}{\dfrac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}} = \dfrac{1-q^6}{1-q^3} = 1+q^3 = 1+3^3 = 28$.

故选：A.

9．A

【分析】

由$f\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)=f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$可得函数$f(x)$的图象关于$x=\dfrac{\pi}{4}$对称，由正弦型函数的对称性列方程求$\omega$的最小值.

【详解】

由已知可得$f\left(\dfrac{2\pi}{3}-x-\dfrac{5\pi}{12}\right)=f\left(x+\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

即$f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$,

所以$f(x)$关于$x=\dfrac{\pi}{4}$对称，

故$\omega\cdot\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

所以$\omega = 4k+\dfrac{2}{3}$，又$\omega > 0$，

所以$k=0$时，ω取最小值为$\dfrac{2}{3}$.

故选：A.

10．A

【分析】

根据已知条件构造函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)\ln x$，利用导数法求函数的单调性及指数函数的单调性，结合不等式的性质即可求解.

【详解】

由$f'\left(x\right)\ln x+\dfrac{1}{x}f\left(x\right)<0$，得$\left[f\left(x\right)\ln x\right]'<0$，

令$g\left(x\right)=f\left(x\right)\ln x$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，则

$g'\left(x\right)=f'\left(x\right)\ln x+\dfrac{1}{x}f\left(x\right)<0$，

所以$g'(x)<0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，

因为$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$，且$y=e^{x}$在R上单调性递增；

所以$e^{\frac{1}{2}}>e^{\frac{1}{3}}>e^{\frac{1}{4}}$，

所以$g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)<g\left(e^{\frac{1}{3}}\right)<g\left(e^{\frac{1}{4}}\right)$，

所以$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\ln e^{\frac{1}{2}}<f\left(e^{\frac{1}{3}}\right)\ln e^{\frac{1}{3}}<f\left(e^{\frac{1}{4}}\right)\ln e^{\frac{1}{4}}$，

所以$\frac{1}{2}a<\frac{1}{3}b<\frac{1}{4}c$，即$6a<4b<3c$．

故选：A.

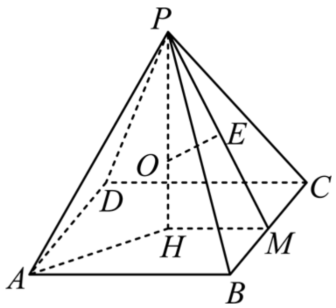
【点睛】

关键点睛：解决此题的关键是构造函数$g(x)=f(x)\ln x$，利用导数法求函数的单调性，结合指数函数的单调性及不等式的性质即可.

11．D

【分析】根据正棱锥的性质得出球心的位置，进而构造相似三角形，根据相似三角形得出球的半径，以及四棱锥的高，即可得出答案.

【详解】



根据正棱锥的性质，易知球心在正棱锥的高线上，

设球心为O，P在平面$ABCD$内的射影为H，$PH=h$，

取M为BC中点，则$HM // AB$，且$HM=\frac{1}{2}AB$.

作$OE\perp PM$于E，设球的半径为r，

则$AB=\frac{5}{2}r$，$HM=\frac{5}{4}r$，$PM=\sqrt{PH^{2}+HM^{2}}=\sqrt{h^{2}+\left(\frac{5}{4}r\right)^{2}}$，$OE=OH=r$.

因为 $PH \perp HM$， $OE \perp PM$，

所以 $\triangle POE \backsim \triangle PMH$，

所以 $\dfrac{OP}{PM}=\dfrac{OE}{HM}$，

即 $\dfrac{h-r}{\sqrt{h^2+\left(\dfrac{5}{4}r\right)^2}}=\dfrac{r}{\dfrac{5}{4}r}$，整理可得 $h=\dfrac{50r}{9}$.

连接 AH，则 $AH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=\dfrac{5\sqrt{2}r}{4}$，

所以 $\tan\angle PAH=\dfrac{h}{AH}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\dfrac{h}{r}=\dfrac{20\sqrt{2}}{9}$.

因为 $PH \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle PAH$ 即为直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角，

所以，PA 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\dfrac{20\sqrt{2}}{9}$.

故选：D.

【点睛】思路点睛: 根据正棱锥的性质得出球心的位置以及棱锥的高，过球心向棱锥的斜高作垂线，构造相似三角形，根据比例关系，即可得出半径与高的关系.

12．C

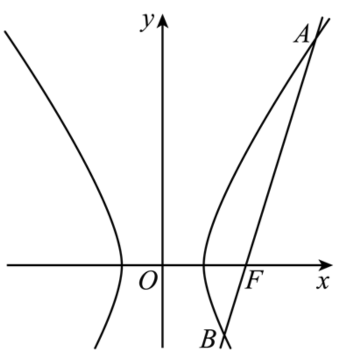
【分析】

设出直线 l 的方程为 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+c$，联立双曲线，得到两根之和，两根之积，由 $\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{FB}$ 得到 $y_1=-6y_2$，结合两根之和，两根之积，列出方程，求出离心率.

【详解】

设 $A\left(x_1,y_1\right)$， $B\left(x_2,y_2\right)$，直线 l 的方程为 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+c$，其中 $c^2=a^2+b^2$，

联立 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+c, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 得 $\left(b^2-3a^2\right)y^2+2\sqrt{3}b^2cy+3b^4=0$.



$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{b^2-3a^2}$，$y_1y_2=\dfrac{3b^4}{b^2-3a^2}$，

由 $\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{FB}$，得 $y_1=-6y_2$，即 $\dfrac{y_1}{y_2}=-6$，

$\therefore \dfrac{y_1}{y_2}+\dfrac{y_2}{y_1}=-\dfrac{37}{6}$，即 $\dfrac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=-\dfrac{25}{6}$，

$\therefore \dfrac{\left(-\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{b^2-3a^2}\right)^2}{\dfrac{3b^4}{b^2-3a^2}}=\dfrac{4c^2}{b^2-3a^2}=-\dfrac{25}{6}$，整理得 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{100}{49}$，

$\therefore$离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10}{7}$.

故选：C.

13．$3\sqrt{10}$

【分析】利用向量共线的坐标运算即可求出结果.

【详解】因为 $\vec{a}=(t-2,3)$，$\vec{b}=(3,-1)$，所以 $\vec{a}+2\vec{b}=(t+4,1)$，又 $(\vec{a}+2\vec{b})\parallel\vec{b}$，

所以 $(t+4)\times(-1)-3\times1=0$，解得 $t=-7$，所以 $\vec{a}=(-9,3)$，故 $|\vec{a}|=3\sqrt{10}$.

故答案为：$3\sqrt{10}$.

14．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$/$\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

【分析】

利用同角三角函数关系可求得 $\cos\alpha,\sin\beta$，代入两角和差余弦公式即可.

【详解】

$\because \alpha,\beta$ 均为锐角，$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

15．$9n+3$

【分析】

从图（1）、图（2）、图（3）、…的个数之和找到对应的数字规律.

【详解】由图，第 1 个图中有 6 个化学键和 6 个原子；

第 2 个图中有 11 个化学键和 10 个原子；