2024届广州六中高三数学上学期第三次调研试卷

2024.01

数学

本试卷共22小题，满分150分，考试用时120分钟.

注意事项：

1.答题卡前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的校名、姓名、考号、座位号等相关信息填写在答题卡指定区域内.

2.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上.

3.非选择题是必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和徐改液，不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁.

一、单选题（本大题8小题，每小题5分，共40分）

1．已知复数$z=2+\mathrm{i}$（i为虚数单位），则其共轭复数$\bar{z}$的虚部为（　　）

A．-1　B．1　C．$-\mathrm{i}$　D．i

2．已知集合$A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|x^2-2x-3<0\right\}$，则集合A的真子集个数为（　　）

A．3　B．4　C．7　D．8

3．在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{FB}=3\overrightarrow{FC}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　B．$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$　C．$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　D．$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

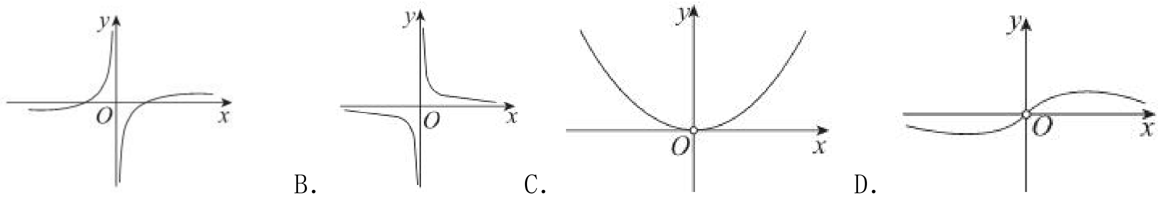
4．若函数$f\left(x\right)=A\tan\left(\omega x+\varphi\right)\left(A\omega\neq 0\right)$为奇函数，则$\varphi=$（　　）

A．$k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$　B．$2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$　C．$\frac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$　D．$\left(2k+1\right)k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$

5．已知首项为a_1，公比为q的等比数列$\left\{a_n\right\}$，其前n项和为S_n，则“$a_1>0,q>1$”是“S_n单调递增”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

6．函数$f(x)=\dfrac{x^2-\cos x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$的图象大致为（　　）



A．　B．　C．　D．

7．已知矩形ABCD中，$AB=2$，$BC=1$，将$\triangle CBD$沿BD折起至$\triangle C'BD$，当$C'B$与AD所成角最大时，三棱锥$C'-ABD$的体积等于（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{6}$　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　C．$\frac{2\sqrt{5}}{15}$　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8.已知A,B,C,D是椭圆E：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上四个不同的点,且$M(1,1)$是线段AB,CD的交点,且$\frac{|AM|}{|BM|}=\frac{|CM|}{|DM|}=3$，若$l\perp AC$，则直线l的斜率为（　　　　）

A．$\frac{1}{2}$　B．$\frac{3}{4}$　C．$\frac{4}{3}$　D．2

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目的要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．下列结论正确的是（　　　　）

A．若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$

B．若$x\in\mathbf{R}$，则$x^2+2+\frac{1}{x^2+2}$的最小值为2

C．若$a+b=2$，则a^2+b^2的最大值为2

D．若$x\in(0,2)$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\geq 2$

10．已知点P为双曲线$C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$上的任意一点，过点P作渐近线的垂线，垂足分别为E,F，则（）

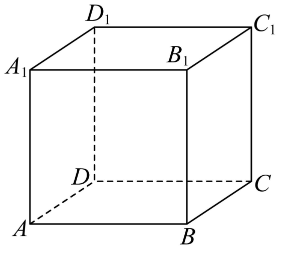
A．$|PE|+|PF|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

B．$|PE|\cdot|PF|=\frac{4}{5}$

C．$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=-\frac{12}{25}$

D．$S_{\triangle PEF}$的最大值为$\frac{8}{25}$

11．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点P满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1},\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1]$，下列说法正确的是（　　　　）



A．存在无穷多个点P，使得过D_1,B,P的平面与正方体的截面是菱形

B．存在唯一一点P，使得$AP//$平面A_1C_1D

C．存在无穷多个点P，使得$A_1P\perp B_1D$

D．存在唯一一点P，使得$D_1P\perp$平面A_1C_1D

12.在$\triangle ABC$中,角A、B、C所对的边分别为a、b、c,且$3b\cos C+3c\cos B=a^2$,则下列说法正确的是(　　　　)

A．若$B+C=2A$，则$\triangle ABC$的外接圆的面积为3π

B．若$A=\frac{\pi}{4}$，且$\triangle ABC$有两解，则b的取值范围为$\left[3,3\sqrt{2}\right]$

C．若$C=2A$，且$\triangle ABC$为锐角三角形，则c的取值范围为$\left(3\sqrt{2},3\sqrt{3}\right)$

D．若$A=2C$，且$\sin B=2\sin C$，O为$\triangle ABC$的内心，则$\triangle AOB$的面积为$\frac{3\sqrt{3}-3}{4}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，能够说明“对$\forall n\in\mathbf{N}^*$，若$a_{n+1}<a_n$，则$S_2<S_1$”是假命题的$\{a_n\}$的一个通项公式为$a_n=$______.

14．若$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$ $(n\in N^*)$的展开式中只有第6项的系数最大，则该展开式中的常数项为______.

15．已知球O的表面积为36π，正四棱锥$P-ABCD$的所有顶点都在球O的球面上，则该正四棱锥$P-ABCD$体积的最大值为______.

16．若不等式$e^{x-1}-mx-2n-3\geq 0$对$\forall x\in\mathbf{R}$恒成立，其中$m\neq 0$，则$\frac{n}{m}$的取值范围为______.

四、解答题：本题共6小题，共70分，解答应写出必要的文字说明、证明过程及验算步骤.

17．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=2a_n-1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)已知$b_n=a_n^2+\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n.

18.在$\triangle ABC$中，角A，B，C对应的边分别为a，b，c且$b\sin(A+C)=a\sin(B+C)+\left(\sqrt{2}a+c\right)\sin(A+B)$.

(1)求角B；

(2) $AB=6$，$BC=3\sqrt{2}$，点 D 在 AC 上，$AD=BD$，求 AD 的长.

19．如图 1，已知正三角形 ABC 边长为 4，其中 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EC}$，现沿着 DE 翻折，将点 A 翻折到点 A' 处，使得平面 $A'BC\perp$ 平面 DBC,M 为 $A'C$ 中点，如图 2.

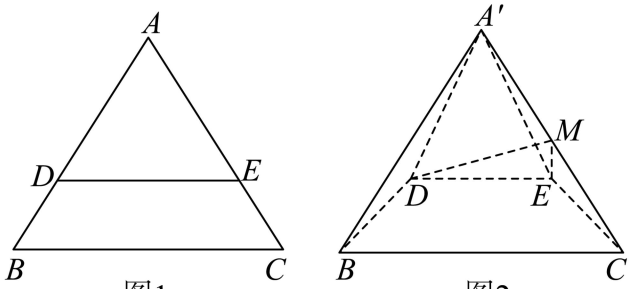


图1　　　　图2

(1)求异面直线 $A'D$ 与 EM 所成角的余弦值；

(2)求平面 $A'BC$ 与平面 DEM 夹角的余弦值.

20．已知在一个不透明的盒中装有一个白球和两个红球（小球除颜色不同，其余完全相同），某抽球试验的规则如下：试验者在每一轮需有放回地抽取两次，每次抽取一个小球，从第一轮开始，若试验者在某轮中的两次均抽到白球，则该试验成功，并停止试验. 否则再将一个黄球（与盒中小球除颜色不同，其余完全相同）放入盒中，然后继续进行下一轮试验.

(1)若规定试验者甲至多可进行三轮试验（若第三轮不成功，也停止试验），记甲进行的试验轮数为随机变量 X，求 X 的分布列和数学期望；

(2)若规定试验者乙至多可进行 $n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 轮试验(若第 n 轮不成功,也停止试验),记乙在第 $k\left(k\in\mathbf{N}^*,k\le n\right)$ 轮使得试验成功的概率为 P_k，则乙能试验成功的概率为 $P(n)=\sum_{k=1}^{n}P_k$，证明：$P\left(n\right)<\frac{1}{3}$.

21．已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线的距离为 $\frac{1}{2}$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过点 F 任意作互相垂直的两条直线 l_1，l_2 分别交曲线 C 于点 A，B 和 M，N. 设线段 AB，MN 的中点分别为 P，Q，求证：直线 PQ 恒过一个定点.

22．已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2)是否存在两个正整数 x_1，x_2，使得当 $x_1>x_2$ 时，$\left(x_1-x_2\right)^{x_1x_2}=x_1^{x_2}x_2^{x_1}$？若存在，求出所有满足条件的 x_1，x_2 的值；若不存在，请说明理由.

1．A

【分析】根据共轭复数的定义，结合复数虚部的概念求解即可.

【详解】因为$z=2+\mathrm{i}$，

所以$\overline{z}=2-\mathrm{i}$，

所以共轭复数$\overline{z}$的虚部为-1，

故选：A.

2．C

【分析】化简集合 A，根据真子集定义求解.

【详解】由$x^2-2x-3<0$，解得$-1<x<3$，

$\therefore A=\{x\in \mathrm{Z}|-1<x<3\}=\{0,1,2\}$，

所以集合 A 的真子集有$2^3-1=7$个.

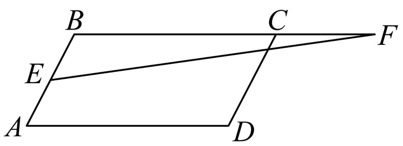
故选：C.

3．B

【分析】根据向量的线性运算即可求解.

【详解】$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$，

故选：B



4．C

【分析】分 0 在定义域内和 0 不在定义域内两种情况进行讨论即可求得答案.

【详解】若 0 在定义域内，由$x=0$时，$y=0$得，$\varphi=k\pi(k\in \mathbf{Z})$；

若 0 不在定义域内，由$x=0$时，$\tan\varphi$无意义，得$\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in \mathbf{Z})$.

综上，$\varphi=\frac{k\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$.

故选：C.

5．A

【分析】由$S_n-S_{n-1}=a_n>0$可判断充分性；取$a_1=1,q=\frac{1}{2}$可判断必要性.

【详解】在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1>0,q>1$，则$a_n=a_1\cdot q^{n-1}>0$，

当$n\geq 2$时，$S_n-S_{n-1}=a_n>0$，所以S_n单调递增，故充分性成立；

当S_n单调递增时，$a_1=1,q=\frac{1}{2}$时，$S_n=\frac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$单调递增，但是推不出$a_1>0,q>1$，故必要性不成立.

故选：A.

6．A

【分析】由题意得函数$f(x)$为奇函数，排除C，由零点存在定理可知函数$f(x)$的图象与x轴有交点，结合排除法、检验法即可得解.

【详解】因为$f(x)=\frac{x^2-\cos x}{e^x-e^{-x}}$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，又$f(-x)=\frac{x^2-\cos x}{e^{-x}-e^x}=-f(x)$，可知函数$f(x)$为奇函数，故排除C选项；

当$x=\frac{\pi}{2}$时，有$x^2-\cos x=\frac{\pi^2}{4}>0$，$e^x-e^{-x}>0$，此时$f(x)>0$，

当$x=\frac{\pi}{6}$时，有$x^2-\cos x=\frac{\pi^2}{36}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，$e^x-e^{-x}>0$，此时$f(x)<0$，

所以函数$f(x)$的图象与x轴有交点，故排除B，D选项.

而A选项满足上述条件.

故选：A.

7．A

【分析】根据异面直线所成角、锥体体积公式等知识求得正确答案.

【详解】因为异面直线所成角的范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，故当$C'B\perp AD$时，$C'B$与AD所成角最大，

因为四边形$ABCD$是矩形，所以$AB\perp AD$，

而$AB\cap C'B=B,AB,C'B\subset$平面$ABC'$，所以$AD\perp$平面$ABC'$，

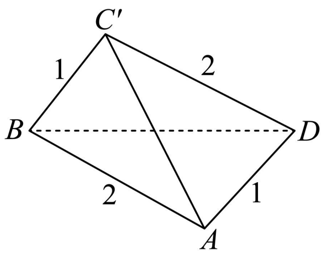
因为$AC'\subset$平面ABC'，所以$AD\perp AC'$，

在直角三角形ADC'中，$AD=1,C'D=2,AC'=\sqrt{3}$，

而$BC'=1,AB=2,BC'^2+AC'^2=AB^2$，所以$BC'\perp AC'$，

所以$V_{C'-ABD}=V_{D-ABC'}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC'}\cdot AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

故选：A



【点睛】异面直线所成角的范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，当两条直线所成角为$0$时，两直线平行或重合.求解锥体体积的问题，可以考虑利用转换定点的方法，然后利用体积公式$V=\frac{1}{3}Sh$来求得三棱锥的体积.

8．C

【分析】设出点的坐标$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，由$\frac{|AM|}{|BM|}=3$得到$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$，列出方程，得到$\begin{cases}x_2=\frac{4-x_1}{3}\\ y_2=\frac{4-y_1}{3}\end{cases}$，分别把$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$代入椭圆，得到$\frac{1}{4}(2-x_1)+\frac{1}{3}(2-y_1)=1$，同理得到$\frac{1}{4}(2-x_3)+\frac{1}{3}(2-y_3)=1$，两式相减得到$k_{AC}=-\frac{3}{4}$，利用直线垂直斜率的关系求出直线 l 的斜率.

【详解】设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，

因为$\frac{|AM|}{|BM|}=3$，故$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$，所以$\begin{cases}1-x_1=3(x_2-1)\\ 1-y_1=3(y_2-1)\end{cases}$，

则$\begin{cases}x_2=\frac{4-x_1}{3}\\ y_2=\frac{4-y_1}{3}\end{cases}$，又$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$都在椭圆上，

故$\frac{x_1^{\ 2}}{4}+\frac{y_1^{\ 2}}{3}=1$，且$\frac{1}{4}(4-x_1)^2+\frac{1}{3}(4-y_1)^2=9$，

两式相减得：$\frac{1}{4}(4-2x_1)\times4+\frac{1}{3}(4-2y_1)\times4=8$，即$\frac{1}{4}(2-x_1)+\frac{1}{3}(2-y_1)=1$①，

同理可得：$\frac{1}{4}(2-x_3)+\frac{1}{3}(2-y_3)=1$②，

②−①得：$\frac{1}{4}(x_1-x_3)+\frac{1}{3}(y_1-y_3)=0$，

所以$k_{AC}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=-\frac{3}{4}$，

因为$l\perp AC$，所以直线 l 的斜率为$-\frac{1}{k_{AC}}=\frac{4}{3}$.

故选：C

【点睛】直线与圆锥曲线相交涉及中点弦问题，常用点差法，该法计算量小，模式化强，易于掌握，若相交弦涉及$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$的定比分点问题时，也可以用点差法的升级版—定比点差法，解法快捷.

9．AD

【分析】利用作差法比较大小判断A，利用基本（均值）不等式判断BCD，要注意“一正二定三相等”.

【详解】因为$a^2-ab=a(a-b)>0$，所以$a^2>ab$，

因为$ab-b^2=b(a-b)>0$，所以$ab>b^2$，所以$a^2>ab>b^2$，故A正确；

因为$x^2+2+\frac{1}{x^2+2}\geq 2$的等号成立条件$x^2+2=\frac{1}{x^2+2}$不成立，所以B错误；

因为$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$，所以$a^2+b^2\geq 2$，故C错误；

因为$\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}(x+2-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2-x}{x}+\frac{x}{2-x}\right)\geq\frac{1}{2}(2+2)=2$，

当且仅当$\frac{1}{x}=\frac{1}{2-x}$，即$x=1$时，等号成立，所以D正确.

故选：AD

10．BCD

【分析】对A找到反例即可；对B利用点到直线距离公式计算即可；对C，利用二倍角的余弦公式和向量数量积的定理计算即可；对D利用三角形的面积公式计算即可.

【详解】对A，当P趋近于无穷远处时$|PE|+|PF|\to+\infty$，故A错误；

对B，设点$P\left(x_0,y_0\right)$，满足$\frac{x_0^2}{4}-y_0^2=1$，即$x_0^2-4y_0^2=4$，

又两条渐近线方程分别为$y=\pm\frac{1}{2}x$，即$x\pm 2y=0$，故有

$|PE|\cdot|PF|=\frac{|x_0+2y_0|}{\sqrt{5}}\cdot\frac{|x_0-2y_0|}{\sqrt{5}}=\frac{|x_0^2-4y_0^2|}{5}=\frac{4}{5}$，故B正确；

对C，设渐近线$y=\frac{1}{2}x$的倾斜角为α，则

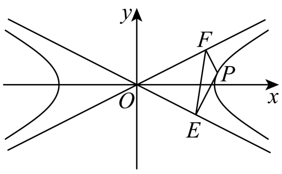
$\cos\angle EPF=\cos\left(\pi-\angle EOF\right)=-\cos\angle EOF=-\cos 2\alpha=-\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，

所以$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=\left|\overrightarrow{PE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF}\right|\cos\angle EPF=\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{12}{25}$，故C正确；

对 D，由 C 可知，$\sin\angle EPF=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，所以

$S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}|PE|\cdot|PF|\cdot\sin\angle EPF=\frac{8}{25}$为定值，故 D 正确.

故选：BCD.



11．ACD

【分析】对于 A：取线段CC_1的中点E，过点B,E,D_1作正方体的截面BED_1F，然后证明点P在线段BE上时可满足条件；对于 B：通过证明面A_1C_1D//面ACB_1，当点P在线段B_1C上时，有AP//平面A_1C_1D；对于 C：通过证明$DB_1\perp$面A_1BC_1，当点P在线段BC_1上时，有$A_1P\perp B_1D$；对于 D：通过证明$D_1B\perp$面A_1DC_1，当点P在B点位置时，有$D_1P\perp$平面A_1C_1D.

【详解】点P满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1},\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1]$，

即点P在正方形BCC_1B_1内（包括正方形的四条边）上运动，

对于 A：取线段CC_1的中点E，过点B,E,D_1作正方体的截面BED_1F，

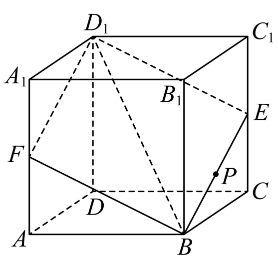
因为面BCC_1B_1//面ADD_1A_1，面ABB_1A_1//面DCC_1D_1，根据面面平行的性质定理知如果一个平面与两个平行平面相交，则交线平行，

所以有$BE//D_1F,ED_1//BF$，即四边形BED_1F为平行四边形，

又E为线段CC_1的中点，则有$BE=ED_1$，所以四边形BED_1F为菱形，

所以当点P在线段BE上时，过D_1,B,P的平面与正方体的截面是菱形，

故有无穷多个点P，使得过D_1,B,P的平面与正方体的截面是菱形，A 正确；



对于 B：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $AA_1//CC_1$，且 $AA_1=CC_1$，

所以四边形 AA_1C_1C 为平行四边行，

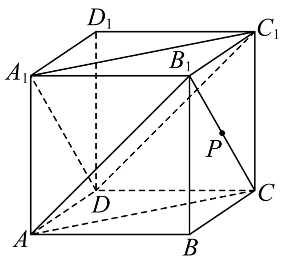
所以 $AC//A_1C_1$，又 $AC\not\subset$ 面 A_1C_1D，$A_1C_1\subset$ 面 A_1C_1D，

所以 $AC//$ 面 A_1C_1D，同理可得 $AB_1//$ 面 A_1C_1D，

又 $AC\cap AB_1=A$，$AC,AB_1\subset$ 面 ACB_1

所以面 $A_1C_1D//$ 面 ACB_1，当点 P 在线段 B_1C 上时，有 $AP//$ 平面 A_1C_1D，

故有无穷多个点 P，使得 $AP//$ 平面 A_1C_1D，B 错误；



对于 C：连接 A_1B,BC_1,C_1A_1,D_1B_1，

根据正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 可得 $A_1C_1\perp B_1D_1,A_1C_1\perp DD_1$，

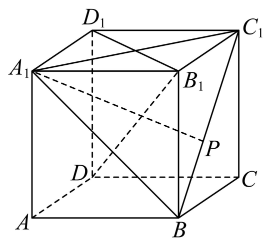
又 $B_1D_1\cap DD_1=D_1,B_1D_1,DD_1\subset$ 面 B_1D_1D，

所以 $A_1C_1\perp$ 面 B_1D_1D，又 $DB_1\subset$ 面 B_1D_1D，

所以 $A_1C_1\perp DB_1$，同理 $A_1B\perp DB_1$，又 $A_1B\cap A_1C_1=A_1,A_1B,A_1C_1\subset$ 面 A_1BC_1，

所以 $DB_1\perp$ 面 A_1BC_1，当点 P 在线段 BC_1 上时，有 $A_1P\perp B_1D$，

故有无穷多个点 P，使得 $A_1P\perp B_1D$，C 正确；

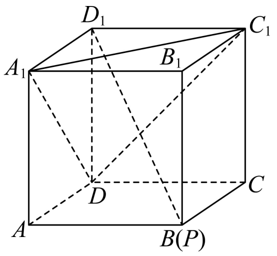


对于 D：由选项 C 证明 $DB_1\perp$ 面 A_1BC_1 同理可证明 $D_1B\perp$ 面 A_1DC_1，

过平面外一点有且只有一条直线与已知直线垂直，

当且仅当点P在B点位置时，有$D_1P\perp$平面A_1C_1D，

所以存在唯一一点P，使得$D_1P\perp$平面A_1C_1D，D 正确.



故选：ACD.

【点睛】方法点睛：对于立体几何中，针对找某点满足某种位置关系的问题，可以将问题进行转化，如找点满足线面平行，可以转化为找面，使面面平行，找点满足线线垂直，可以转化为找面，使线面垂直.

12．ACD

【分析】先由正弦定理得到$a=3$，选项 A，求出$A=\frac{\pi}{3}$，进而由正弦定理得到$\triangle ABC$的外接圆的半径和表面积；B 选项，又余弦定理得到$c^2-\sqrt{2}bc+b^2-9=0$，将其看做关于c的二次方程，结合方程有两正解，得到不等式，求出 b 的取值范围；C 选项，由正弦定理结合$a=3$得到$c=6\cos A$，再根据$\triangle ABC$为锐角三角形得到$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，从而得到 c 的取值范围；D 选项，由正弦定理得到$b=2c$，$\sin 3C=2\sin C$，结合三角恒等变换得到$\cos^2 C=\frac{3}{4}$，从而得到$C=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{2}$，由$a=3$求出$b=2\sqrt{3},c=\sqrt{3}$，由直角三角形性质得到内切圆半径，进而求出$\triangle AOB$的面积.

【详解】因为$3b\cos C+3c\cos B=a^2$，所以由正弦定理，得$3\sin B\cos C+3\sin C\cos B=a\sin A$，

即 $3\sin\left(B+C\right)=a\sin A$，

因为$A+B+C=\pi$，所以$\sin\left(B+C\right)=\sin A$，且$\sin A\neq 0$，所以$a=3$.

选项 A：若$B+C=2A$，则$A=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABC$的外接圆的直径$2R=\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{3}$，

所以$R=\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABC$的外接圆的面积为$\pi\times\left(\sqrt{3}\right)^2=3\pi$，选项 A 正确；

选项 B：由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$得$9=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$，

将此式看作关于c的二次方程$c^2-\sqrt{2}bc+b^2-9=0$，由题意得此方程有两个正解，