湖南省长沙市雅礼中学2024届高三下学期3月综合测试(一)

数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．一组数据按从小到大的顺序排列为2，4，m，12，16，17，若该组数据的中位数是极差的$\frac{3}{5}$，则该组数据的第40百分位数是（　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．9

2．圆心在y轴上，半径为1，且过点$(1,2)$的圆的方程是（　）

A．$x^2+(y-2)^2=1$　　B．$x^2+(y+2)^2=1$

C．$(x-1)^2+(y-3)^2=1$　　D．$x^2+(y-3)^2=1$

3．记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3+a_7=10, a_5a_6=35$，则$S_6=$（　）

A．20　　B．16　　C．14　　D．12

4．若古典概型的样本空间$\Omega=\{1,2,3,4\}$，事件$A=\{1,2\}$，甲: 事件$B=\Omega$，乙: 事件A,B相互独立，则甲是乙的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．一般来说，输出信号功率用高斯函数来描述，定义为$I(x)=I_0e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，其中$I_0$为输出信号功率最大值（单位：mW），$x$为频率（单位：Hz），$\mu$为输出信号功率的数学期望，$\sigma^2$为输出信号的方差，3dB带宽是光通信中一个常用的指标，是指当输出信号功率下降至最大值一半时，信号的频率范围，即对应函数图象的宽度。现已知输出信号功率为$I(x)=I_0e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$（如图所示），则其3dB带宽为（　）

A．$\sqrt{\ln 2}$　　B．$4\sqrt{\ln 2}$　　C．$3\sqrt{\ln 2}$　　D．$2\sqrt{2\ln 2}$

6．已知函数$y=f(x)$的图象恰为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$x$轴上方的部分，若$f(s-t)$，$f(s)$，$f(s+t)$成等比数列，则平面上点（$s$，$t$）的轨迹是（　）

A．线段（不包含端点）　　B．椭圆一部分

C．双曲线一部分　　D．线段（不包含端点）和双曲线一部分

7．已知$\left(\dfrac{1}{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}-\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\left[1+\tan\left(\alpha-\beta\right)\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right]=6$，$\tan\alpha\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)=3$，则$\cos\left(4\alpha+4\beta\right)=$（　）

A．$-\dfrac{79}{81}$　　B．$\dfrac{79}{81}$　　C．$-\dfrac{49}{81}$　　D．$\dfrac{49}{81}$

8．方程$2\cos2x\left(\cos2x-\cos\left(\dfrac{2014\pi^2}{x}\right)\right)=\cos4x-1$所有正根的和为（　）

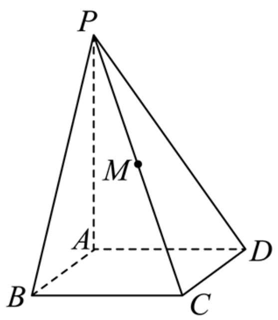
A．810π　　B．1008π　　C．1080π　　D．1800π

二、多选题

9．已知复数z_1,z_2是关于x的方程$x^2+bx+1=0(-2<b<2,b\in\mathbf{R})$的两根，则下列说法中正确的是（　）

A．$\overline{z_1}=z_2$　　B．$\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbf{R}$　　C．$\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=1$　　D．若$b=1$，则$z_1^3=z_2^3=1$

10．四棱锥$P-ABCD$的底面为正方形，PA与底面垂直，$\left|PA\right|=2$，$\left|AB\right|=1$，动点M在线段PC上，则（　）



A．不存在点M，使得$AC\perp BM$

B．$MB+MD$的最小值为$\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

C．四棱锥$P-ABCD$的外接球表面积为5π

D．点M到直线AB的距离的最小值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

11．设a为常数，$f(0)=\dfrac{1}{2},f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$，则（　）.

A．$f(a)=\dfrac{1}{2}$

B．$f(x)=\frac{1}{2}$成立

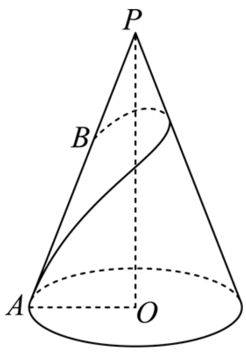
C．$f(x+y)=2f(x)f(y)$

D．满足条件的$f(x)$不止一个

三、填空题

12．$\left(2+\frac{x}{y}\right)(x-2y)^6$的展开式中$x^4y^2$的系数为________.（用数字作答）

13．如图，圆锥底面半径为$\frac{2}{3}$，母线PA＝2，点B为PA的中点，一只蚂蚁从A点出发，沿圆锥侧面绕行一周，到达B点，其最短路线长度为______，其中下坡路段长为______.



14．设严格递增的整数数列a_1，a_2，…，a_{20}满足$a_1=1$，$a_{20}=40$.设f为a_1+a_2，a_2+a_3，…，$a_{19}+a_{20}$这19个数中被3整除的项的个数，则f的最大值为______，使得f取到最大值的数列$\{a_n\}$的个数为______.

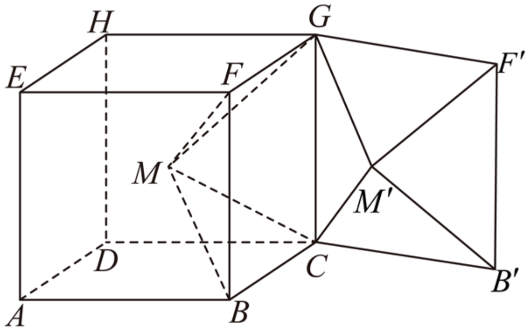
四、解答题

15．已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为$F(0,1)$，过点F的直线l与C交于A,B两点，过A,B作C的切线l_1,l_2，交于点M，且l_1,l_2与x轴分别交于点D,E.

(1)求证：$|DE|=|MF|$；

(2)设点P是C上异于A,B的一点，P到直线l_1,l_2,l的距离分别为d_1,d_2,d，求$\frac{d_1d_2}{d^2}$的最小值.

16．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-EFGH$中，点M是正方体的中心，将四棱锥$M-BCGF$绕直线CG逆时针旋转$\alpha(0<\alpha<\pi)$后，得到四棱锥$M'-B'CGF'$.



(1)若$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，求证：平面$MBF\perp$平面$M'B'F'$；

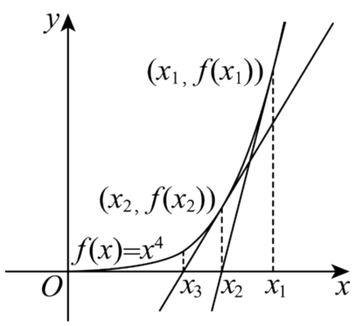
(2)是否存在α，使得直线$M'F'\perp$平面MBC，若存在，求出α的值；若不存在，请说明理由.

17．已知函数$f\left(x\right)=\ln x+ax^2+bx$(其中$a,b$为常数且$a\neq 0$)在$x=1$处取得极值.

(1)当$a=1$时，求$f\left(x\right)$的极大值点和极小值点；

(2)若$f\left(x\right)$在$\left(0,\mathrm{e}\right]$上的最大值为1，求$a$的值.

18．物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点时，给出了“牛顿数列”，它在航空航天中应用非常广泛．其定义是：对于函数$f\left(x\right)$，若满足$\left(x_{n+1}-x_n\right)f'\left(x_n\right)+f\left(x_n\right)=0$，则称数列$\left\{x_n\right\}$为牛顿数列．已知$f\left(x\right)=x^4$，如图，在横坐标为$x_1=1$的点处作$f\left(x\right)$的切线，切线与$x$轴交点的横坐标为$x_2$，用$x_2$代替$x_1$重复上述过程得到$x_3$，一直下去，得到数列$\left\{x_n\right\}$.



(1)求数列$\left\{x_n\right\}$的通项公式；

(2)若数列$\left\{n\cdot x_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，且对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，满足$S_n\geq 16-\lambda\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$，求整数$\lambda$的最小值.（参考数据：$0.9^4=0.6561$，$0.9^5\approx 0.5905$，$0.9^6\approx 0.5314$，$0.9^7\approx 0.4783$）

19．若函数$y=f\left(x\right)$满足$f\left(x\right)=f\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$且$f\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$（$x\in\mathbf{R}$），则称函数$y=f\left(x\right)$为“$M$函数”.

(1)试判断$y=\sin\dfrac{4}{3}x$是否为“M函数”，并说明理由；

(2)函数$f\left(x\right)$为“M函数”，且当$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$时，$y=\sin x$，求$y=f\left(x\right)$的解析式，并写出在$\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$上的单调增区间；

(3)在（2）条件下，当$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right]$，关于$x$的方程$f\left(x\right)=a$（$a$为常数）有解，记该方程所有解的和为$\mathrm{S}$，求$\mathrm{S}$.

参考答案：

1．C

【分析】

根据题意算出极差，进而得到该组数据的中位数，列式求出m，进而利用百分位数的定义得出答案.

【详解】根据题意，数据按从小到大的顺序排列为2，4，m，12，16，17，

则极差为$17-2=15$，故该组数据的中位数是$15\times\frac{3}{5}=9$，

数据共6个，故中位数为$\frac{m+12}{2}=9$，解得$m=6$，

因为$6\times 40\%=2.4$，所以该组数据的第40百分位数是第3个数6，

故选：C.

2．A

【分析】

先设圆心再根据点在圆上求得b，再应用圆的标准方程写出圆的方程即可.

【详解】

因为圆心在y轴上，所以可设所求圆的圆心坐标为$\left(0,b\right)$，

则圆的方程为$x^2+(y-b)^2=1$，又点$\left(1,2\right)$在圆上，

所以$1+\left(2-b\right)^2=1$，解得$b=2$，

所以所求圆的方程为$x^2+\left(y-2\right)^2=1$.

故选：A

3．D

【分析】

由等差数列的性质求得a_5，然后依次求得a_6，公差，最后求得S_6.

【详解】$\because\{a_n\}$是等差数列，

$\therefore a_3+a_7=2a_5=10$， $a_5=5$，所以$a_6=\frac{a_5a_6}{a_5}=7$，

$\therefore$公差$d=a_6-a_5=2$，

$\therefore a_1=a_5-4d=-3$，

$\therefore S_6=6\times(-3)+\dfrac{6\times5}{2}\times2=12$，

故选：D.

4．A

【分析】

结合独立事件的定义，结合充分，必要条件的定义，即可判断选项.

【详解】若 $B=\Omega$， $A\cap B=\{1,2\}$，则 $P\left(A\cap B\right)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

而 $P\left(A\right)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$， $P\left(B\right)=1$，

所以 $P\left(A\right)P\left(B\right)=P\left(A\cap B\right)$，所以事件 A,B 相互独立，

反过来，当 $B=\{1,3\}$， $A\cap B=\{1\}$，

此时 $P\left(A\cap B\right)=\dfrac{1}{4}$， $P\left(A\right)=P\left(B\right)=\dfrac{1}{2}$，满足 $P\left(A\right)P\left(B\right)=P\left(A\cap B\right)$，

事件 A,B 相互独立，所以不一定 $B=\Omega$，

所以甲是乙的充分不必要条件.

故选：A

5．D

【分析】

根据给定信息，列出方程并求解即可作答.

【详解】依题意，由 $I(x)=\dfrac{1}{2}I_0$， $I(x)=I_0\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$，得 $I_0\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}}=\dfrac{1}{2}I_0$，即 $\mathrm{e}^{\frac{(x-2)^2}{2}}=2$，

则有 $(x-2)^2=2\ln2$，解得 $x_1=2-\sqrt{2\ln2}$， $x_2=2+\sqrt{2\ln2}$，

所以3dB带宽为 $x_2-x_1=2\sqrt{2\ln2}$.

故选：D

6．A

【分析】根据等比数列的性质，结合椭圆方程进行求解判断即可.

【详解】因为函数 $y=f(x)$ 的图象恰为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)x$ 轴上方的部分，

所以 $y=f(x)=b\cdot\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}(-a<x<a)$，

因为 $f(s-t)$， $f(s)$， $f(s+t)$ 成等比数列，

所以有 $f^2(s)=f(s-t)\cdot f(s+t)$，且有$-a<s<a,-a<s-t<a,-a<s+t<a$成立，

即$-a<s<a,-a<t<a$成立，

由 $f^2(s)=f(s-t)\cdot f(s+t)\Rightarrow(b\cdot\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}})^2=b\cdot\sqrt{1-\frac{(s-t)^2}{a^2}}\cdot b\cdot\sqrt{1-\frac{(s+t)^2}{a^2}}$，

化简得：$t^4=2a^2t^2+2s^2t^2\Rightarrow t^2(t^2-2a^2-2s^2)=0\Rightarrow t^2=0$，或$t^2-2a^2-2s^2=0$，

当$t^2=0$时，即$t=0$，因为$-a<s<a$，所以平面上点（s，t）的轨迹是线段（不包含端点）；

当$t^2-2a^2-2s^2=0$时，即$t^2=2a^2+2s^2$，

因为$-a<t<a$，所以$t^2<a^2$，而$2a^2+2s^2>a^2$，所以$t^2=2a^2+2s^2$不成立，

故选：A

7．A

【分析】

结合二倍角公式和两角和差公式化简即可求得.

【详解】$\left(\dfrac{1}{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}-\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\left[1+\tan\left(\alpha-\beta\right)\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right]=6$，

$$\frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\left(1+\frac{2\tan^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\right)=6.$$

$$\frac{2\cos\left(\alpha-\beta\right)}{\sin\left(\alpha-\beta\right)}\left(\frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\tan^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\right)=6,$$

$$\frac{2\cos\left(\alpha-\beta\right)}{\sin\left(\alpha-\beta\right)}\left(\frac{1+\tan^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\right)=6，\quad\frac{2\cos\left(\alpha-\beta\right)}{\sin\left(\alpha-\beta\right)}\times\frac{1}{\cos\left(\alpha-\beta\right)}=6,$$

$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\frac{1}{3}$，$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，

又因为$\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=3$，所以$\sin\alpha\cos\beta=3\cos\alpha\sin\beta$，

则$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6},\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，所以$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$

$\cos\left(2\alpha+2\beta\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\beta\right)=1-2\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$.

$\cos\left(4\alpha+4\beta\right)=2\cos^2\left(2\alpha+2\beta\right)-1=2\times\frac{1}{81}-1=-\frac{79}{81}$.

故选：A

8．C

【分析】易得$2\cos 2x\left(\cos 2x-\cos\left(\frac{2014\pi^2}{x}\right)\right)=\cos 4x-1=2\cos^2 2x-2$，令

$a=\cos 2x,b=\cos\left(\frac{2014\pi^2}{x}\right)$，得到$a=1,b=1$或$a=-1,b=-1$讨论求解.

【详解】解：$2\cos 2x\left(\cos 2x-\cos\left(\frac{2014\pi^2}{x}\right)\right)=\cos 4x-1=2\cos^2 2x-2$，

令$a=\cos 2x,b=\cos\left(\frac{2014\pi^2}{x}\right)$，则$2a\left(a-b\right)=2a^2-2$，即$ab=1$，

所以$a=1,b=1$或$a=-1,b=-1$，

当$a=1,b=1$时，即$\cos 2x=1,\cos\left(\frac{2014\pi^2}{x}\right)=1$，

所以$x=k\pi,k\in Z,x=\frac{1007\pi}{k_1},k_1\in Z$，

因为$1007=1\times19\times53$，所以$x=\pi,19\pi,53\pi,1007\pi$，

当$a=-1,b=-1$时，即$\cos 2x=-1,\cos\left(\frac{2014\pi^2}{x}\right)=-1$，

则$x=\frac{\left(2k+1\right)\pi}{2},k\in Z,x=\frac{2014\pi^2}{\frac{\left(2k_1+1\right)\pi}{2}}=\frac{4028\pi}{2k_1+1},k_1\in Z$，

因为$2k+1$是奇数，所以$\frac{4028}{2k_1+1}$也是奇数，不成立；

所以方程所有正根的和为：$\pi+19\pi+53\pi+1007\pi=1080\pi$，

故选：C

9．ACD

【分析】

在复数范围内解方程得z_1,z_2，然后根据复数的概念、运算判断各选项.

【详解】$\Delta=b^2-4<0$，$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{4-b^2}\mathrm{i}}{2}$，不妨设$z_1=-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}\mathrm{i}$，$z_2=-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}\mathrm{i}$，

$\overline{z_1}=z_2$，A 正确；

$\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\sqrt{(-\frac{b}{2})^2+(\frac{\sqrt{4-b^2}}{2})^2}=1$，C 正确；

$z_1z_2=1$，$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1^2}{z_1z_2}=z_1^2=\frac{b^2-2}{2}-\frac{b\sqrt{4-b^2}}{2}\mathrm{i}$，$b\neq 0$时，$\frac{z_1}{z_2}\notin \mathrm{R}$，B 错；

$b=1$时，$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，计算得$z_1^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=z_2=\overline{z_1}$，

$z_2^2=z_1=\overline{z_2}$，$z_1^3=z_1z_2=1$，同理$z_2^3=1$，D 正确.

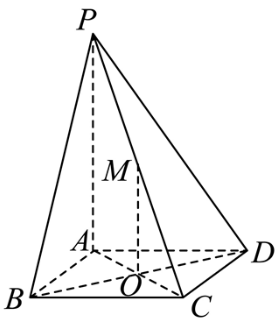
故选：ACD.

10．BD

【分析】

当点M为中点时，利用垂直关系的转化，即可判断 A；利用展开图，利用数形结合求$MB+MD$的最小值，即可判断 B；利用几何体与外接球的关系，即可求解球心，并求外接球的表面积，即可判断 C；利用异面直线的距离的转化，即可判断 D.

【详解】对于 A：连接BD，且$AC\cap BD=O$，如图所示，当M在PC中点时，



因为点O为AC的中点，所以$OM//PA$，因为$PA\perp$平面$ABCD$，

所以$OM\perp$平面$ABCD$，又因为$AC\subset$平面$ABCD$，所以$OM\perp AC$，

因为$ABCD$为正方形，所以$AC\perp BD$.

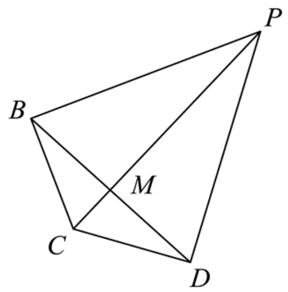
又因为$BD\cap OM=O$，且BD，$OM\subset$平面BDM，所以$AC\perp$平面BDM，

因为$BM\subset$平面BDM，所以$AC\perp BM$，所以 A 错误；

对于 B：将$\triangle PBC$和$\triangle PCD$所在的平面沿着PC展开在一个平面上，如图所示，

$\triangle PBC$和$\triangle PDC$是全等的直角三角形，$PB=PD=\sqrt{5}$，$BC=CD=1$，

连结BD，$BD\perp PC$，



则 $MB+MD$ 的最小值为 BD，直角 $\triangle PBC$ 斜边 PC 上高为 $\frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，即 $\frac{\sqrt{30}}{6}$，

直角 $\triangle PCD$ 斜边 PC 上高也为 $\frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，所以 $MB+MD$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{30}}{3}$，所以 B 正确；

对于 C：易知四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球直径为 PC，

半径 $R=\frac{1}{2}|PC|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，表面积 $S=4\pi R^2=6\pi$，所以 C 错误；

对于 D：点 M 到直线 AB 的距离的最小值即为异面直线 PC 与 AB 的距离，

因为 $AB//CD$，且 $AB\not\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，所以 $AB//$ 平面 PCD，

所以直线 AB 到平面 PCD 的距离等于点 A 到平面 PCD 的距离，过点 A 作 $AF\perp PD$，

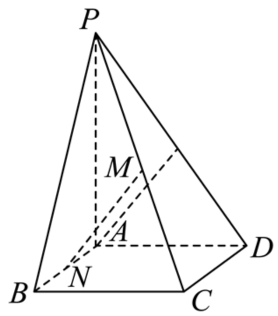
因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$，

又 $AD\perp CD$，且 $PA\cap AD=A$，$PA,AD\subset$ 面 PAD，

故 $CD\perp$ 平面 PAD，$AF\subset$ 平面 PAD，所以 $AF\perp CD$，

因为 $PD\cap CD=D$，且 PD，$CD\subset$ 平面 PCD，所以 $AF\perp$ 平面 PCD，

所以点 A 到平面 PCD 的距离，即为 AF 的长，如图所示，



在 $\text{Rt}\triangle PAD$ 中，$|PA|=2$，$|AD|=1$，可得 $|PD|=\sqrt{5}$，

所以由等面积得 $|AF|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即直线 AB 到平面 PCD 的距离等于 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 D 正确，

故选：BD.

11．ABC

【分析】