学习目标

1.学会根式与分数指数幂之间的相互转化;

2.掌握用有理数指数幂的运算性质化简求值;

3.了解无理数指数幂的意义.

知识点一 分数指数幂

思考 根据n次方根的定义和数的运算，得出以下式子，你能从中总结出怎样的规律?

①$\sqrt[5]{a^{10}}=\sqrt[5]{(a^2)^5}=a^2=a^{\frac{10}{5}}$ $(a>0)$;

②$\sqrt{a^8}=\sqrt{(a^4)^2}=a^4=a^{\frac{8}{2}}$ $(a>0)$;

③$\sqrt[4]{a^{12}}=\sqrt[4]{(a^3)^4}=a^3=a^{\frac{12}{4}}$ $(a>0)$.

答案 当根式的被开方数的指数能被根指数整除时，根式可以表示为分数指数幂的形式.

一般地，分数指数幂定义：

(1)规定正数的正分数指数幂的意义是：$a^{\frac{m}{n}}=$ $\underline{\sqrt[n]{a^m}}$ $(a>0$，m，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；

(2)规定正数的负分数指数幂的意义是：$a^{-\frac{m}{n}}=$ $\underline{\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}}$ $(a>0$，m，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；

(3)0的正分数指数幂等于__0__,0的负分数指数幂__没有意义__.

答案

知识点二　有理数指数幂的运算性质

思考　规定了分数指数幂的意义后，指数的概念就从整数指数推广到了有理数指数，那么整数指数幂的运算性质对于有理数指数幂是否还适用?

答案　由于整数指数幂，分数指数幂都有意义，因此，有理数指数幂是有意义的.

整数指数幂的运算性质，可以推广到有理数指数幂，即：

(1)$a^r a^s = a^{r+s}$($a>0$，r，$s \in \mathbf{Q}$)；

(2)$(a^r)^s = a^{rs}$($a>0$，r，$s \in \mathbf{Q}$)；

(3)$(ab)^r = a^r b^r$($a>0$，$b>0$，$r \in \mathbf{Q}$).

知识点三　无理数指数幂

一般地，无理数指数幂$a^{\alpha}(a>0$，α是无理数)是一个确定的<u>实数</u>.有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂.

类型一　根式与分数指数幂之间的相互转化

例1　用分数指数幂形式表示下列各式(式中$a>0$，$x>0$，$y>0$)：

(1)$a^2\cdot\sqrt{a}$；

解　$a^2\cdot\sqrt{a}=a^2\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{2+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}$；

(2)$a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}$；

解　$a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}=a^3\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{3+\frac{2}{3}}=a^{\frac{11}{3}}$；

(3) $\sqrt{a\sqrt{a}}$;

解 $\sqrt{a\sqrt{a}}=(a\cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$；

解析答案

(4) $\sqrt{\frac{y^2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{y}\sqrt[3]{\frac{y^6}{x^3}}}}$.

解 方法一　从里向外化为分数指数幂 $\sqrt{\frac{y^2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{y}\sqrt[3]{\frac{y^6}{x^3}}}}$

$$=\sqrt{\frac{y^2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{y}\left(\frac{y^6}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}}=\sqrt{\frac{y^2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{y}\cdot\frac{y^2}{x}}}=\sqrt{\frac{y^2}{x}(x^2\cdot y)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{y^2}{x}\cdot xy^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=y^{\frac{5}{4}}.$$

方法二　从外向里化为分数指数幂. $\sqrt{\frac{y^2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{y}\sqrt[3]{\frac{y^6}{x^3}}}}=\left(\frac{y^2}{x}\sqrt{\frac{x^3}{y}\sqrt[3]{\frac{y^6}{x^3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=\left[\frac{y^2}{x}\left(\frac{x^3}{y}\sqrt[3]{\frac{y^6}{x^3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{y^2}{x}\left[\frac{x^3}{y}\left(\frac{y^6}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{y^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x^3}{y}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{y^6}{x^3}\right)^{\frac{1}{12}}=y^{\frac{5}{4}}.$$

反思与感悟

1.根式直观，分数指数幂易运算.

2.运算化简时要注意公式的前提条件，保持式子运算前后恒等.

跟踪训练1 把下列根式化成分数指数幂:

(1) $\sqrt[6]{8\sqrt{2}}$;

解 $\sqrt[6]{8\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^{\frac{1}{2}}}=(2^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{7}{12}}$; ;

(2) $\sqrt{a\sqrt{a}}(a>0)$;

解 $\sqrt{a\sqrt{a}}=\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$;

解析答案

(3) $b^3\cdot\sqrt[3]{b^2}$;

解 $b^3\cdot\sqrt[3]{b^2}=b^3\cdot b^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{11}{3}}$;

(4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(\sqrt[5]{x^2})^2}}$.

解 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(\sqrt[5]{x^2})^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x\cdot(x^{\frac{2}{5}})^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x\cdot x^{\frac{4}{5}}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{\frac{9}{5}}}}=\dfrac{1}{(x^{\frac{9}{5}})^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{5}}}=x^{-\frac{3}{5}}$.

解析答案

类型二　用指数幂运算公式化简求值

例2　计算下列各式(式中字母都是正数)：

(1)$(0.027)^{\frac{2}{3}}+(\frac{27}{125})^{-\frac{1}{3}}-(2\frac{7}{9})^{0.5}$；

解　$(0.027)^{\frac{2}{3}}+(\frac{27}{125})^{-\frac{1}{3}}-(2\frac{7}{9})^{0.5}$

$=(\sqrt[3]{0.027})^2+\sqrt[3]{\frac{125}{27}}-\sqrt{\frac{25}{9}}=0.09+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}=0.09$；

解析答案