学习目标

1.掌握对数型复合函数单调区间的求法及单调性的判定方法；

2.掌握对数型复合函数奇偶性的判定方法；

3.会解简单的对数不等式；

4.了解反函数的概念及它们的图象特点.

知识点一 $y=\log_a f(x)$型函数的单调区间

思考 我们知道$y=2^{f(x)}$的单调性与$y=f(x)$的单调性相同，那么$y=\log_2 f(x)$的单调区间与$y=f(x)$的单调区间相同吗?

答案 $y=\log_2 f(x)$与$y=f(x)$的单调区间不一定相同，因为$y=\log_2 f(x)$的定义域与$y=f(x)$定义域不一定相同.

一般地，形如函数$f(x)=\log_a g(x)$的单调区间的求法：①先求$g(x)>0$的解集(也就是函数的定义域)；②当底数a大于1时，$g(x)>0$限制之下$g(x)$的单调增区间是$f(x)$的单调增区间，$g(x)>0$限制之下$g(x)$的单调减区间是$f(x)$的单调减区间；③当底数a大于0且小于1时，$g(x)>0$限制之下$g(x)$的单调区间与$f(x)$的单调区间正好相反.

知识点二　对数不等式的解法

思考　$\log_2 x < \log_2 3$等价于$x < 3$吗?

答案　不等价.$\log_2 x < \log_2 3$成立的前提是$\log_2 x$有意义，即$x > 0$,

$\therefore \log_2 x < \log_2 3 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

一般地，对数不等式的常见类型：

当$a>1$时，

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0(\text{可省略}),\\ g(x)>0,\\ f(x)>g(x);\end{cases}$$

当$0<a<1$时，

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0(\text{可省略}),\\ f(x)<g(x).\end{cases}$$

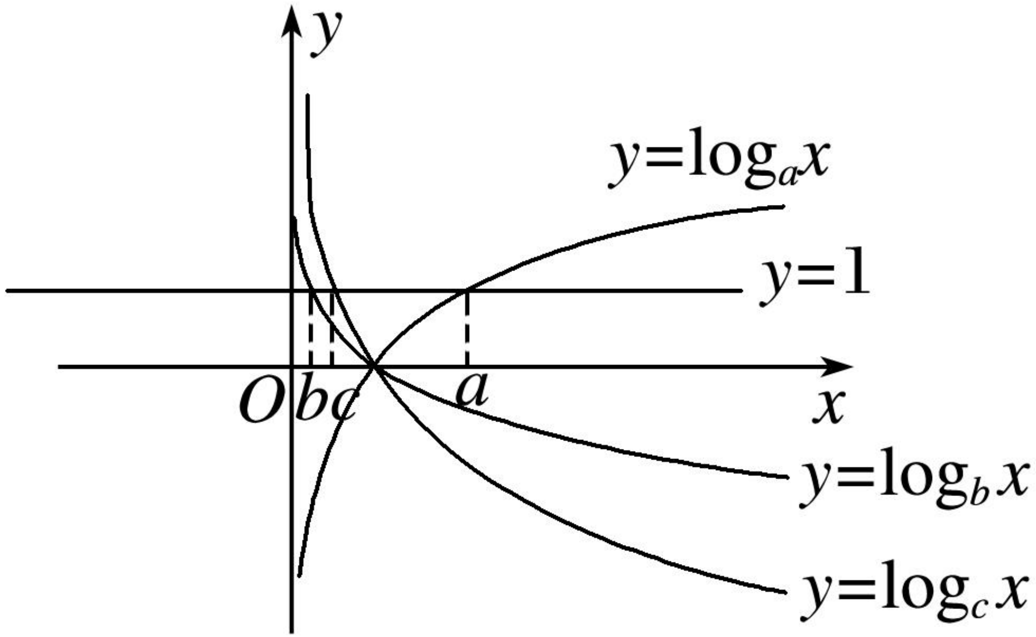
知识点三　不同底的对数函数图象相对位置

思考　$y=\log_2 x$与$y=\log_3 x$同为$(0，+\infty)$上的增函数，都过点$(1,0)$，怎样区分它们在同一坐标系内的相对位置?

答案　可以通过描点定位，也可令$y=1$，对应x值即底数.

答案

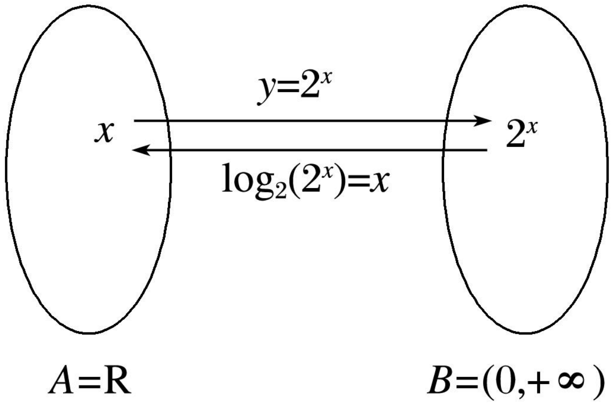
一般地，对于底数$a>1$的对数函数，在$(1，+\infty)$区间内，底数越大越靠近x轴；对于底数$0<a<1$的对数函数，在$(1，+\infty)$区间内，底数越小越靠近x轴.



知识点四　反函数的概念

思考　如果把$y=2^x$视为$A=\mathbf{R}\to B=(0,+\infty)$的一个映射，那么$y=\log_2x$是从哪个集合到哪个集合的映射?

答案　如图，$y=\log_2x$是从$B=(0,+\infty)$到$A=\mathbf{R}$的一个映射，相当于A中元素通过f：$x\to2^x$对应B中的元素2^x，$y=\log_2x$的作用是B中元素2^x原路返回对应A中元素x.



答案

一般地，像$y=a^x$与$y=\log_a x(a>0$且$a\neq1)$这样的两个函数叫做互为反函数.

(1)$y=a^x$的定义域为**R**，就是$y=\log_a x$的值域，而$y=a^x$的值域$(0,+\infty)$就是$y=\log_a x$的定义域.

(2)互为反函数的两个函数$y=a^x(a>0$，且$a\neq1)$与$y=\log_a x(a>0，a\neq1)$的图象关于直线$y=x$对称.

(3)互为反函数的两个函数的单调性相同.

类型一　对数型复合函数的单调性

例1　求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+1)$ 的值域和单调区间.

解 设$t=-x^2+2x+1$，则$t=-(x-1)^2+2$.

$\because$ $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 为减函数，且$0<t\leqslant 2$，

$\therefore y=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$，即函数的值域为$[-1,+\infty)$.

再由函数$\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+1)$的定义域为$-x^2+2x+1>0$，即$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$.

$\therefore t=-x^2+2x+1$ 在$(1-\sqrt{2},1)$上递增而在$[1,1+\sqrt{2}]$上递减，而$y=\log_{\frac{1}{2}}t$为减函数.

$\therefore$函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+1)$的增区间为$[1,1+\sqrt{2}]$，减区间为$(1-\sqrt{2},1)$.

反思与感悟

求复合函数的单调性要抓住两个要点：(1)单调区间必须是定义域的子集，哪怕一个端点都不能超出定义域；(2)$f(x)$，$g(x)$单调性相同，则$f(g(x))$为增函数；$f(x)$，$g(x)$单调性相异，则$f(g(x))$为减函数，简称“同增异减”．

跟踪训练1 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)$.

(1)求函数$f(x)$的值域;

解 由题意得$-x^2+2x>0$，$\therefore x^2-2x<0$，

$\therefore 0<x<2$.

当$0<x<2$时，$y=-x^2+2x=-(x^2-2x)\in(0,1]$，

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)\geq\log_{\frac{1}{2}}1=0$.

$\therefore$函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)$ 的值域为$[0，+\infty)$.

解析答案

(2)求$f(x)$的单调性.

解 设$u=-x^2+2x(0<x<2)$，$v=\log_{\frac{1}{2}}u$,

∵函数$u=-x^2+2x$在$(0,1)$上是增函数，在$(1,2)$上是减函数$v=\log_{\frac{1}{2}}u$ 是减函数，

∴由复合函数的单调性得到函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)$在$(0,1)$上是减函数，在$(1,2)$上是增函数.

类型二　对数型复合函数的奇偶性

例 2　判断函数 $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$的奇偶性.