浙江省杭州市第四中学 2023-2024 学年高三上数学期末学业水平测试模拟试题

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0．5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用 05 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设 D,E,F 分别为 ΔABC 的三边 BC,CA,AB 的中点，则 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$（　　）

A．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　B．$\overrightarrow{AD}$　　C．$\overrightarrow{BC}$　　D．$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2．已知 $i(1-ai)=2+bi$（i 为虚数单位，$a,b\in\mathbf{R}$），则 ab 等于（　　）

A．2　　B．-2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

3．已知正四面体的内切球体积为 v，外接球的体积为 V，则 $\frac{V}{v}=$（　　）

A．4　　B．8　　C．9　　D．27

4．已知集合 A＝{0，1}，B＝{0，1，2}，则满足 A∪C＝B 的集合 C 的个数为（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

5．若 i 为虚数单位，则复数 $z=-\sin\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}$，则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

6．一个超级斐波那契数列是一列具有以下性质的正整数:从第三项起，每一项都等于前面所有项之和(例如:1，3，4，8，16…).则首项为 2，某一项为 2020 的超级斐波那契数列的个数为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

7．生活中人们常用“通五经贯六艺”形容一个人才识技艺过人，这里的“六艺”其实源于中国周朝的贵族教育体系，具体包括“礼、乐、射、御、书、数”.为弘扬中国传统文化，某校在周末学生业余兴趣活动中开展了“六艺”知识讲座，每艺安排一节，连排六节，则满足“数”必须排在前两节，“礼”和“乐”必须分开安排的概率为（　　）

A．$\frac{7}{60}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{13}{60}$　　D．$\frac{1}{4}$

8．已知定义在 R 上的偶函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(1+x\right)=f\left(1-x\right)$，当 $x\in\left[0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)=-x+1$，函数 $g\left(x\right)=e^{-|x-1|}$（$-1\le x\le 3$），则函数 $f\left(x\right)$ 与函数 $g\left(x\right)$ 的图象的所有交点的横坐标之和为（　　）

A．2　　B．4　　C．5　　D．6

9．“$-1\le x+y\le 1$且$-1\le x-y\le 1$”是“$x^2+y^2\le 1$”的（　　）

A．充分非必要条件　　　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

10．已知函数$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，$a=f\left(2^{0.3}\right)$，$b=f\left(0.2^{0.3}\right)$，$c=f\left(\log_{0.3}2\right)$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　　）

A．$b<a<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

11．已知向量$\overrightarrow{OA}=(-3,4)$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(-1,5)$，则向量$\overrightarrow{OA}$在向量$\overrightarrow{OB}$上的投影是（　　）

A．$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$-\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{2}{5}$

12．若(1＋2ai)i＝1－bi，其中a，b∈R，则|a＋bi|＝(　　).

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D．5

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知关于空间两条不同直线m、n，两个不同平面α、β，有下列四个命题：①若$m//\alpha$且$n//\alpha$，则$m//n$；②若$m\perp\beta$且$m\perp n$，则$n//\beta$；③若$m\perp\alpha$且$m//\beta$，则$\alpha\perp\beta$；④若$n\subset\alpha$，且$m\perp\alpha$，则$m\perp n$.其中正确命题的序号为______.

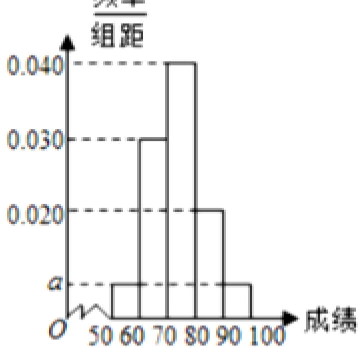
14．$(x+1)(x-2)^6$展开式中x^2的系数为________.

15．假设10公里长跑，甲跑出优秀的概率为$\dfrac{2}{3}$，乙跑出优秀的概率为$\dfrac{1}{2}$，丙跑出优秀的概率为$\dfrac{1}{4}$，则甲、乙、丙三人同时参加10公里长跑，刚好有2人跑出优秀的概率为________.

16．在棱长为6的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M是BC的中点，点P是面DCC_1D_1，所在平面内的动点，且满足$\angle APD=\angle MPC$，则三棱锥$P-BCD$的体积的最大值是__________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(12分)某职称晋级评定机构对参加某次专业技术考试的100人的成绩进行了统计，绘制了频率分布直方图（如图所示），规定80分及以上者晋级成功，否则晋级失败.



	晋级成功	晋级失败	合计
男	**16**		
女			**50**
合计			

（1）求图中 a 的值；

（2）根据已知条件完成下面 2×2 列联表，并判断能否有 85% 的把握认为“晋级成功”与性别有关？

（3）将频率视为概率，从本次考试的所有人员中，随机抽取 4 人进行约谈，记这 4 人中晋级失败的人数为 X，求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$．

（参考公式：$k^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$）

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	**0.40**	**0.25**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**
k_0	**0.780**	**1.323**	**2.072**	**2.706**	**3.841**	**5.024**

18．（12 分）已知椭圆 C $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的长轴长为 4，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（1）求椭圆 C 的方程；

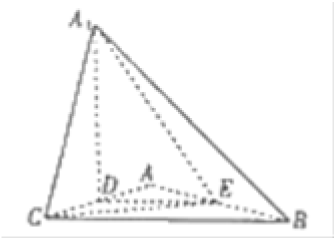
（2）设 A,B 分别为椭圆与 x 轴正半轴和 y 轴正半轴的交点，P 是椭圆 C 上在第一象限的一点，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，问 ΔPMN 与 ΔPAB 面积之差是否为定值？说明理由.

19．（12 分）已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+b\right)\sin x+\left(\dfrac{1}{2}a-\sqrt{3}b\right)\cos x$，且 $f(0)=-1, f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）已知 $g(x)=x^2-2x+m-3(1<m\leq 4)$，若对任意的 $x_1\in[0,\pi]$，总存在 $x_2\in[-2,m]$，使得 $f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$ 成立，求 m 的取值范围.

20．（12 分）已知 ΔABC 是等腰直角三角形,$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}, AC=2$．$D,E$ 分别为 AC,AB 的中点,沿 DE 将 ΔADE 折起,得到如图所示的四棱锥 A_1-BCDE．



(Ⅰ)求证：平面 $A_1DC \perp$ 平面 A_1BC .

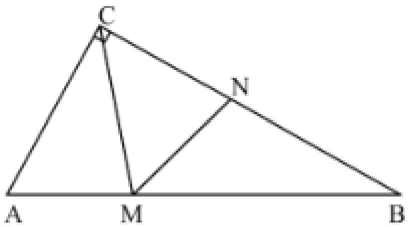
(Ⅱ)当三棱锥 $C-A_1BE$ 的体积取最大值时,求平面 A_1CD 与平面 A_1BE 所成角的正弦值.

21．（12 分）已知 a,b 都是大于零的实数.

（1）证明 $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a} \geqslant a+b$；

（2）若 $a>b$，证明 $a^2+\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{1}{a(a-b)}>4$.

22．（10 分）如图，在直角 $\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle CAB=\dfrac{\pi}{3}$，$AC=2$，点 M 在线段 AB 上.



（1）若 $\sin\angle CMA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求 CM 的长；

（2）点 N 是线段 CB 上一点，$MN=\sqrt{7}$，且 $S_{\triangle BMN}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ACB}$，求 $BM+BN$ 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

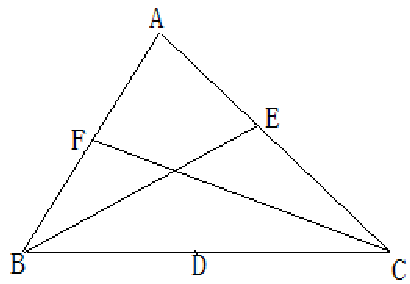
1、**B**

【解析】

根据题意,画出几何图形,根据向量加法的线性运算即可求解.

【详解】

根据题意,可得几何关系如下图所示:



$\overrightarrow{EB}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right),\overrightarrow{FC}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$

$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

故选:**B**

【点睛】

本题考查了向量加法的线性运算,属于基础题.

2、**A**

【解析】

利用复数代数形式的乘除运算化简，再由复数相等的条件列式求解.

【详解】

$\because i(1-ai)=2+bi$，

$\therefore a+i=2+bi$，得 $a=2$，$b=1$.

$\therefore ab=2$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数相等的条件，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，是基础题.

3、**D**

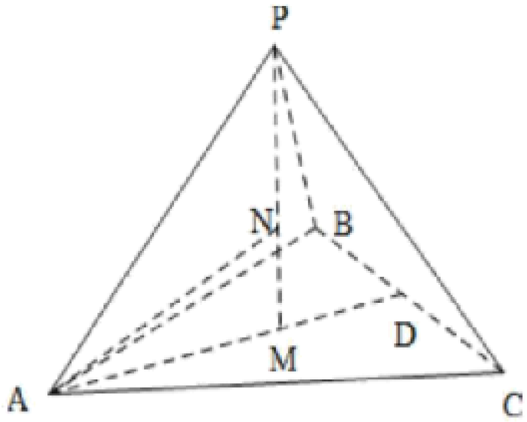
【解析】

设正四面体的棱长为1，取BC的中点为D，连接AD，作正四面体的高为PM，首先求出正四面体的体积，再利用等体法求出内切球的半径，在$Rt\Delta AMN$中，根据勾股定理求出外接球的半径，利用球的体积公式即可求解.

【详解】

设正四面体的棱长为1，取BC的中点为D，连接AD，

作正四面体的高为PM，



则 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2},AM=\frac{2}{3}AD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore PM=\sqrt{PA^2-AM^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$，

设内切球的半径为 r，内切球的球心为 O，

则 $V_{P-ABC}=4V_{O-ABC}=4\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}r$，

解得：$r=\frac{\sqrt{6}}{12}$；

设外接球的半径为 R，外接球的球心为 N，

则 $\left|MN\right|=\left|PM-R\right|$ 或 $\left|R-PM\right|$，$AN=R$，

在 $Rt\Delta AMN$ 中，由勾股定理得：

$AM^2+MN^2=AN^2$，

$\therefore\frac{1}{3}+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-R\right)^2=R^2$，解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore\frac{R}{r}=3$，

$\therefore\frac{V}{v}=\frac{R^3}{r^3}=27$

故选：**D**

【点睛】

本题主要考查了多面体的内切球、外接球问题，考查了椎体的体积公式以及球的体积公式，需熟记几何体的体积公式，属于基础题.

4、A

【解析】

由 $A\cup C=B$ 可确定集合 C 中元素一定有的元素，然后列出满足题意的情况，得到答案.

【详解】

由 $A\cup C=B$ 可知集合 C 中一定有元素 2，所以符合要求的集合 C 有 $\{2\},\{2,0\},\{2,1\},\{2,0,1\}$，共 4 种情况，所以选 A 项.

【点睛】

考查集合并集运算，属于简单题.

5、B

【解析】

首先根据特殊角的三角函数值将复数化为 $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，求出 $\bar{z}$，再利用复数的几何意义即可求解.

【详解】

Q $z=-\sin\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，

$\therefore \bar{z}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，

则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，位于第二象限.

故选：B

【点睛】

本题考查了复数的几何意义、共轭复数的概念、特殊角的三角函数值，属于基础题.

6、A

【解析】

根据定义，表示出数列的通项并等于 2020.结合 n 的正整数性质即可确定解的个数.

【详解】

由题意可知首项为 2，设第二项为 t，则第三项为 $2+t$，第四项为 $2(2+t)$，第五项为 $2^2(2+t)\cdots$ 第 n 项为 $2^{n-3}(2+t)$, n、$t\in N^*$, 且 $n\geq 3$，

则 $2^{n-3}\left(2+t\right)=2020$，

因为$2020=2^2\times5\times101$，

当$n-3$的值可以为$0,1,2$；

即有3个这种超级斐波那契数列，

故选：A.

【点睛】

本题考查了数列新定义的应用，注意自变量的取值范围，对题意理解要准确，属于中档题.

7、C

【解析】

分情况讨论，由间接法得到“数”必须排在前两节，“礼”和“乐”必须分开的事件个数，不考虑限制因素，总数有A_6^6种，进而得到结果.

【详解】

当“数”位于第一位时，礼和乐相邻有4种情况，礼和乐顺序有2种，其它剩下的有A_3^3种情况，由间接法得到满足条件的情况有$A_5^5-C_4^1A_2^2A_3^3$

当“数”在第二位时，礼和乐相邻有3种情况，礼和乐顺序有2种，其它剩下的有A_3^3种，

由间接法得到满足条件的情况有$A_5^5-C_3^1A_2^2A_3^3$

共有：$A_5^5-C_3^1A_2^2A_3^3+A_5^5-C_4^1A_2^2A_3^3$种情况，不考虑限制因素，总数有$A_6^6$种，

故满足条件的事件的概率为：$\dfrac{A_5^5-C_3^1A_2^2A_3^3+A_5^5-C_4^1A_2^2A_3^3}{A_6^6}=\dfrac{13}{60}$

故答案为：C.

【点睛】

解排列组合问题要遵循两个原则：①按元素(或位置)的性质进行分类；②按事情发生的过程进行分步．具体地说，解排列组合问题常以元素(或位置)为主体，即先满足特殊元素(或位置)，再考虑其他元素(或位置).

8、B

【解析】

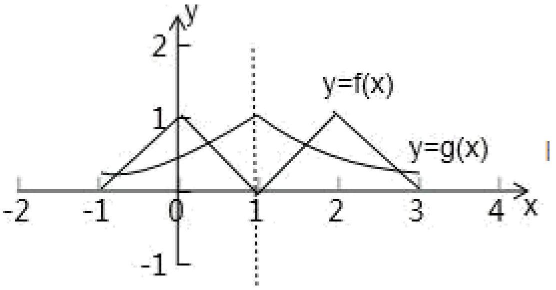
由函数的性质可得：$f\left(x\right)$的图像关于直线$x=1$对称且关于y轴对称，函数$g\left(x\right)=e^{-|x-1|}$（$-1\le x\le3$）的图像也关于$x=1$对称，由函数图像的作法可知两个图像有四个交点，且两两关于直线$x=1$对称，则$f\left(x\right)$与$g\left(x\right)$的图像所有交点的横坐标之和为4得解.

【详解】

由偶函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(1+x\right)=f\left(1-x\right)$，

可得 $f\left(x\right)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称且关于 y 轴对称，

函数 $g\left(x\right)=e^{-|x-1|}$（$-1\le x\le 3$）的图像也关于 $x=1$ 对称，



函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像与函数 $g\left(x\right)=e^{-|x-1|}$（$-1\le x\le 3$）的图像的位置关系如图所示，

可知两个图像有四个交点，且两两关于直线 $x=1$ 对称，

则 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 的图像所有交点的横坐标之和为 **4.**

故选：**B**

【点睛】

本题主要考查了函数的性质，考查了数形结合的思想，掌握函数的性质是解题的关键，属于中档题.

9、**A**

【解析】

画出“$-1\le x+y\le 1$，$-1\le x-y\le 1$，$x^2+y^2\le 1$,所表示的平面区域,即可进行判断.

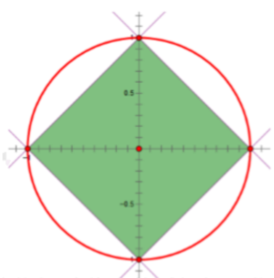
【详解】

如图，“$-1\le x+y\le 1$ 且 $-1\le x-y\le 1$”表示的区域是如图所示的正方形，

记为集合 **P**，“$x^2+y^2\le 1$”表示的区域是单位圆及其内部，记为集合 **Q**，

显然 P 是 Q 的真子集,所以答案是充分非必要条件，

故选: A.



【点睛】

本题考查了不等式表示的平面区域问题,考查命题的充分条件和必要条件的判断,难度较易.

10、**B**

【解析】

可判断函数$f\left(x\right)$在R上单调递增，且$2^{0.3}>1>0.2^{0.3}>0>\log_{0.3}2$，所以$c<b<a$.

【详解】

$\because f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$在$R$上单调递增，且$2^{0.3}>1>0.2^{0.3}>0>\log_{0.3}2$，

所以$c<b<a$.

故选：**B**

【点睛】

本题主要考查了函数单调性的判定，指数函数与对数函数的性质，利用单调性比大小等知识，考查了学生的运算求解能力.

11、**A**

【解析】

先利用向量坐标运算求解$\overrightarrow{OB}$，再利用向量$\overrightarrow{OA}$在向量$\overrightarrow{OB}$上的投影公式即得解

【详解】

由于向量$\overrightarrow{OA}=\left(-3,4\right)$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(-1,5\right)$

故$\overrightarrow{OB}=\left(2,1\right)$

向量$\overrightarrow{OA}$在向量$\overrightarrow{OB}$上的投影是$\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\dfrac{-3\times2+4\times1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：**A**

【点睛】

本题考查了向量加法、减法的坐标运算和向量投影的概念，考查了学生概念理解，数学运算的能力，属于中档题.

12、**C**

【解析】

试题分析：由已知，**－2a＋i＝1－bi**，根据复数相等的充要条件，有 **a**＝$-\dfrac{1}{2}$，**b＝－1**

所以**|a＋bi|**＝$\sqrt{(-\dfrac{1}{2})^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，选 **C**

考点：复数的代数运算，复数相等的充要条件，复数的模