专题1 圆锥曲线的方程与轨迹方程

一、考情分析

求圆锥曲线的方程, 一般出现在圆锥曲线解答题的第(1)问, 多用待定系数法, 通过解方程确定待定系数, 考查频率非常高, 也比较容易得分;求圆锥曲线的轨迹方程一般用定义法, 有时可用到直接法、相关点法、交轨法等, 难度一般中等或中等以下.

二、解题秘籍

(一)用待定系数法求圆锥曲线的方程

1. 求椭圆标准方程的基本方法是待定系数法, 具体过程是先定形, 再定量, 即首先确定焦点所在位置, 然后再根据条件建立关于 a,b 的方程组. 如果焦点位置不确定, 要考虑是否有两解, 有时为了解题方便, 也可把椭圆方程设为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$ 的形式.

2. 双曲线标准方程的形式, 注意焦点 F_1,F_2 的位置是双曲线定位的条件, 它决定了双曲线标准方程的类型. “焦点跟着正项走”, 若 x^2 项的系数为正, 则焦点在 x 轴上; 若 y^2 项的系数为正, 那么焦点在 y 轴上. 确定方程的形式后, 然后再根据 a,b,c,e 及渐近线之间的关系, 求出 a,b 的值, 当双曲线焦点的位置不确定时, 为了避免讨论焦点的位置, 常设双曲线方程为 $Ax^2+By^2=1(A\cdot B<0)$, 这样可以简化运算.

3. 如果已知双曲线的渐近线方程 $y=\pm\dfrac{b}{a}x(a>0,b>0)$, 求双曲线的标准方程, 可设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$, 再由条件求出 λ 的值即可. 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 有共同渐近线的方程可表示 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$.

4. 利用待定系数法求抛物线的标准方程的步骤

   (1) 依据条件设出抛物线的标准方程的类型.

   (2) 求参数 p 的值.

   (3) 确定抛物线的标准方程.

【例1】(2023届山西省长治市高三上学期质量检测) 已知点 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上, 且点 P 到椭圆右顶点 M 的距离为 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若点 A,B 是椭圆 C 上不同的两点(均异于 M)且满足直线 MA 与MB斜率之积为 $\dfrac{1}{4}$. 试判断直线 AB 是否过定点, 若是, 求出定点坐标, 若不是, 说明理由.

【例2】(2023届广东省开平市忠源纪念中学高三阶段性检测) 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 点 $A(6,4)$ 在 C 上.

(1) 求双曲线 C 的方程.

(2) 设过点 $B(1,0)$ 的直线 l 与双曲线 C 交于 D,E 两点, 问在 x 轴上是否存在定点 P, 使得 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}$ 为常数? 若存在, 求出点 P 的坐标以及该常数的值; 若不存在, 请说明理由.

【例3】(2023届甘肃省张掖市高三上学期诊断) 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>1)$ 上的点 $P(x_0,1)$ 到其焦点 F 的距离为 $\frac{5}{4}$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 点 $E(t,4)$ 在抛物线 C 上, 过点 $D(0,2)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)(y_1>0,y_2>0)$ 两点, 点 H 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 AH 分别与直线 OE,OB 交于点 M,N(O 为坐标原点), 求证: $|AM|=|MN|$.

(二) 直接法求曲线轨迹方程

1. 直接法求曲线方程的关键就是把几何条件或等量关系翻译为代数方程, 要注意翻译的等价性. 通常将步骤简记为建系、设点、列式、代换、化简、证明这几个步骤, 但最后的证明可以省略.
2. 求出曲线的方程后还需注意检验方程的纯粹性和完备性.
3. 对方程化简时, 要保证前后方程解集相同, 必要时可说明 x,y 的取值范围.

【例4】设动点 M 在直线 $y=0$ 和 $y=-2$ 上的射影分别为点 N 和 R, 已知 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{OM}^2$, 其中 O 为坐标原点.

(1) 求动点 M 的轨迹 E 的方程;

(2) 过直线 $x-y-2=0$ 上的一点 P 作轨迹 E 的两条切线 PA 和 PB(A,B 为切点), 求证: 直线 AB 经过定点.