上海市新川中学2023-2024学年高二上学期期末数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、填空题

1．在空间中，如果两条直线没有交点，那么这两条直线的位置关系是______.

2．设抛物线$y^2=8x$的准线方程为______.

3．已知球的半径等于1，则该球的体积等于___.

4．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-10$，且$2a_{n+1}-2a_n=1\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，则$a_{51}=$______.

5．过点$(2,-2)$作圆$x^2+y^2=4$的切线，则切线方程为______.

6．直线$y=x+m$被圆$x^2+y^2=1$所截得的弦长等于$\sqrt{2}$，则$m=$____

7．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^3,\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，则$a_5+a_6+a_7+a_8=$______.

8．无穷等比数列$\{a_n\}$满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=2$，则首项$a_1$的取值范围是______.

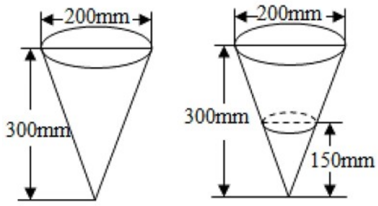
9．数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2,a_n=1-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n=2,3,4,\cdots)$，则$a_{2024}=$______.

10．已知抛物线$y^2=4x$与椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{k}=1$有公共焦点$F_1$，椭圆的另一个焦点为$F_2,P$是这两曲线的一个交点，则$\triangle PF_1F_2$的面积为______.

11．已知点P为双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$右支上一点，$F_1,F_2$分别为双曲线的左、右焦点，$I$为$\triangle PF_1F_2$的内心，若$S_{\triangle IPF_1}$ [illegible] S_{IPF_2} [illegible] $S_{IF_1F_2}$成立，则λ的值为______.

12．在立体几何讲授圆锥之前，为了让同学们对圆锥有直观的认识，善于动手的老师用铁皮自制一个无盖的圆锥形密封容器.当老师聚精会神做好该密封容器后，发现正在下雨，猛然想起气象学上用24小时内的降水在平地上的积水厚度(mm)来判断降雨程

度，其中小雨$(<10\text{mm})$、中雨$(10\text{mm}\sim25\text{mm})$、大雨$(25\text{mm}\sim50\text{mm})$、暴雨$(50\text{mm}\sim100\text{mm})$，勤于思考的老师用刚刚做好的这个圆锥形容器接了 24 小时的雨水，得到雨水数据如图所示，请你帮他判断一下这天降雨属于哪个等级？_____.



二、单选题

13．给定空间中的直线l与平面α，则“直线l与平面α垂直”是“直线l垂直于α平面内无数条直线”的（　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

14．用数学归纳法证明$1+a+a^2+...+a^{2(n+1)}=\dfrac{1-a^{2n+3}}{1-a}\left(a\neq1,n\in\mathbf{N}^*\right)$，在证明$n=1$等式成立时，等式的左边是

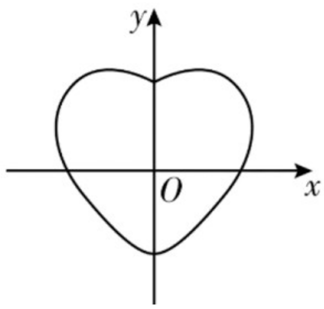
A．1　　B．$1+a$

C．$1+a+a^2+a^3$　　D．$1+a+a^2+a^3+a^4$

15．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n\left(n=1,2,3,\cdots\right)$，若当首项$a_1$和公差$d$变化时，$a_5+a_8+a_{11}$是一个定值，则下列选项中为定值的是（　）

A．S_{17}　　B．S_{18}　　C．S_{15}　　D．S_{14}

16．数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线$C:x^2+y^2=1+|x|y$就是其中之一（如图）.给出下列三个结论：



①曲线C恰好经过4个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

②曲线C上任意一点到原点的距离都不超过$\sqrt{2}$；

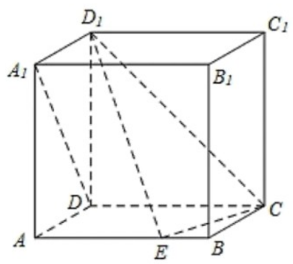
③曲线C所围成的“心形”区域的面积小于3；

其中，所有正确结论的序号是（　）

A．①　　B．②　　C．①②　　D．①②③

三、解答题

17．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E是棱AB上的动点.



(1)求证：$A_1D\perp D_1E$；

(2)若点E是棱AB的中点，求二面角D_1-EC-B的大小.

18．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1,P$为双曲线C上的任意点.

(1)求双曲线C的两条渐近线方程及渐近线夹角的大小；

(2)求证：点P到双曲线C的两条渐近线的距离的乘积是一个常数.

19．某地区2002年底沙漠面积为$9\times10^5\text{hm}^2$（注：hm^2是面积单位，表示公顷），地

质工作者为了解这个地区沙漠面积的变化情况，从2003年开始进行了连续5年的观测，并在每年底将观测结果记录如下表：

观测年份	该地区沙漠面积比原有（2002年底）面积增加数hm^2
2003	2000
2004	4000
2005	6001
2006	7999
2007	10001

请根据上表所给的信息进行估计.

(1)如果不采取任何措施，到2025年底，这个地区的沙漠面积大约变成多少hm^2.

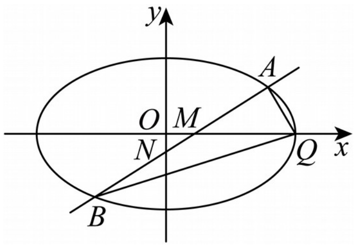
(2)如果从2008年初开始，采取植树造林等措施，每年改造面积8000hm^2沙漠，但沙漠面积仍按原有速度增加，那么到哪一年年底，这个地区的沙漠面积将首次小于$8\times10^5\text{hm}^2$？

20．设数列$\{x_n\}$的前n项和为S_n，且$4x_n-S_n-3=0\left(n\in N^*\right)$；

（1）求数列$\{x_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{y_n\}$满足$y_{n+1}-y_n=x_n\left(n\in N^*\right)$，且$y_1=2$，求满足不等式$y_n>\dfrac{55}{9}$的最小正整数$n$的值.

21．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆的一个顶点与两个焦点构成的三角形面积为2. 已知直线$y=k\left(x-1\right)\left(k>0\right)$与椭圆$C$交于$A$，$B$两点，且与$x$轴，$y$轴交于$M$，$N$两点.



(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若 $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AN}$，求 k 的值；

(3)若点 Q 的坐标为 $\left(\frac{7}{4},0\right)$，求证：$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值.

参考答案：

1．平行或异面

【分析】根据空间中两直线的位置关系即可判断.

【详解】空间中的直线没有公共点，则两直线要么平行，要么是异面直线.

故答案为：平行或异面

2． $x=-2$

【分析】由题意结合抛物线的标准方程确定其准线方程即可.

【详解】由抛物线方程$y^2=8x$可得$2p=8$，则$\frac{p}{2}=2$，故准线方程为$x=-2$.

故答案为$x=-2$.

【点睛】本题主要考查由抛物线方程确定其准线的方法，属于基础题.

3．$\frac{4\pi}{3}$/$\frac{4}{3}\pi$

【分析】由球体体积公式直接求解.

【详解】由球的体积公式$V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{4\pi}{3}$

4．15

【分析】由$2a_{n+1}-2a_n=1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$可证明数列$\{a_n\}$是等差数列，利用通项公式可得$a_{51}=15$.

【详解】将$2a_{n+1}-2a_n=1$同时除以2，得出$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}$，

即数列$\{a_n\}$是以$a_1=-10$为首项，公差$d=\frac{1}{2}$的等差数列，

则$a_{51}=a_1+(51-1)d=-10+50\times\frac{1}{2}=15$.

故答案为：15

5．$x=2$ 或 $y=-2$

【分析】由题意分直线斜率是否存在结合点到直线的距离公式即可求解.

【详解】当直线斜率存在时，设切线的点斜式方程为：$y+2=k\left(x-2\right)$，圆心到直线的距

离为$\frac{\left|2k+2\right|}{\sqrt{1+k^{2}}}=2=r$，

化简得到$k=0$，故 $y=-2$；

另一条应为k不存在的情况，即 $x=2$ 满足题意.

故答案为：$x=2$ 或 $y=-2$.

6．± 1

【分析】根据弦心距，半弦长，半径构成的直角三角形可求解.

【详解】设圆心到直线的距离为 d,

则$d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}$，

由平面几何知识知，弦心距，半弦长，半径构成的直角三角形，

所以$(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2}+(\frac{|m|}{\sqrt{2}})^{2}=1^{2}$，

解得 $m=\pm 1$，

故答案为± 1

【点睛】本题主要考查了圆的几何性质，点到直线的距离公式，属于中档题.

7．448

【分析】直接利用S_8-S_4计算即可.

【详解】由题意可知$a_5+a_6+a_7+a_8=S_8-S_4=8^3-4^3=448$.

故答案为：448

8．$(0,2)\cup(2,4)$

【分析】利用无穷等比数列极限公式计算即可.

【详解】依题意：$\frac{a_1}{1-q}=2$，且$q\in(-1,0)\cup(0,1),\therefore 1-q\in(0,1)\cup(1,2)$，

则$a_1=2(1-q)\in(0,2)\cup(2,4)$.

故答案为：$(0,2)\cup(2,4)$.

9．$\frac{1}{2}$/0.5

【分析】先求出数列的周期，利用周期可得答案.

【详解】法一：依次代入$a_1,a_2,a_3,\cdots$的值，看看它们符合什么规律：

$a_2=1-\frac{1}{a_1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$;

$a_3=1-\frac{1}{a_2}=1-\frac{1}{\frac{1}{2}}=1-2=-1$;

$a_4=1-\frac{1}{a_3}=1-\frac{1}{-1}=1+1=2=a_1$.至此可以发现周期为3.

$\because 2024\div 3=674\cdots\cdots 2$（余数为2），$\therefore a_{2024}=a_2=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

法二：该数列的周期为3，推理过程如下展示：

将n换成$n+1$，得$a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$，再将$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}$代入，得

$$a_{n+1}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{a_{n-1}}}=1-\frac{1}{\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}}}=1-\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}=\frac{a_{n-1}-1-a_{n-1}}{a_{n-1}-1}=\frac{-1}{a_{n-1}-1},$$

再将 n 换成 $n+2$，得 $a_{n+2}=1-\frac{1}{a_{n+1}}$，继续将 $a_{n+1}=\frac{-1}{a_{n-1}-1}$ 代入，得

$$a_{n+2}=1-\frac{1}{\frac{-1}{a_{n-1}-1}}=1+a_{n-1}-1=a_{n-1},$$

$\therefore T=3$，以下同解法一.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

10．$\sqrt{6}$

【分析】利用抛物线方程得出焦点坐标 $F_1(1,0)$，从而得出椭圆方程，联立椭圆与抛物线可求出 P 坐标，根据三角形面积公式计算焦点三角形的面积即可.

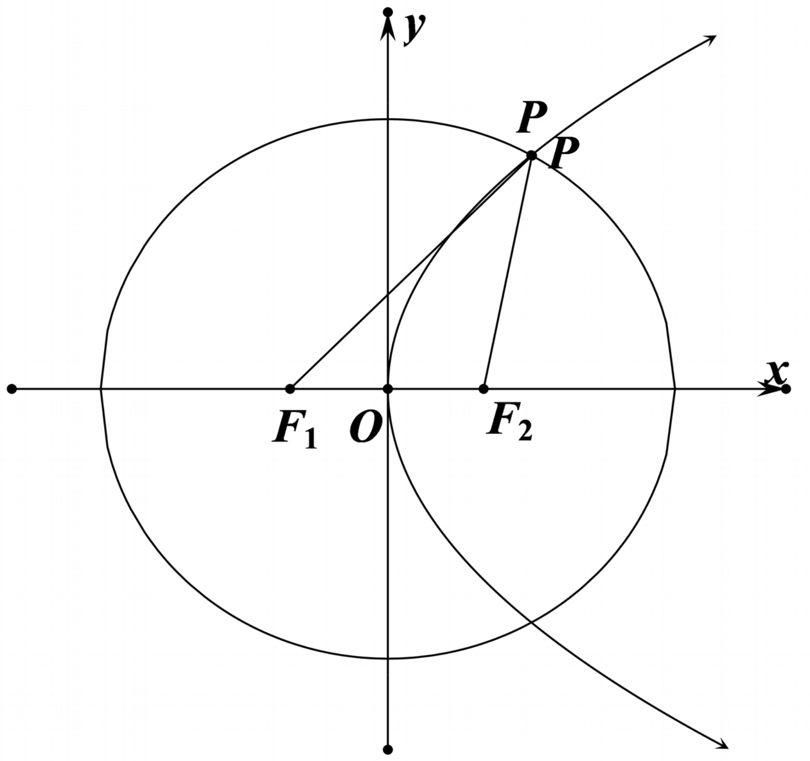
【详解】因为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$，所以 $9-k=1$，解得 $k=8$；

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$，联立椭圆与抛物线：$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\\ y^2=4x\end{cases}$

得 $2x^2+9x-18=0$，解得 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-6$（舍去）

所以 $y=\pm\sqrt{6}$，即点 $P\left(\frac{3}{2},\pm\sqrt{6}\right)$，又因为 $|F_1F_2|=2$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y|=\sqrt{6}$.

故答案为：$\sqrt{6}$



11．$\frac{4}{5}$/0.8

【分析】由条件结合内心的定义及三角形面积公式可得$\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r+\lambda cr$，再根据双曲线的定义化简可求$\lambda$.

【详解】设$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径为r，

由双曲线的定义得$|PF_1|-|PF_2|=2a,|F_1F_2|=2c$

$S_{\triangle IPF_1}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r,S_{\triangle IPF_2}=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r,S_{\triangle IF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot r=cr$

由题意得$\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r+\lambda cr$，

故$\lambda=\frac{|PF_1|-|PF_2|}{2c}=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，