浙江省杭州市杭州第二中学2024年高三数学第一学期期末统考模拟试题

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0．5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用2B铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用05毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，**P**是双曲线**E**上的一点，且$|PF_2|=2|PF_1|$．若直线$PF_2$与双曲线**E**的渐近线交于点**M**，且**M**为PF_2的中点，则双曲线**E**的渐近线方程为(　　)

A．$y=\pm\frac{1}{3}x$　　B．$y=\pm\frac{1}{2}x$　　C．$y=\pm 2x$　　D．$y=\pm 3x$

2．已知正项等比数列$\{a_n\}$中，存在两项a_m,a_n，使得$\sqrt{a_m\cdot a_n}=3a_1$，$a_6=2a_5+3a_4$，则$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$的最小值是（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．2　　C．$\frac{7}{3}$　　D．$\frac{9}{4}$

3．已知整数x,y满足$x^2+y^2\le 10$，记点M的坐标为(x,y)，则点M满足$x+y\ge\sqrt{5}$的概率为（　　）

A．$\frac{9}{35}$　　B．$\frac{6}{35}$　　C．$\frac{5}{37}$　　D．$\frac{7}{37}$

4．已知正四面体的内切球体积为*v*，外接球的体积为*V*，则$\frac{V}{v}=$（　　）

A．4　　**B．8**　　**C．9**　　**D．27**

5．在精准扶贫工作中，有**6**名男干部、**5**名女干部，从中选出**2**名男干部、**1**名女干部组成一个扶贫小组分到某村工作，则不同的选法共有(　　)

A．60种　　**B．70种**　　**C．75种**　　**D．150种**

6．已知函数$f(x)=x^2-2x$，集合$A=\{x\mid f(x)\le 0\}$，$B=\left\{x\mid f'(x)\le 0\right\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．[-1,0]　　B．[-1,2]

C．$[0,1]$　　D．$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

7．若复数$z=\frac{a-i}{1+i}$在复平面内对应的点在第二象限，则实数a的取值范围是（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$(-\infty,-1)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(0,+\infty)$

8．下列函数中既关于直线$x=1$对称，又在区间$[-1,0]$上为增函数的是(　　)

A．$y=\sin\pi x$．　　　　B．$y=|x-1|$

C．$y=\cos\pi x$　　　　D．$y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$

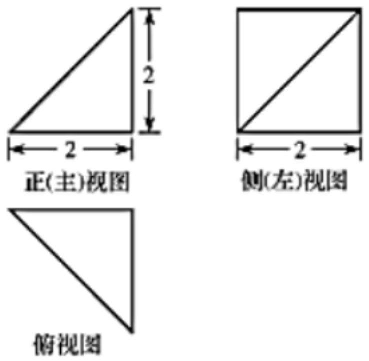
9．若$z=(3-i)(a+2i)(a\in R)$为纯虚数，则$z=$（　　）

A．$\dfrac{16}{3}i$　　B．6*i*　　C．$\dfrac{20}{3}i$　　D．20

10．已知函数$f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+x+1$且$f(a)+f(a+1)>2$，则实数$a$的取值范围是(　　)

A．$\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　　C．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

11．某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的表面积为（　　）



A．8　　B．$\dfrac{8}{3}$　　C．$8+2\sqrt{2}$　　D．$8+4\sqrt{2}$

12．已知椭圆$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$与直线$\dfrac{y}{a}-\dfrac{x}{b}=1$交于*A*，*B*两点，焦点*F*(0，-*c*)，其中*c*为半焦距，若ΔABF是直角三角形，则该椭圆的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知$x>0$，$y>0$，且$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1$，则$x+2y$的最小值是______．

14．若$\exists x_0\in\mathbf{R},x_0{}^2-a\sqrt{x_0{}^2+1}+5<0$为假，则实数$a$的取值范围为__________．

15．已知点P是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点，过点$P$的一条直线与圆$x^2+y^2=a^2+b^2$相交于$A,B$两点，若存在点$P$，使得$|PA|\cdot|PB|=a^2-b^2$，则椭圆的离心率取值范围为_________．

16．在$\triangle ABC$中，若$\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$，则$\cos^2A+\cos^2B$的范围为________．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=x^2+2x-m\ln\left(x+1\right)$，其中 $m\in R$．

（Ⅰ）若 $m>0$，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\frac{1}{e^x}$.若 $g\left(x\right)>\frac{1}{x+1}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，求实数 m 的最大值.

18．（12 分）设函数 $f\left(x\right)=2x^2+a\ln x$，（$a\in \mathrm{R}$）．

（1）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=2x+m$，求实数 **a**、**m** 的值；

（2）若 $f\left(2x-1\right)+2>2f\left(x\right)$ 对任意 $x\in\left[2,+\infty\right)$ 恒成立，求实数 **a** 的取值范围；

（3）关于 **x** 的方程 $f\left(x\right)+2\cos x=5$ 能否有三个不同的实根？证明你的结论.

19．（12 分）已知在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的焦点为 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right),F_2\left(\sqrt{3},0\right),M$ 为椭圆 C 上任意一点，且 $\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=4$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若直线 $l:y=kx+m\left(k>0,m>0\right)$ 交椭圆 C 于 P,Q 两点，且满足 $k_{PQ}^2=k_{OP}\cdot k_{OQ}$（$k_{PQ},k_{OP},k_{OQ}$ 分别为直线 PQ,OP,OQ 的斜率），求 ΔOPQ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时直线 PQ 的方程.

20．（12 分）已知函数 $f(x)=\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x,g(x)=\frac{a}{x}-1(a\in R)$（$e$ 是自然对数的底数，$e\approx 2.718\cdots$）．

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）若函数 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 在区间 $\left[4,5\right]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（3）若函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+\left(x\right)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点 x_1，$x_2\left(x_1<x_2\right)$，且 $h\left(x_1\right)<m$ 恒成立，求满足条件的 m 的最小值（极值点是指函数取极值时对应的自变量的值）．

21．（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+\cos x\left(a\in R\right)$

（1）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，证明 $f'\left(x\right)\geq 0$，在 $[0,+\infty)$ 恒成立；

（2）若 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，求 a 的取值范围.

22．（10 分）已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$．

（1）当 **a=2** 时，求不等式 $f(x)\leq 6$ 的解集；

（2）设函数 $g(x)=|2x-1|$.当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)+g(x)\ge 3$，求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由双曲线定义得$\left|PF_2\right|=4a$，$\left|PF_1\right|=2a$，OM 是$\triangle PF_1F_2$ 的中位线，可得$\left|OM\right|=a$，在$\triangle OMF_2$ 中，利用余弦定理即可建立 a,c 关系，从而得到渐近线的斜率.

【详解】

根据题意，点 P 一定在左支上.

由$\left|PF_2\right|=2\left|PF_1\right|$及$\left|PF_2\right|-\left|PF_1\right|=2a$，得$\left|PF_1\right|=2a$，$\left|PF_2\right|=4a$，

再结合 M 为 PF_2 的中点，得$\left|PF_1\right|=\left|MF_2\right|=2a$，

又因为 OM 是$\triangle PF_1F_2$ 的中位线，又$\left|OM\right|=a$，且 $OM//PF_1$，

从而直线 PF_1 与双曲线的左支只有一个交点.

在$\triangle OMF_2$ 中 $\cos\angle MOF_2=\dfrac{a^2+c^2-4a^2}{2ac}$.——①

由 $\tan\angle MOF_2=\dfrac{b}{a}$，得 $\cos\angle MOF_2=\dfrac{a}{c}$.——②

由①②，解得 $\dfrac{c^2}{a^2}=5$，即 $\dfrac{b}{a}=2$，则渐近线方程为 $y=\pm 2x$.

故选：C.

【点睛】

本题考查求双曲线渐近线方程，涉及到双曲线的定义、焦点三角形等知识，是一道中档题.

2、C

【解析】

由已知求出等比数列$\left\{a_n\right\}$的公比，进而求出 $m+n=4$，尝试用基本不等式，但 $m,n\in\mathbf{N}^*$

取不到等号，所以考虑直接取 m,n 的值代入比较即可.

【详解】

$\because a_6=2a_5+3a_4$，$\therefore q^2-2q-3=0$，$\therefore q=3$ 或 $q=-1$（舍）.

$\because \sqrt{a_m\cdot a_n}=3a_1$，$\therefore a_m\cdot a_n=a_1^2\cdot 3^{m+n-2}=9a_1^2$，$\therefore m+n=4$.

当 $m=1$，$n=3$ 时 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=\dfrac{7}{3}$；

当 $m=2$，$n=2$ 时 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=\dfrac{5}{2}$；

当 $m=3$，$n=1$ 时，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=\dfrac{13}{3}$，所以最小值为 $\dfrac{7}{3}$.

故选:C.

【点睛】

本题考查等比数列通项公式基本量的计算及最小值，属于基础题.

3、D

【解析】

列出所有圆内的整数点共有 37 个，满足条件的有 7 个，相除得到概率.

【详解】

因为 x,y 是整数，所以所有满足条件的点 $M(x,y)$ 是位于圆 $x^2+y^2=10$（含边界）内的整数点，满足条件

$x^2+y^2\le 10$ 的整数点有 $(0,0),(0,\pm1),(0,\pm2),(0,\pm3),(\pm1,0),$

$(\pm2,0),(\pm3,0),(\pm1,\pm1),(\pm2,\pm1),(\pm3,\pm1),(\pm1,\pm2),(\pm2,\pm2),(\pm1,\pm3)$ 共 37 个，

满足 $x+y\ge\sqrt{5}$ 的整数点有 7 个，则所求概率为 $\dfrac{7}{37}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查了古典概率的计算，意在考查学生的应用能力.

4、D

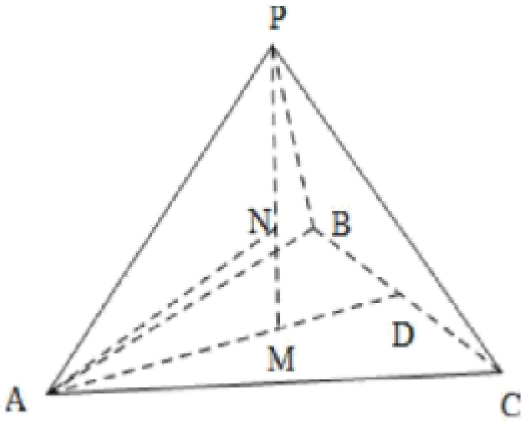
【解析】

设正四面体的棱长为 1，取 BC 的中点为 D，连接 AD，作正四面体的高为 PM，首先求出正四面体的体积，再利用等体法求出内切球的半径，在 $Rt\Delta AMN$ 中，根据勾股定理求出外接球的半径，利用球的体积公式即可求解.

【详解】

设正四面体的棱长为 1，取 BC 的中点为 D，连接 AD，

作正四面体的高为 PM，



则 $AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, AM=\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore PM=\sqrt{PA^2-AM^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$，

设内切球的半径为 r，内切球的球心为 O，

则 $V_{P-ABC}=4V_{O-ABC}=4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}r$，

解得：$r=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$；

设外接球的半径为 R，外接球的球心为 N，

则 $|MN|=|PM-R|$ 或 $|R-PM|$，$AN=R$，

在 $Rt\Delta AMN$ 中，由勾股定理得：

$AM^2+MN^2=AN^2$，

$\therefore \dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}-R\right)^2=R^2$，解得 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore \dfrac{R}{r}=3$，

$\therefore \dfrac{V}{v}=\dfrac{R^3}{r^3}=27$

故选：**D**

【点睛】

本题主要考查了多面体的内切球、外接球问题，考查了椎体的体积公式以及球的体积公式，需熟记几何体的体积公式，属于基础题.

5、C

【解析】

根据题意，分别计算“从 6 名男干部中选出 2 名男干部”和“从 5 名女干部中选出 1 名女干部”的取法数，由分步计数原理计算可得答案.

【详解】

解：根据题意，从 6 名男干部中选出 2 名男干部，有 $C_6^2=15$ 种取法，

从 5 名女干部中选出 1 名女干部，有 $C_5^1=5$ 种取法，

则有 $15\times5=75$ 种不同的选法；

故选：C.

【点睛】

本题考查排列组合的应用，涉及分步计数原理问题，属于基础题.

6、C

【解析】

分别求解不等式得到集合 A,B,再利用集合的交集定义求解即可.

【详解】

$A=\{x\mid x^2-2x\le0\}=\{x\mid 0\le x\le2\}$, $B=\{x\mid 2x-2\leqslant0\}=\{x\mid x\leqslant1\}$，

$\therefore A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant1\}$.

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了集合的基本运算,难度容易.

7、B

【解析】

复数 $z=\dfrac{a-i}{1+i}=\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{a+1}{2}i$，在复平面内对应的点在第二象限，可得关于 a 的不等式组，解得 a 的范围.

【详解】

$z=\dfrac{a-i}{1+i}=\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{a+1}{2}i$，

由其在复平面对应的点在第二象限，

得$\begin{cases} a-1<0 \\ a+1<0 \end{cases}$，则$a<-1$.

故选：B.

【点睛】

本题考查了复数的运算法则、几何意义、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

8、C

【解析】

根据函数的对称性和单调性的特点，利用排除法，即可得出答案.

【详解】

A 中，当 $x=1$ 时，$y=\sin \pi x=0\neq 1$，所以 $y=\sin \pi x$ 不关于直线 $x=1$ 对称，则 A 错误；

B 中，$y=\left|x-1\right|=\begin{cases} x-1,\left(x\geq 1\right) \\ -x+1,\left(x<1\right) \end{cases}$，所以在区间 $[-1,0]$ 上为减函数，则 B 错误；

D 中，$y=f\left(x\right)=e^{x}+e^{-x}$，而 $f\left(0\right)=2, f\left(2\right)=e^{2}+e^{-2}$，则 $f\left(0\right)\neq f\left(2\right)$，所以 $y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ 不关于直线 $x=1$ 对称，则 D 错误；

故选：C.

【点睛】

本题考查函数基本性质，根据函数的解析式判断函数的对称性和单调性，属于基础题.

9、C

【解析】

根据复数的乘法运算以及纯虚数的概念，可得结果.

【详解】

$z=\left(3-i\right)\left(a+2i\right)=3a+2+\left(6-a\right)i$

$\because z=\left(3-i\right)\left(a+2i\right)\left(a\in R\right)$ 为纯虚数，

$\therefore 3a+2=0$ 且 $6-a\neq 0$

得 $a=-\dfrac{2}{3}$，此时 $z=\dfrac{20}{3}i$

故选：*C*.

【点睛】

本题考查复数的概念与运算，属基础题.

10、B

【解析】

构造函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-1$，判断出 $F\left(x\right)$ 的单调性和奇偶性，由此求得不等式 $f\left(a\right)+f\left(a+1\right)>2$ 的解集.

【详解】

构造函数$F\left(x\right)=f\left(x\right)-1=\ln\frac{1+x}{1-x}+x$，由$\frac{1+x}{1-x}>0$解得$-1<x<1$，所以$F\left(x\right)$的定义域为$\left(-1,1\right)$，且

$F\left(-x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}-x=-\ln\frac{1-x}{1+x}-x=-\left(\ln\frac{1-x}{1+x}+x\right)=-F\left(x\right)$，所以$F\left(x\right)$为奇函数，而

$F\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x=\ln\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)+x$，所以$F\left(x\right)$在定义域上为增函数，且$F\left(0\right)=\ln1+0=0$.由

$f\left(a\right)+f\left(a+1\right)>2$得$f\left(a\right)-1+f\left(a+1\right)-1>0$，即$F\left(a\right)+F\left(a+1\right)>0$，所以$\begin{cases}a+a+1>0\\-1<a<1\\-1<a+1<1\end{cases}\Rightarrow-\frac{1}{2}<a<0$.

故选：**B**

【点睛】

本小题主要考查利用函数的单调性和奇偶性解不等式，属于中档题.

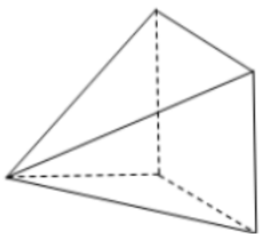
11、**D**

【解析】

根据三视图还原几何体为四棱锥，即可求出几何体的表面积.

【详解】

由三视图知几何体是四棱锥，如图，



且四棱锥的一条侧棱与底面垂直，四棱锥的底面是正方形,边长为**2**,棱锥的高为**2**，

所以$S=2\times2+2\times\frac{1}{2}\times2\times2+2\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}$，

故选：D

【点睛】

本题主要考查了由三视图还原几何体，棱锥表面积的计算，考查了学生的运算能力，属于中档题.

12、**A**

【解析】

联立直线与椭圆方程求出交点 ***A***，***B*** 两点，利用平面向量垂直的坐标表示得到关于a,b,c的关系式，解方程求解即可.

【详解】

联立方程$\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\\ \dfrac{y}{a}-\dfrac{x}{b}=1\end{cases}$，解方程可得$\begin{cases}x=0\\y=a\end{cases}$或$\begin{cases}x=-b\\y=0\end{cases}$，

不妨设**$A(0，a)$，$B(-b，0)$**，由题意可知，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}$**=0**，

因为$\overrightarrow{BA}=(b,a)$，$\overrightarrow{BF}=(b,-c)$，

由平面向量垂直的坐标表示可得，$b\cdot b-ac=0$，

因为$b^2=a^2-c^2$，所以 **$a^2-c^2=ac$**，

两边同时除以a^2可得，$e^2+e-1=0$，

解得 **$e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$**或$e=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$（舍去），

所以该椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选：**A**

【点睛】

本题考查椭圆方程及其性质、离心率的求解、平面向量垂直的坐标表示；考查运算求解能力和知识迁移能力；利用平面向量垂直的坐标表示得到关于a,b,c的关系式是求解本题的关键；属于中档题、常考题型.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、**8**

【解析】

由整体代入法利用基本不等式即可求得最小值.

【详解】

$$x+2y=(x+2y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}+2\geq 4+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}=8,$$

当且仅当$\dfrac{x}{y}=\dfrac{4y}{x}$时等号成立.

故$x+2y$的最小值为**8**，

故答案为：**8.**

【点睛】