课程标准

1. 通过具体实例，了解伯努利试验，掌握二项分布及其数字特征，并能解决实际问题.

2. 了解正态密度曲线的特点及曲线所表示的意义，并进行简单应用.

CONTENTS /

01

知识·逐点夯实

必备知识 系统梳理 基础重落实 课前自修

知识梳理

1. 伯努利试验与二项分布

（1）伯努利试验：只包含__两个__可能结果的试验叫做伯努利试验；将一个伯努利试验独立地重复进行n次所组成的随机试验称为__n重伯努利试验__；

（2）二项分布：一般地，在n重伯努利试验中，设每次试验中事件A发生的概率为p（$0<p<1$），用X表示事件A发生的次数，则X的分布列为$P(X=k)=$___$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$___，$k=0$，1，2，…，n.

如果随机变量X的分布列具有上式的形式，则称随机变量X服从二项分布，记作___$X\sim B(n,p)$___. 对于服从二项分布的随机变量X，$E(X)=$___np___，$D(X)=$___$np(1-p)$___.

2. 正态分布

若随机变量X服从正态分布，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，其正态密度函数为$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. 当$\mu=0$，$\sigma=1$时，随机变量$X$服从标准正态分布.

（1）正态曲线的特点

①曲线位于x轴__上方__，与x轴不相交；

②曲线是单峰的，它关于直线__$x=\mu$__对称；

③曲线在$x=\mu$处达到峰值__$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$__；

④曲线与x轴之间的面积为__1__；

⑤当σ一定时，曲线的位置由μ确定，曲线随着μ的变化而沿x轴平移；

⑥当μ一定时，曲线的形状由σ确定，σ越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中；σ越大，曲线越“矮胖”，表示总体的分布越分散.

（2）正态分布的三个常用数据

①$P（\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma）\approx 0.682\,7$；

②$P（\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma）\approx 0.954\,5$；

③$P（\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma）\approx 0.997\,3$.

基础自测

1. 判断正误.（正确的画“√”，错误的画“×”）

（1）n重伯努利试验中各次试验的结果相互独立.（　　）

答案：（1）√

（2）正态曲线是单峰的，其与x轴围成的面积是随参数μ，σ的变化而变化的.（　　）

答案：（2）×

（3）正态分布是对连续型随机变量而言的.（　　）

答案：（3）√

2. 已知X是一个随机变量，若$X \sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，则$P$（$X=2$）＝（　　）

A. $\frac{3}{16}$　　B. $\frac{4}{243}$　　C. $\frac{13}{243}$　　D. $\frac{80}{243}$

解析： D　由题意知$n=6$，$p=\frac{1}{3}$，故P（$X=2$）$=C_6^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$.

3. 甲、乙两羽毛球运动员之间的训练，要进行三场比赛，且这三场比赛可看做三次伯努利试验，若甲至少取胜一次的概率为$\frac{63}{64}$，则甲恰好取胜一次的概率为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{9}{64}$　　D. $\frac{27}{64}$

解析：C　假设甲取胜为事件A，设每次甲胜的概率为p，由题意得，事件A发生的次数$X\sim B(3，p)$，则有$1-(1-p)^3=\frac{63}{64}$，得$p=\frac{3}{4}$，则事件A恰好发生一次的概率为$C_3^1\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{64}$.

4. 已知随机变量X服从正态分布N（3，1），且P（$X>2c-1$）$=P$（$X<c+3$），则$c=$________.

解析：$\because X\sim N$（3，1），$\therefore$正态曲线关于直线$x=3$对称，且P（$X>2c-1$）$=P$（$X<c+3$），$\therefore 2c-1+c+3=3\times 2$，$\therefore c=\frac{4}{3}$.

答案：$\frac{4}{3}$

5. （2022·新高考II卷）已知随机变量X服从正态分布N（2，σ^2），且P（$2<X\leqslant 2.5$）$=0.36$，则P（$X>2.5$）$=$________.

解析：因为$X\sim N$（2，σ^2），所以P（$X>2$）$=0.5$，所以P（$X>2.5$）$=P$（$X>2$）$-P$（$2<X\leqslant 2.5$）$=0.5-0.36=0.14$.

答案：0.14

02

考点·分类突破

精选考点 典例研析 技法重悟通

课堂演练

考点一 n重伯努利试验中事件发生的概率

（师生共研过关）

【例1】 某气象站天气预报的准确率为80%，计算：（结果保留到小数点后2位）

（1）5次预报中恰有2次准确的概率；

解 令X表示5次预报中预报准确的次数，则$X\sim B\left(5,\frac{4}{5}\right)$，故其分布列为$P(X=k)=C_5^k\left(\frac{4}{5}\right)^k\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)^{5-k}$（$k=0$，1，2，3，4，5）.

（1）“5次预报中恰有2次准确”的概率为$P(X=2)=C_5^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{4}{5}\right)^3=10\times\frac{16}{25}\times\frac{1}{125}\approx0.05$.

（2）5次预报中至少有2次准确的概率；

解　（2）“5次预报中至少有2次准确”的概率为$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-C_5^0\times\left(\frac{4}{5}\right)^0\times\left(1-\frac{4}{5}\right)^5-C_5^1\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)^4=1-0.00032-0.0064\approx 0.99$.

| 解题技法 |

n重伯努利试验的判断及相应概率的求解策略

1　　符合n重伯努利试验必须满足的两个特征：①每次试验的条件完全相同，有关事件的概率保持不变；②各次试验的结果互不影响，即各次试验相互独立.

2　　在求n重伯努利试验中事件恰好发生k次的概率时，首先要确定好n，p和k的值，再准确利用公式$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0$，1，2，…，$n$求概率.

训练

甲、乙两人各射击一次，击中目标的概率分别是$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{4}$，假设两人射击是否击中目标相互之间没有影响，每次射击是否击中目标相互之间没有影响.

（1）求甲射击4次，至多1次未击中目标的概率；

解：（1）记“甲射击4次，至多1次未击中目标”为事件A_1，则概率为$P(A_1)$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^4+C_4^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{16}{27}.$$

（2）求两人各射击4次，甲恰好击中目标2次且乙恰好击中目标3次的概率.

解：（2）记“甲射击4次，恰好击中目标2次”为事件A_2，

“乙射击4次，恰好击中目标3次”为事件B_2，

则$P(A_2)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$，

$P(B_2)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(1-\frac{3}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$，

由于甲、乙射击相互独立，

所以$P(A_2B_2)=P(A_2)P(B_2)=\frac{8}{27}\times\frac{27}{64}=\frac{1}{8}$，

即两人各射击4次，甲恰好击中目标2次且乙恰好击中目标3次的概率为$\frac{1}{8}$.

考点二 二项分布的均值与方差

（师生共研过关）

【例2】 为贯彻“不忘立德树人初心，牢记为党育人、为国育才使命”的要求，某省推出的高考新方案是“3+1+2”模式，“3”是语文、外语、数学三科必考，“1”是在物理与历史两科中选择一科，“2”是在化学、生物、政治、地理四科中选择两科作为高考科目. 某学校为做好选课走班教学，给出三种可供选择的组合进行模拟选课，其中A组合：物理、化学、生物，B组合：历史、政治、地理，C组合：物理、化学、地理，根据选课数据得到，选择A组合的概率为$\frac{3}{5}$，选择B组合的概率为$\frac{1}{5}$，选择C组合的概率为$\frac{1}{5}$，甲、乙、丙三位同学每人选课是相互独立的.

（1）求这三位同学恰好选择互不相同的组合的概率；

解 用A_i表示第i位同学选择A组合，用B_i表示第i位同学选择B组合，用C_i表示第i位同学选择C组合，$i=1$，2，3.

由题意可知，A_i，B_i，C_i互相独立，且$P(A_i)=\frac{3}{5}$，$P(B_i)=\frac{1}{5}$，$P(C_i)=\frac{1}{5}$.

（1）三位同学恰好选择不同的组合共有$A_3^3=6$种情况，每种情况的概率相同，

故三位同学恰好选择不同组合的概率$P=6\times P(A_1B_2C_3)=6P(A_1)P(B_2)P(C_3)=6\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{18}{125}$.

（2）记η表示这三人中选择含地理的组合的人数，求η的分布列及均值.

（2）由题意知η的所有可能取值为0，1，2，3，且$\eta \sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，

所以P（$\eta=0$）$=C_3^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，

P（$\eta=1$）$=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，

P（$\eta=2$）$=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$，

P（$\eta=3$）$=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{8}{125}$，

所以η的分布列为

η	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

所以E（η）$=0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}=\frac{6}{5}$.

| 解题技法 |

二项分布的期望与方差的求解策略

1　　如果$\xi \sim B$（n，p），则用公式E（ξ）$=np$，D（ξ）$=np$（$1-p$）求解，可大大减少计算量；

2有些随机变量虽不服从二项分布，但与之具有线性关系的另一随机变量服从二项分布，这时，可以综合应用E（$a\xi+b$）$=aE$（ξ）$+b$以及E（ξ）$=np$求出E（$a\xi+b$），同样还可求出D（$a\xi+b$）.

训练

某社区组织开展“普法”宣传活动，为鼓励更多的人积极参与到宣传活动中来，宣传活动现场设置了抽奖环节.在盒中装有9张大小相同的精美卡片，卡片上分别印有“学法用法依法治国”“普法宣传人人参与”图案.抽奖规则：参加者从盒中抽取卡片两张，若抽到两张分别是“普法宣传人人参与”和“学法用法依法治国”卡即可获奖，否则，均为不获奖.卡片用后放回盒子，下一位参加者继续重复进行.活动开始后，一位参加者问：“盒中有几张‘普法宣传人人参与’卡？”主持人答：“我只知道，从盒中抽取两张都是‘学法用法依法治国’卡的概率是$\frac{1}{6}$.”

（1）求抽奖者获奖的概率；

解：（1）设“学法用法依法治国”卡有n张，由$\frac{C_n^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}$，得$n=4$，

故“普法宣传人人参与”卡有5张，抽奖者获奖的概率为$\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^2}=\frac{5}{9}$.

（2）为了增加抽奖的趣味性，规定每个抽奖者先从装有9张卡片的盒中随机抽出1张不放回，再用剩下8张卡片按照之前的抽奖规则进行抽奖，现有甲、乙、丙三人依次抽奖，用X表示获奖的人数，求X的分布列、均值和方差.

解：（2）在新规则下，每个抽奖者获奖的概率为$\frac{4}{9}\times\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}+\frac{5}{9}\times\frac{C_4^1C_4^1}{C_8^2}=\frac{5}{9}$，

所以$X\sim B\left(3,\frac{5}{9}\right)$，$X$的分布列为$P$（$X=k$）$=C_3^k\left(\frac{5}{9}\right)^k\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{3-k}$（$k=0$，1，2，3），

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{729}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{125}{729}$

所以E（X）$=3\times\frac{5}{9}=\frac{5}{3}$，$D$（$X$）$=3\times\frac{5}{9}\times\left(1-\frac{5}{9}\right)=\frac{20}{27}$.

考点三 **正态分布**

（师生共研过关）

【例3】 （1）（2021·新高考II卷）某物理量的测量结果服从正态分布N（10，σ^2），下列结论中不正确的是 （　　）

A. σ越小，该物理量在一次测量中在（9.9，10.1）的概率越大

B. σ越小，该物理量在一次测量中大于10的概率为0.5

C. σ越小，该物理量在一次测量中小于9.99与大于10.01的概率相等

D. σ越小，该物理量在一次测量中落在（9.9，10.2）与落在（10，10.3）的概率相等

（1）**解析**　对于A，σ越小，正态分布的图象越瘦长，总体分布越集中在对称轴附近，故A正确；对于B、C，由于正态分布图象的对称轴为$\mu=10$，显然B、C正确. D显然错误. 故选D.

答案　D

（2）为了解高三复习备考情况，某校组织了一次阶段考试. 若高三全体学生的数学成绩X近似服从正态分布N（100，17.5^2）. 已知成绩在117.5分以上（不含117.5分）的学生有80人.

①求此次参加考试的学生成绩低于82.5分的概率；

②如果成绩大于135分的为特别优秀，那么本次数学考试成绩特别优秀的大约有多少人.

（若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0.68$，$P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0.96$）

（2）**解** ①因为数学成绩X服从正态分布N（100，17.5^2），则P（$100-17.5\leqslant X\leqslant 100+17.5$）$=P$（$82.5\leqslant X\leqslant 117.5$）$\approx 0.68$，所以此次参加考试的学生成绩低于82.5分的概率$P$（$X<82.5$）$=\frac{1-P(82.5\leqslant X\leqslant 117.5)}{2}\approx\frac{1-0.68}{2}=0.16$.

②因为P（$100-17.5\times 2\leqslant X\leqslant 100+17.5\times 2$）$=P$（$65\leqslant X\leqslant 135$）$\approx 0.96$，所以数学成绩特别优秀的概率$P$（$X>135$）$=\frac{1-P(65\leqslant X\leqslant 135)}{2}\approx\frac{1-0.96}{2}=0.02$. 又$P$（$X<82.5$）$=P$（$X>117.5$）$=0.16$，则本次考试数学成绩特别优秀的人数大约是$\frac{80}{0.16}\times 0.02=10$.

|解题技法|

解决正态分布问题有三个关键点：（1）对称轴$x=\mu$；（2）标准差σ；（3）分布区间. 利用对称性可求指定范围内的概率值；由μ，σ，分布区间的特征进行转化，使分布区间转化为3σ特殊区间，从而求出所求概率. 注意只有在标准正态分布下对称轴才为$x=0$.

训练

1. 若随机变量$X\sim B(3,p)$，$Y\sim N(2,\sigma^2)$，若$P(X\geq1)=0.657$，$P(0<Y<2)=p$，则$P(Y>4)=$（　　）

A. 0.2　　B. 0.3

C. 0.7　　D. 0.8

解析：A　由题意，$P(X\geq1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^3=0.657$，解得$p=0.3$，则$P(0<Y<2)=0.3$，所以$P(Y>4)=P(Y<0)=0.5-P(0<Y<2)=0.2$.