学习目标

1.理解幂函数的概念；

2.学会以简单的幂函数为例研究函数性质的方法；

3.理解和掌握幂函数在第一象限的分类特征，能运用数形结合的方法处理幂函数有关问题.

知识点一 幂函数的概念

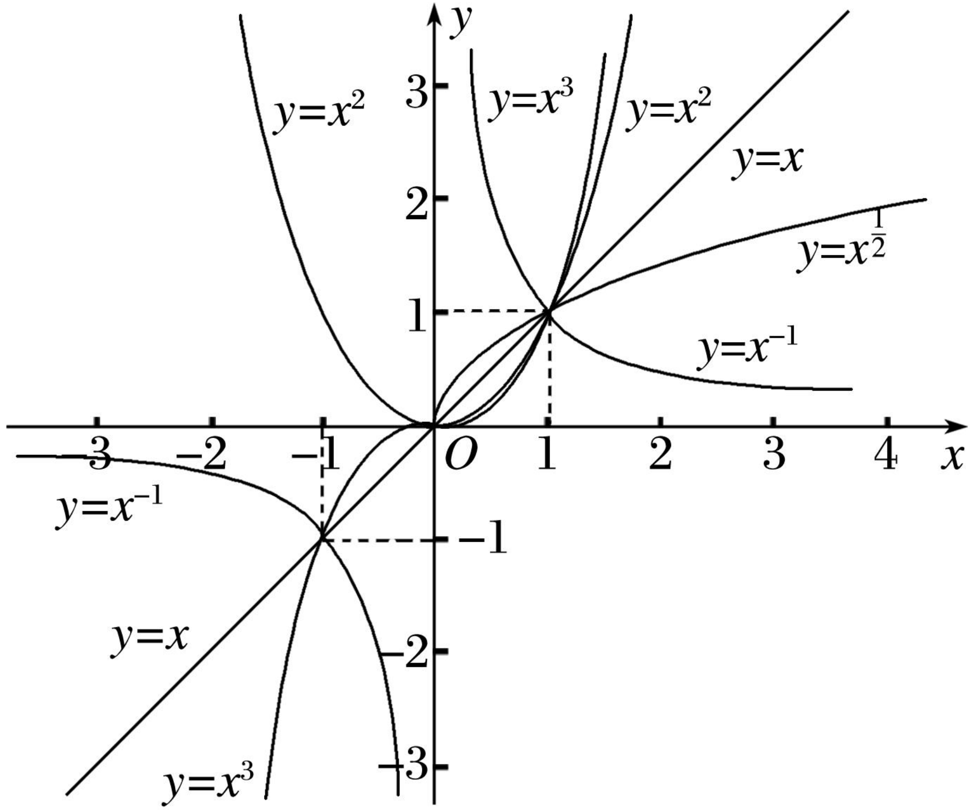
思考 $y=\frac{1}{x}$，$y=x$，$y=x^2$三个函数有什么共同特征?

答案 底数为x，指数为常数.

一般地，函数$y=x^{\alpha}$叫做幂函数，其中x是自变量，α是常数.

知识点二　幂函数的图象与性质

思考　如图在同一坐标系内作出函数(1)$y=x$；(2)$y=x^{\frac{1}{2}}$；(3)$y=x^2$；(4)$y=x^{-1}$；(5)$y=x^3$的图象.



填写下表:

	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域	**R**	**R**	**R**	$[0,+\infty)$	$\{x\|x\neq 0\}$
值域	**R**	$[0,+\infty)$	**R**	$[0,+\infty)$	$\{y\|y\neq 0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	在$[0,+\infty)$上增，在$(-\infty,0]$上减	增	增	在$(0,+\infty)$上减；在$(-\infty,0)$上减

答案

根据上表，可以归纳一般幂函数特征：

(1)所有的幂函数在$(0，+\infty)$上都有定义，并且图象都过点$(1,1)$；

(2)$\alpha>0$时，幂函数的图象通过原点，并且在区间$[0，+\infty)$上是增函数.

特别地，当$\alpha>1$时，幂函数的图象下凸；当$0<\alpha<1$时，幂函数的图象___；

(3)上凸______时，幂函数的图象在区间$(0，+\infty)$上是减函数；

(4)$\alpha<0$ 幂指数互为倒数的幂函数在第一象限内的图象关于直线$y=x$对称；

(5)在第一象限，作直线$x=a(a>1)$，它同各幂函数图象相交，按交点从下到上的顺序，幂指数按从___到_____的顺序排列.

小　　大

答案　返回

类型一　幂函数的概念

例1　已知 $y=(m^2+2m-2)x^{m^2-1}+2n-3$ 是幂函数，求m，n的值.

解　由题意得$\begin{cases} m^2+2m-2=1, \\ m^2-1\neq 0, \\ 2n-3=0, \end{cases}$

解得$\begin{cases} m=-3, \\ n=\dfrac{3}{2}, \end{cases}$

所以 $m=-3$，$n=\dfrac{3}{2}$.

幂函数与指数函数、对数函数的定义类似，只有满足函数解析式右边的系数为 1，底数为自变量 x，指数为一常数这三个条件，才是幂函数.如：

$y=3x^2$，$y=(2x)^3$，$y=\left(\frac{x}{2}\right)^4$都不是幂函数.

跟踪训练 1 在函数 $y=\frac{1}{x^2}$, $y=2x^2$, $y=x^2+x$, $y=1$ 中，幂函数的个数为(B)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

解析 $\because y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$，所以是幂函数；

$y=2x^2$由于出现系数2，因此不是幂函数；

$y=x^2+x$是两项和的形式，不是幂函数；$y=1=x^0(x\neq 0)$，可以看出，

常函数$y=1$的图象比幂函数$y=x^0$的图象多了一个点$(0,1)$，

所以常函数$y=1$不是幂函数.

类型二　幂函数的图象及应用

例 2　若点$(\sqrt{2}, 2)$在幂函数$f(x)$的图象上，点$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$在幂函数$g(x)$的图象上，问当$x$为何值时，(1)$f(x)>g(x)$；(2)$f(x)=g(x)$；(3)$f(x)<g(x)$.

解 设$f(x)=x^{\alpha}$，因为点$(\sqrt{2}, 2)$在幂函数$f(x)$的图象上，

所以，将点$(\sqrt{2}, 2)$代入$f(x)=x^{\alpha}$中，得$2=(\sqrt{2})^{\alpha}$，解得$\alpha=2$，

则$f(x)=x^2$.同理可求得$g(x)=x^{-2}$.

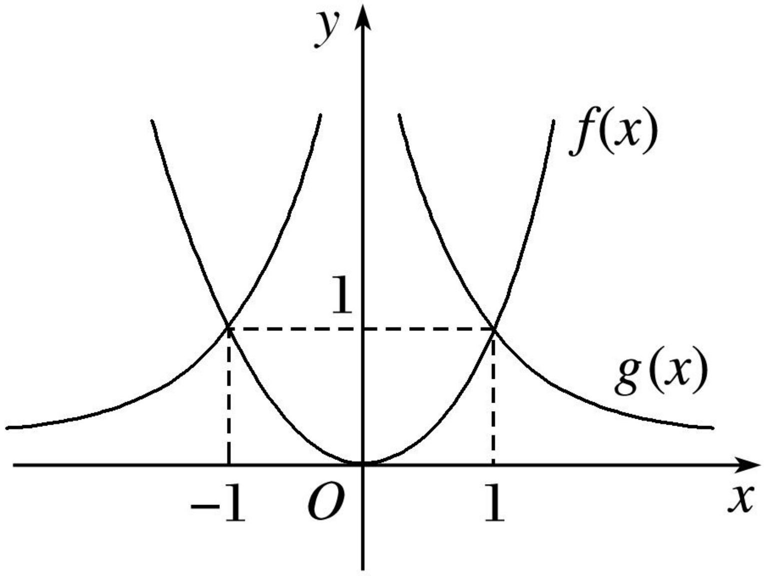
在同一坐标系里作出函数$f(x)=x^2$和$g(x)=x^{-2}$的图象(如图所示)，

观察图象可得:

(1)当$x>1$或$x<-1$时，$f(x)>g(x)$；

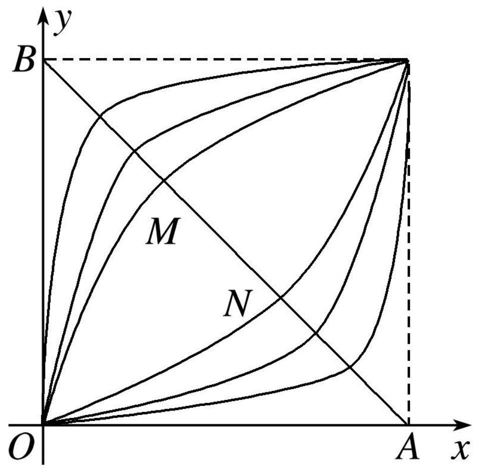
(2)当$x=1$或$x=-1$时，$f(x)=g(x)$；

(3)当$-1<x<1$且$x\neq 0$时，$f(x)<g(x)$.



注意本题中对$f(x) > g(x)$，$f(x) = g(x)$的几何解释.这种几何解释帮助我们从图形角度解读不等式方程，是以后常用的方法.

跟踪训练2 幂函数$y=x^{\alpha}(\alpha\neq0)$，当$\alpha$取不同的正数时，在区间[0,1]上它们的图象是一簇美丽的曲线(如图).设点$A(1,0)$，$B(0,1)$，连接AB，线段AB恰好被其中的两个幂函数$y=x^{\alpha}$，$y=x^{\beta}$的图象三等分，即有$BM=MN=NA$.那么$\alpha\beta$等于(A)



A.1　　B.2　　C.3　　D.无法确定

解析 由条件知，$M(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$、$N(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$，

$\therefore \frac{1}{3}=(\frac{2}{3})^{\alpha}$，$\frac{2}{3}=(\frac{1}{3})^{\beta}$，

$\therefore (\frac{1}{3})^{\alpha\beta}=[(\frac{1}{3})^{\beta}]^{\alpha}=(\frac{2}{3})^{\alpha}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \alpha\beta=1$.故选A.