MUBIAODINGWEI 我明白

目标定位

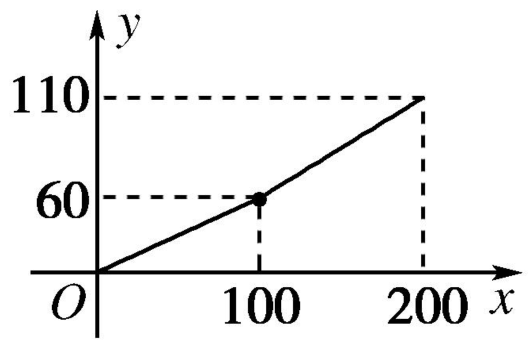
[学习目标]	[特别关注]
1.掌握常见增长函数的定义、图象、性质，并体会其增长快慢. 2.理解直线上升，对数增长，指数爆炸的含义. 3.会分析具体的实际问题，建模解决实际问题. 4.培养对数学模型的应用意识.	1.比较函数值的大小．(重点) 2.三种函数模型的性质比较．(易混点) 3.利用几种简单函数模型求解应用题．(难点)

启动思维

1．对数函数 $f(x)=\log_2 x$，在其定义域 $\underline{(0，+\infty)}$ 上是 $\underline{\text{增}}$ (填“增”或“减”)函数．

2．已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称，则满足 $f(x)>1$ 的 x 的取值范围为 $\underline{(0，+\infty)}$．

3．某地的水电资源丰富，并且得到了电费y(元)与用电量x(度)之间的函数关系如图所示：则月用电量为100度时，应交电费__60__元．



走进教材

1．三种函数模型的性质

函数 / 性质	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=x^n(n>0)$
在$(0，+\infty)$上的增减性	增函数	增函数	增函数
增长的速度	越来越快	越来越慢	相对平稳
图象的变化	随x增大逐渐与y轴平行	随x增大逐渐与x轴平行	随n值而不同

2.三种函数的增长速度比较

(1)在区间(0，＋∞)上，函数$y=a^x(a>1)$，$y=\log_a x(a>1)$和$y=x^n(n>0)$都是<u>增函数</u>，但<u>增长速度</u>不同，且不在同一个“档次”上.

(2)随着x的增大，$y=a^x(a>1)$增长速度越来越快，会超过并远远大于$y=x^n(n>0)$的增长速度，而$y=\log_a x(a>1)$的增长速度<u>相对平稳</u>.

(3)存在一个x_0，当$x>x_0$时，有<u>$ax_0>x_0^n>\log_a x_0$</u>.

自主练习

1．某动物数量y(只)与时间x(年)的关系为$y=a\log_3(x+1)$，设第二年有100只，则到第八年它们发展到(　　)

A．200只　　B．400只

C．500只　　D．600只

解析： 由已知第二年有100只，得$100=a\log_3 3$，

$\therefore a=100$，将$a=100$，$x=8$代入得

$y=100\times\log_3(8+1)=200$.故选A.

答案： A

2．当x越来越大时，下列函数中，增长速度最快的应该是(　　)

A．$y=100x$　　B．$y=\log_{100}x$

C．$y=x^{100}$　　D．$y=100^x$

解析：　由于指数函数的增长是爆炸式的，则当x越来越大时，函数$y=100^x$的增长速度最快．

答案：　D

3．某工厂8年来某种产品的总产量C与时间t(年)的函数关系如图所示．

以下四种说法：

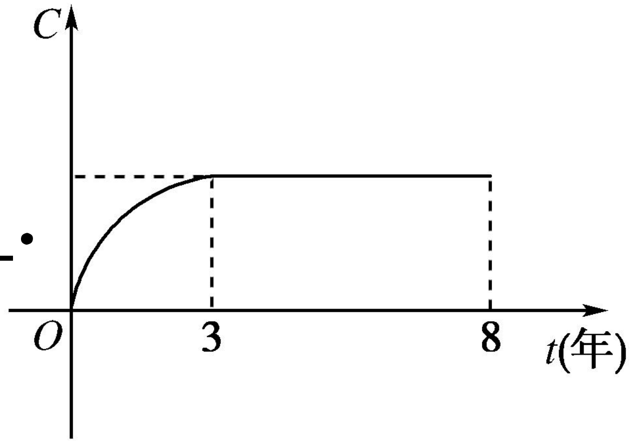
①前三年产量增长的速度越来越快；

②前三年产量增长的速度越来越慢；

③第三年后这种产品停止生产；

④第三年后产量保持不变．

其中说法正确的序号是____________．



解析： 由$t\in[0,3]$的图象联想到幂函数$y=x^{\alpha}(0<\alpha<1)$，反映了C随时间的变化而逐渐增长但速度越来越慢．由$t\in[3,8]$的图象可知，总产量C没有变化，即第三年后停产，所以②③正确．

答案： ②③

4．下面给出几种函数随x取值而得到的函数值列表：

x	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	…
$y=2^x$	1.149	1.516	2	2.639	3.482	4.595	6.063	8	10.556	…
$y=x^2$	0.04	0.36	1	1.96	3.24	4.84	6.76	9	11.56	…
$y=\log_2 x$	−2.322	−0.737	0	0.485	0.848	1.138	1.379	1.585	1.766	…

问：(1)各函数随着x的增大，函数值有什么共同的变化趋势？

(2)各函数增长的快慢有什么不同？

解析： (1)随着x的增大，各函数的函数值都增大.

(2)$y=2^x$开始增长的速度较慢，但随着x的增大，y增长速度越来越快；$y=x^2$增长速度平衡；$y=\log_2 x$开始增长速度稍快，但随x增大，y增长速度越来越慢.

典例导航

题型一 函数模型的应用

例1 某文具店出售软皮本和精美铅笔，软皮本每本2元，铅笔每支0.5元．该店推出两种优惠方法：(1)买一本软皮本赠送一支精美铅笔；(2)按总价的92%付款．现要买软皮本4本，铅笔若干(不少于4支)，若购买铅笔数为x(支)，支付款为y(元)，试分别建立两种优惠方法中，y与x之间的函数关系式，并说明哪种优惠方式更合算．

思路点拨

建立函数关系式 → 列不等式求解 → 比较支付款y的大小 → 选择最合算的优惠方法

规范解答	名师指津
由优惠方式(1)得到 y 与 x 的函数关系式为:$y_1=2\times4+0.5(x-4)$①	①由于第(1)种优惠方式是买一本软皮本赠送一本铅笔，则买软皮本4本，可送4支铅笔，故付款时仅需付4本软皮本的钱 2×4 和 $(x-4)$ 支铅笔的钱 $0.5(x-4)$ 即可.
$=0.5x+6(x\geqslant4$，且 $x\in\mathbf{N}^*)$②	②函数解析式还包括定义域，本题中铅笔购买量只能是正整数，且不少于4支.
由优惠方式(2)得到 y 与 x 的函数关系式为: $y_2=(0.5x+2\times4)\times92\%$③ $=0.46x+7.36(x\geqslant4$，且 $x\in\mathbf{N}^*)$	③优惠方式(2)是按总价的92%支付，总价为铅笔钱 $0.5x$ +软皮钱 2×4，支付款 $y=(0.5x+2\times4)\times92\%$.
令 $y_1<y_2$，④ 即 $0.5x+6<0.46x+7.36$， 解得 $4\leqslant x<34$.	④哪种优惠方式更合算，即比较哪种方式付款较少，转化为比较 y_1 与 y_2 的大小，解不等式.
则当购买铅笔数少于34支(不少于4支)时，第(1)种优惠方式合算.⑤ 令 $y_1>y_2$，即 $0.5x+6>0.46x+7.36$， 解得 $x>34$. 则当购买铅笔数多于34支时，第(2)种优惠方式更合算. 当 $x=34$ 时，$y_1=y_2$，则当购买铅笔数为34支时，两种方式一样合算.	⑤解不等式之后，要回归原题.

[题后感悟]　(1)解答函数应用题，要分四步进行：

①阅读，理解题意，引入变量x，y.

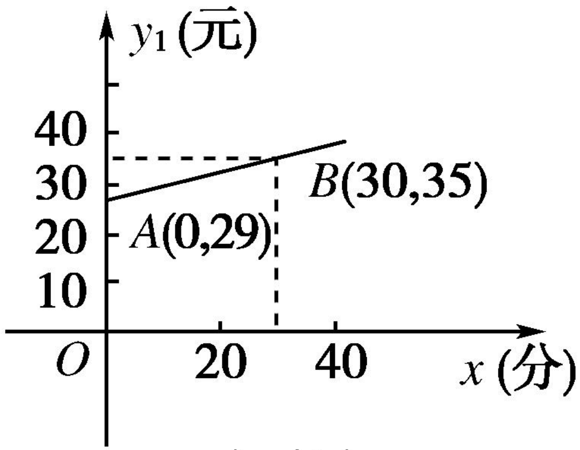
②建立函数模型，列出关于x，y的关系式.

③解答函数模型，求得结果.

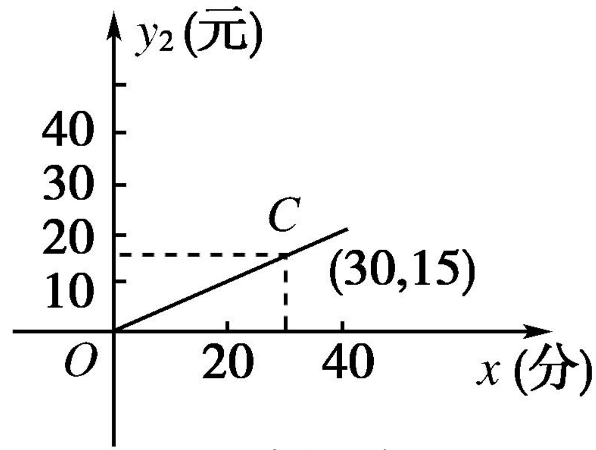
④把数学结果转译成具体问题的结论，做出解答.

(2)建立函数模型时，要注意实际问题中的函数定义域，如本题要求$x\geq 4$.

变式训练 1.为了发展电信事业方便用户，电信公司对移动电话采用不同的收费方式，其中所使用的“如意卡”与“便民卡”在某市范围内每月(30天)的通话时间x(分)与通话费y(元)的关系如图所示.



(如意卡)



(便民卡)

(1)分别求出通话费y_1，y_2与通话时间x之间的函数关系式;

(2)请帮助用户计算，在一个月内使用哪种卡便宜?

解析： (1)由图象可设 $y_1=k_1x+29$，$y_2=k_2x$，

把点 $B(30,35)$，$C(30,15)$分别代入 y_1，y_2 得 $k_1=\frac{1}{5}$，

$k_2=\frac{1}{2}$.

$\therefore y_1=\frac{1}{5}x+29$，$y_2=\frac{1}{2}x$.

(2)令 $y_1=y_2$，即$\frac{1}{5}x+29=\frac{1}{2}x$，

则 $x=96\frac{2}{3}$.

当 $x=96\frac{2}{3}$时，$y_1=y_2$，两种卡收费一致；

当 $x<96\frac{2}{3}$时，$y_1>y_2$，即便民卡便宜；

当 $x>96\frac{2}{3}$时，$y_1<y_2$，即如意卡便宜.

题型二 指数增长的函数模型

例2 某城市 2009 年底人口总数为 100 万人，如果年平均增长率为 1.2%，试解答以下问题：

(1)写出经过 x 年后，该城市人口总数 y(万人)与 x 年的函数关系.

(2)计算 10 年以后该城市人口总数(精确到 0.1 万人).

(3)计算大约多少年以后，该城市人口将达到 120 万人(精确到 1 年).

(4)如果 20 年后该城市人口总数不超过 120 万人年平均增长率应该控制在多少？

参考数据：$1.012^9 \approx 1.113, 1.012^{10} \approx 1.127$，$\lg 1.2 \approx 0.079$，
$\lg 2 \approx 0.3010$，$\lg 1.012 \approx 0.005$，$\lg 1.009 \approx 0.0039$

思路点拨

解答本题先根据增长率的意义，列出y与x的函数关系式，然后再求解相应问题.

[解题过程] (1)2009年底人口总数为100万人，
经过1年，2010年底人口总数为100＋$100\times1.2\%=100\times(1+1.2\%)$(万)
经过2年，2011年底人口总数为$100\times(1+1.2\%)+100\times(1+1.2\%)\times1.2\%=100\times(1+1.2\%)^2$(万)
经过3年，2012年底人口总数为$100\times(1+1.2\%)^2+100\times(1+1.2\%)^2\times1.2\%=100\times(1+1.2\%)^3$(万)
…

∴经过的年数x与$(1+1.2\%)$的指数相同.

∴经过x年后，该城市人口总数为$100\times(1+1.2\%)^x$(万)

∴$y=100\times(1+1.2\%)^x$.

(2)10年后该城市人口总数为$100\times(1+1.2\%)^{10}\approx112.7$(万).

(3)由题意得$100\times(1+1.2\%)^x>120$

两边取常用对数得$\lg[100\times(1+1.2\%)^x]>\lg 120$

整理得$2+x\lg 1.012>2+\lg 1.2$

$x>\approx\approx16$

∴大约16年以后，该城市人口将达到120万人.

(4)设该城市人口年平均增长率为 x.

则 $100\times(1+x)^{20}\leqslant 120$

两边取常用对数得 $\lg[100\times(1+x)^{20}]\leqslant\lg 120$

即 $2+20\lg(1+x)\leqslant 2+\lg 1.2$

$\therefore\lg(1+x)\leqslant\dfrac{0.079}{20}=0.003\,9=\lg 1.009$

$\therefore 1+x\leqslant 1.009$

$x\leqslant 0.009=0.9\%$

∴如果20年后该城市人口总数不超过120万人年平均增长率应该控制在 0.9%以内.

[题后感悟]　递增率问题广泛存在于生产和生活中，研究并解决这类问题是中学数学的重要应用方向之一，这类问题解决的关键是理解“递增率”的意义：递增率是所研究的对象在“单位时间”内比它在“前单位时间”内的增长率，切记并不总是只和开始单位时间内的值比较．具体分析问题时，应严格计算并写出前3～4个单位时间的具体值，通过观察、归纳出规律后，再推广概括为数学问题，然后，求解此数学问题．