学习目标

1.掌握积、商、幂的对数运算性质，理解其推导过程和成立条件；

2.掌握换底公式及其推论；

3.能熟练运用对数的运算性质进行化简求值.

问题导学　题型探究　达标检测

知识点一　对数运算性质

思考　有了乘法口诀，我们就不必把乘法还原成为加法来计算.那么，有没有类似乘法口诀的东西，使我们不必把对数式还原成指数式就能计算?

答案　有.例如，设$\log_a M=m$，$\log_a N=n$，则$a^m=M$，$a^n=N$，

$\therefore MN=a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，

$\therefore \log_a(MN)=m+n=\log_a M+\log_a N$.

得到的结论$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$可以当公式直接进行对数运算.

一般地，如果$a>0$，且$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，那么：

(1)$\log_a(M\cdot N)=$ $\underline{\log_a M+\log_a N}$；

(2)$\mathrm{Log}_a\dfrac{M}{N}=$ $\underline{\log_a M-\log_a N}$；

(3)$\log_a M^n=$ $\underline{n\log_a M}$$(n\in\mathbf{R})$.

答案

知识点二　换底公式

思考　假设$\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=x$，则 $\log_2 5=x\log_2 3$，即 $\log_2 5=\log_2 3^x$，从而有 $3^x=5$，再化为对数式可得到什么结论?

答案　把 $3^x=5$ 化为对数式为：$\log_3 5=x$，

又因为 $x=\frac{\log_2 5}{\log_2 3}$，所以得出 $\log_3 5=\frac{\log_2 5}{\log_2 3}$的结论.

答案

一般地，对数换底公式：

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}(a>0，且 a\neq1，b>0，c>0，且 c\neq1)$；

特别地：$\log_a b\cdot\log_b a=\underline{1}(a>0，且 a\neq1，b>0，且 b\neq1)$.

类型一　积商幂的对数运算

例 1　化简 $\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解　$\because \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}>0$ 且 $x^2>0$，$\sqrt{y}>0$，$\therefore y>0$，$z>0$.

$$\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}=\log_a(x^2\sqrt{y})-\log_a\sqrt[3]{z}$$

$$=\log_a x^2+\log_a\sqrt{y}-\log_a\sqrt[3]{z}$$

$$=2\log_a|x|+\frac{1}{2}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a z.$$

使用公式要注意成立条件，$\log_2(-3)(-5)=\log_2(-3)+\log_2(-5)$是不成立的.$\log_{10}(-10)^2=2\log_{10}(-10)$是不成立的.要特别注意$\log_a(MN)\neq\log_aM\cdot\log_aN$，$\log_a(M\pm N)\neq\log_aM\pm\log_aN$.

跟踪训练 1　已知 $y>0$，化简 $\log_a \frac{\sqrt{x}}{yz}$.

解　$\because \frac{\sqrt{x}}{yz}>0$，$y>0$，$\therefore x>0$，$z>0$.

$\therefore \log_a \frac{\sqrt{x}}{yz} = \log_a \sqrt{x} - \log_a (yz)$

$= \frac{1}{2}\log_a x - \log_a y - \log_a z$.

解析答案

类型二　换底公式

例 2　(1)若 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，求证：$\log_{a^n}M=\frac{1}{n}\log_aM$.

解　$\log_{a^n}M=\frac{\log_aM}{\log_aa^n}=\frac{\log_aM}{n\log_aa}=\frac{1}{n}\log_aM$.

(2)已知$\log_{18}9=a, 18^b=5$，求$\log_{36}45$.

解　方法一　$\because \log_{18}9=a, 18^b=5$，

$\therefore \log_{18}5=b$，

于是 $\log_{36}45=\dfrac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\dfrac{\log_{18}(9\times5)}{\log_{18}(18\times2)}=\dfrac{\log_{18}9+\log_{18}5}{1+\log_{18}2}$

$=\dfrac{a+b}{1+\log_{18}\frac{18}{9}}=\dfrac{a+b}{2-a}$.

方法二　$\because \log_{18}9=a, 18^b=5$，　$\therefore \log_{18}5=b$，

于是 $\log_{36}45=\dfrac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\dfrac{\log_{18}(9\times5)}{\log_{18}(18\times2)}$

$$=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{2\log_{18}18-\log_{18}9}=\frac{a+b}{2-a}.$$

方法三　$\because \log_{18}9=a, 18^{b}=5$，

$\therefore \lg 9=a\lg 18$，$\lg 5=b\lg 18$，

$$\therefore \log_{36}45=\frac{\lg 45}{\lg 36}=\frac{\lg(9\times 5)}{\lg\frac{18^2}{9}}=\frac{\lg 9+\lg 5}{2\lg 18-\lg 9}$$

$$=\frac{a\lg 18+b\lg 18}{2\lg 18-a\lg 18}=\frac{a+b}{2-a}.$$