利用二级结论秒杀椭圆双曲线

题型解密

【考点目录】

考点一：椭圆焦点三角形的面积秒杀公式

考点二：中点弦问题（点差法）秒杀公式

考点三：双曲线焦点到渐近线的距离为 b

考点四：双曲线中，焦点三角形的内心 I 的轨迹方程为 $x=a(-b<y<b,y\neq 0)$.

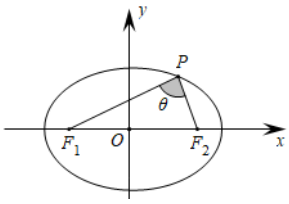
考点五：椭圆与双曲线共焦点的离心率关系秒杀公式

考点六：圆锥曲线定比分焦点弦求离心率秒杀公式

考点七：双曲线中定比分渐近线求离心率秒杀公式

【考点分类】

考点一：椭圆焦点三角形的面积为 $S=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}$（$\theta$ 为焦距对应的张角）



证明：设 $PF_1=m,PF_2=n$

$$\begin{cases}m+n=2a(1)\\(2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta(2)\\S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin\theta(3)\end{cases},\ (1)^2-(2):mn=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}\Rightarrow S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=b^2\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=b^2\tan\frac{\theta}{2}.$$

双曲线中焦点三角形的面积为 $S=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$（$\theta$ 为焦距对应的张角）

【精选例题】

例 1 （2021 年全国高考甲卷数学（理）试题）已知 F_1,F_2 为椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P，Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，则四边形 PF_1QF_2 的面积为______.

【答案】8

【解析】因为 P,Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，所以四边形 PF_1QF_2 为矩形，设 $|PF_1|=m,|PF_2|=n$，则 $m+n=8,m^2+n^2=48$，所以 $64=(m+n)^2=m^2+2mn+n^2=48+2mn$，$mn=8$，即四边形 PF_1QF_2 面积等于 8. 故答案为：8.

例 2 设 F_1，F_2 是双曲线 C:$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，O 为坐标原点，点 P 在 C 上且 $|OP|=2$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为（　　）

A. $\dfrac{7}{2}$　　B. 3　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. 2

【答案】B【解析】由已知，不妨设 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，则 $a=1$，$c=2$，$\because |OP|=1=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|$，

$\therefore$ 点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上] 即 $\triangle F_1F_2P$ 是以 P 为直角顶点的直角三角形，故 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

即 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=16$，又 $||PF_1|-|PF_2||=2a=2$，

$\therefore 4=||PF_1|-|PF_2||^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|=16-2|PF_1||PF_2|$，

解得 $|PF_1||PF_2|=6$，$\therefore S_{\triangle F_1F_2P}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|=3$，故选 B.

【跟踪训练】

题目 1 设 P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点，F_1,F_2 为左右焦点，若 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，则 P 点的纵坐标为（　　）

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　C. $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$　　D. $\pm\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

【答案】B

【分析】根据椭圆中焦点三角形的面积公式 $S=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$ 求解即可.

【详解】由题知 $S_{\triangle F_1PF_2}=9\times\tan\dfrac{60^\circ}{2}=3\sqrt{3}$. 设 P 点的纵坐标为 h，则 $\dfrac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|h|=3\sqrt{3}\Rightarrow h=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

故选：B

题目 2 设双曲线 C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\sqrt{5}$．P 是 C 上一点，且 $F_1P\perp F_2P$．若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4，则 $a=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

【答案】A 解法二：由题意知，双曲线的焦点三角形面积为 $S_{PF_1F_2}=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$．$\therefore \dfrac{b^2}{\tan 45^\circ}=4$，则 $b=2$，

又 $\because \mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$，$\therefore a=1$.

考点二：中点弦问题(点差法)秒杀公式

若椭圆与直线 l 交于 AB 两点，M 为 AB 中点，且 k_{AB} 与 k_{OM} 斜率存在时，则 $k_{AB}\cdot K_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$；(焦点在 x 轴上时)，当焦点在 y 轴上时，$k_{AB}\cdot K_{OM}=-\dfrac{a^2}{b^2}$

若 AB 过椭圆的中心，P 为椭圆上异于 AB 任意一点，$k_{PA}\cdot K_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$(焦点在 x 轴上时)，当焦点在 y 轴上时，$k_{PA}\cdot K_{PB}=-\dfrac{a^2}{b^2}$

下述证明均选择焦点在 x 轴上的椭圆来证明，其他情况形式类似.

直径问题证明：设 $P(x_0, y_0)$，$A(x_1, y_1)$，因为 AB 过原点，由对称性可知，点 $B(-x_1, -y_1)$，所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\dfrac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$. 又因为点 $P(x_0, y_0)$，$A(x_1, y_1)$ 在椭圆上，所以有 $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1(1)\\ \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1(2)\end{cases}$.

两式相减得 $\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

中点弦问题证明：设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$M(x_0, y_0)$ 则椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1(1)\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1(2)\end{cases}$ 两式相减得 $\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$

$$k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{b^2}{a^2}=\mathrm{e}^2-1.$$

双曲线中焦点在 x 轴上为 $k_{OM}\cdot k_{AB}=\dfrac{b^2}{a^2}$，焦点在 y 轴上为 $k_{OM}\cdot k_{AB}=\dfrac{a^2}{b^2}$，

【精选例题】

例 3 已知椭圆 G:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3, 0)$，过点 F 的直线交椭圆于 A，B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$，则 G 的方程为

A. $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

【答案】D

【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$，$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，① $\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$，②

①－②得 $\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，所以 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=\dfrac{b^2}{a^2}$，

又 $k_{AB}=\dfrac{0+1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，又 $9=c^2=a^2-b^2$，解得 $b^2=9$，$a^2=18$，所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$，故选 D

例 4 过双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的焦点且斜率不为 0 的直线交 C 于 A，B 两点，D 为 AB 中

点，若 $k_{AB}\cdot k_{OD}=\dfrac{1}{2}$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\sqrt{6}$　　　　B. 2　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】D

【分析】先设出直线 AB 的方程，并与双曲线 C 的方程联立，利用设而不求的方法及条件 $k_{AB}\cdot k_{OD}=\dfrac{1}{2}$ 得到关于 a、c 的关系，进而求得双曲线 C 的离心率

【详解】不妨设过双曲线 C 的焦点且斜率不为 0 的直线为 $y=k(x-c),k\neq 0$，令 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=k(x-c)\end{cases}$，整理得 $(b^2-a^2k^2)x^2+2a^2k^2cx-(a^2k^2c^2+a^2b^2)=0$

则 $x_1+x_2=\dfrac{2a^2k^2c}{a^2k^2-b^2}$，$x_1x_2=\dfrac{a^2k^2c^2+a^2b^2}{a^2k^2-b^2}$，$D\left(\dfrac{a^2k^2c}{a^2k^2-b^2},\dfrac{kb^2c}{a^2k^2-b^2}\right)$

则 $k_{OD}=\dfrac{kb^2c}{a^2k^2c}=\dfrac{b^2}{a^2k}$，由 $k_{AB}\cdot k_{OD}=\dfrac{1}{2}$，可得 $\dfrac{b^2}{a^2k}\cdot k=\dfrac{1}{2}$

则有 $a^2=2b^2$，即 $3a^2=2c^2$，则双曲线 C 的离心率 $\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故选：$D$

例 5 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，上、下顶点分别为 B_1，B_2．点 M 为 C 上不在坐标轴上的任意一点，且 MA_1，MA_2，MB_1，MB_2 四条直线的斜率之积大于 $\dfrac{1}{9}$，则 C 的离心率可以是

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　　C. $\dfrac{2}{3}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

【答案】AC

【分析】根据椭圆的概念、标准方程及简单几何性质，结合题意即可求解.

【详解】设 $M(x_0,y_0)$，依题意可得 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，则 $y_0^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)$，$x_0^2=\dfrac{a^2}{b^2}(b^2-y_0^2)$，又 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B_1(0,b)$，$B_2(0,-b)$，所以 $k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}\cdot k_{MB_1}\cdot k_{MB_2}=\dfrac{y_0}{x_0+a}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-a}\cdot\dfrac{y_0-b}{x_0}\cdot\dfrac{y_0+b}{x_0}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}\cdot\dfrac{y_0^2-b^2}{x_0^2}=\left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)^2>\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{b^2}{a^2}>\dfrac{1}{3}$，从而 $\mathrm{e}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}\in\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$．故选：$AC$.

【跟踪训练】

题目 3 已知 M 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点，A 为双曲线右支上一点，若点 A 关于双曲线中心 O 的对称点为 B，设直线 MA、MB 的倾斜角分别为 α、β，且 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\dfrac{1}{4}$，则双曲线的离

心率为（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】D

【分析】设出 A,B 坐标，根据题意得 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\dfrac{1}{4}$，代入斜率公式，由 A 点在双曲线上，消元整理得到 a，b 的关系，进一步求得双曲线的离心率.

【详解】设 $A(x_0,y_0)$，则 $B(-x_0,-y_0)$，因为 $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{4}$，即 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\dfrac{1}{4}$，由 $M(a,0)$，所以 $\dfrac{y_0-0}{x_0-a}\cdot\dfrac{-y_0-0}{-x_0-a}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\dfrac{1}{4}$，因为 $\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $y_0^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$，即 $\dfrac{\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)}{x_0^2-a^2}=\dfrac{1}{4}$，得 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$，所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，即 $b=\dfrac{1}{2}a$，又 $c^2=a^2+b^2$，所以 $c^2=a^2+\dfrac{1}{4}a^2$，即 $c^2=\dfrac{5}{4}a^2$，所以 $\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故双曲线的离心率为 $\mathrm{e}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 故选：$D$.

题目 4 已知 A，B，P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上不同的三点，且 A，B 连线经过坐标原点，若直线 PA，PB 的斜率乘积为 $\dfrac{4}{3}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

【答案】D

【分析】设 $A(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，根据对称性，知 $B(-x_1,-y_1)$，然后表示出 $k_{PA}\cdot k_{PB}$，又由于点 A，P 在双曲线上，所以将其坐标代入方程中，两式相减，结合前面的式子可得 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{4}{3}$，化简可求出离心率

【详解】设 $A(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，根据对称性，知 $B(-x_1,-y_1)$，所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$.

因为点 A，P 在双曲线上，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减，得 $\dfrac{x_2^2-x_1^2}{a^2}=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{b^2}$，所以 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{4}{3}$，所以 $\mathrm{e}^2=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=\dfrac{7}{3}$，所以 $\mathrm{e}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. 故选：$D$

题目 5 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过左焦点 F_1 作斜率为 2 的直线与双曲线交于 A，B 两点，P 是 AB 的中点，O 为坐标原点，若直线 OP 的斜率为 $\dfrac{1}{4}$，则双曲线的离心率是（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

【答案】A

【分析】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$P(m,n)$，利用点差法，结合直线的斜率公式可求出 b^2，从而可求出 c，进而可求出离心率

【详解】$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$P(m,n)$，则 $\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{4}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$，两式相减得 $\frac{1}{4}(x_1-x_2)(x_1+x_2)-\frac{1}{b^2}(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，所以 $\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=\frac{b^2}{4}$，因为 P 是 AB 的中点，

所以 $x_1+x_2=2m$，$y_1+y_2=2n$，因为直线 OP 的斜率为 $\frac{1}{4}$，所以 $\frac{n}{m}=\frac{1}{4}$，因为过左焦点 F_1 作斜率为 2 的直线与双曲线交于 A，B 两点，所以 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{2n}{2m}=\frac{b^2}{4}$，$2\times\frac{1}{4}=\frac{b^2}{4}$，得 $b^2=2$，

所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$，所以离心率为 $\mathrm{e}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 故选：A

考点三：双曲线焦点到渐近线的距离为 b

【精选例题】

例 1 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点 $F(2,0)$ 到其渐近线的距离为 $\sqrt{3}$，则双曲线的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm3x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$　　C. $y=\pm\frac{1}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

【答案】B

【分析】由题可得 $b=\sqrt{3}$，$a=1$，即得.

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点 $(c,0)$ 到渐近线：$y=\frac{b}{a}x$，即 $bx-ay=0$ 的距离为：$d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc}{c}=b=\sqrt{3}$，而 $c=2$，从而 $a=1$，故渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 即 $y=\pm\sqrt{3}x$. 故选：B.

例 2 已知 F 是双曲线 C：$x^2-my^2=3m(m>0)$ 的一个焦点，则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为

A. $\sqrt{3}$　　B. 3　　C. $\sqrt{3}m$　　D. $3m$

【答案】A【解析】双曲线方程为 $\frac{x^2}{3m}-\frac{y^2}{3}=1$，焦点 F 到一条渐近线的距离为 $b=\sqrt{3}$，故选 A.

【跟踪训练】

题目 1 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A，B 两点. 设 A，B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2，且 $d_1+d_2=6$，则双曲线的方程

为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$

【答案】C

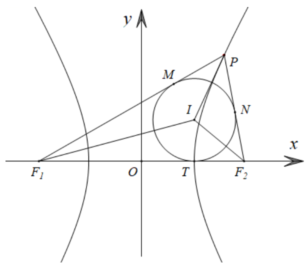
【解析】设双曲线的右焦点坐标为 $F(c,0)(c>0)$，则 $x_A=x_B=c$，由 $\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可得：$y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，不妨设：$A\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right),B\left(c,-\dfrac{b^2}{a}\right)$，双曲线的一条渐近线方程为：$bx-ay=0$，据此可得：$d_1=\dfrac{|bc-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{bc-b^2}{c}$，$d_2=\dfrac{|bc+b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{bc+b^2}{c}$，则 $d_1+d_2=\dfrac{2bc}{c}=2b=6$，则 $b=3,b^2=9$，双曲线的离心率：$\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{9}{a^2}}=2$，据此可得：$a^2=3$，则双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}=1$，故选 C.

题目 2 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线均和圆 C：$x^2+y^2-6x+5=0$ 相切，且双曲线的右焦点为圆 C 的圆心，则该双曲线的方程为

A. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$

【答案】A【解析】圆 $C:(x-3)^2+y^2=4$，$c=3$，而 $\dfrac{3b}{c}=2$，则 $b=2,a^2=5$，故选 A.

考点四：双曲线中，焦点三角形的内心 I 的轨迹方程为 $x=a(-b<y<b,y\neq 0)$.



【精选例题】

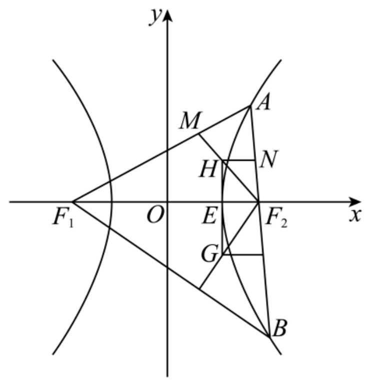
例 3 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左 右焦点分别为 F_1,F_2，离心率为 2，焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{6}$. 过 F_2 作直线 l 交双曲线 C 的右支于 A,B 两点，若 H,G 分别为 $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle BF_1F_2$ 的内心，则 $|HG|$ 的取值范围为（　　）

A. $[2\sqrt{2},4]$　　B. $[\sqrt{3},2)$　　C. $\left[2,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$　　D. $\left[2\sqrt{2},\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$

【答案】D

【详解】由题意，在 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 中，根据焦点到渐近线的距可得 $b=\sqrt{6}$，离心率为 2，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{6}{a^2}}=2$,解得:$a=\sqrt{2}$,$\therefore c=\sqrt{b^2+a^2}=2\sqrt{2}$



$\therefore$双曲线的方程为 $C:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$. 记$\triangle AF_1F_2$的内切圆在边 AF_1, AF_2, F_1F_2上的切点分别为 M,N,E,则 H, E 横坐标相等 $|AM|=|AN|$, $|F_1M|=|F_1E|$, $|F_2N|=|F_2E|$,

由 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,即 $|AM|+|MF_1|-(|AN|+|NF_2|)=2a$,得 $|MF_1|-|NF_2|=2a$,即 $|F_1E|-|F_2E|=2a$,记 H 的横坐标为 x_0,则 $E(x_0,0)$,于是 $x_0+c-(c-x_0)=2a$,得 $x_0=a$,

同理内心 G 的横坐标也为 a,故 $HG\perp x$ 轴. 设直线 AB 的倾斜角为 θ,则 $\angle OF_2G=\frac{\theta}{2}$, $\angle HF_2O=90^\circ-\frac{\theta}{2}$($Q$ 为坐标原点),在$\triangle HF_2G$ 中, $|HG|=(c-a)\left[\tan\frac{\theta}{2}+\tan\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)\right]=(c-a)\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)=(c-a)\cdot\frac{2}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}$,

由于直线 l 与 C 的右支交于两点,且 C 的一条渐近线的斜率为 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,倾斜角为 60°, $\therefore 60^\circ<\theta<120^\circ$,即 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta\leqslant 1$, $\therefore |HG|$ 的范围是 $\left[2\sqrt{2},\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$. 故选:$D$.

例 4 (多选题) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别 F_1、F_2,具有公共焦点的椭圆与双曲线在第一象限的交点为 P,双曲线和椭圆的离心率分别为 e_1,e_2,$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心为 I,过 F_2 作直线 PI 的垂线,垂足为 D,则 (　　)

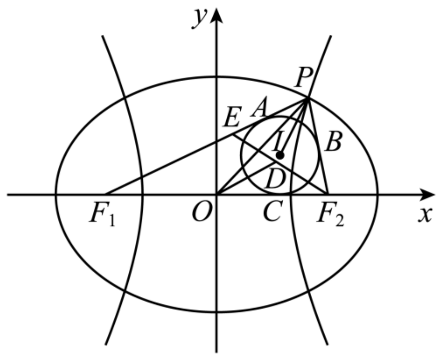
A. I 到 y 轴的距离为 a　　　　B. 点 D 的轨迹是双曲线

C. 若 $|OP|=|F_1F_2|$,则 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=5$　　　　D. 若 $S_{\triangle IPF_1}-S_{\triangle IPF_2}\geqslant\frac{1}{2}S_{\triangle IF_1F_2}$,则 $1<e_1\leqslant 2$

【答案】ACD

【详解】设圆 I 与$\triangle PF_1F_2$ 三边 PF_1,PF_2,F_1F_2 的切点为 A,B,C,

$|F_1C|=|F_1A|=|PF_1|-|PB|=|PF_1|-(|PF_2|-|F_2B|)=2a+|F_2C|$,又 $|F_1C|+|F_2C|=2c$,故 $|F_2C|=c-a$,故 $|OC|=a$,所以 I 到 y 轴的距离为 a,故 A 正确;过 F_2 作直线 PI 的垂线,垂足为 D,延长 F_2I 交 PF_1 于点 E,因为$\triangle PED\cong\triangle PF_2D$,则 D 为 F_2E 的中点且 $|PF_2|=|PE|$,于是 $|OD|=\frac{1}{2}|F_1E|=\frac{1}{2}(|PF_1|-|PE|)=\frac{1}{2}(|PF_1|-|PF_2|)=a$,



故点 D 的轨迹是在以 O 为圆心,半径为 a 的圆上,故 B 不正确;

设椭圆的长半轴长为 a_1,它们的半焦距为 c,并设 $|PF_1|=m$, $|PF_2|$

$=n$,

根据椭圆和双曲线的定义可得：$m+n=2a_1, m-n=2a$，

所以 $m=a_1+a, n=a_1-a$，

在 $\triangle POF_1$ 中，由余弦定理得：$|PF_1|^2=|OF_1|^2+|OP|^2-2|OF_1||OP|\cos\angle POF_1$，即 $m^2=c^2+4c^2-2\times c\times 2c\cos\angle POF_1$，

在 $\triangle POF_2$ 中，由余弦定理得：$|PF_2|^2=|OF_2|^2+|OP|^2-2|OF_2||OP|\cos\angle POF_2$，即 $n^2=c^2+4c^2-2\times c\times 2c\cos\angle POF_2$，由 $\angle POF_2=\pi-\angle POF_1$，两式相加，则 $n^2+m^2=10c^2$，又 $n^2+m^2=2a_1^2+2a^2$，所以 $2a_1^2+2a^2=10c^2$，

所以 $a_1^2+a^2=5c^2$，所以 $\frac{a_1^2}{c^2}+\frac{a^2}{c^2}=5$，即 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=5$，故 C 正确；$S_{\triangle IPF_1}-S_{\triangle IPF_2}\geqslant\frac{1}{2}S_{\triangle IF_1F_2}$，即 $|PF_1|-|PF_2|\geqslant c$，所以 $2a\geqslant c$，即 $1<e_1\leqslant 2$，故 D 正确. 故选：ACD.

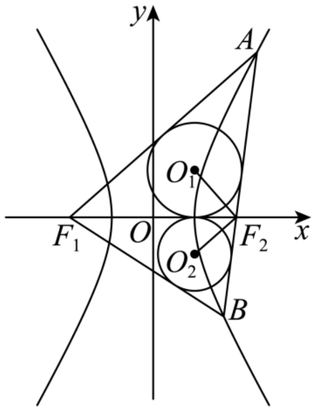
例 5 (多选题) 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线与双曲线的右支交于 A, B 两点，记 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆 O_1 的面积为 S_1，$\triangle BF_1F_2$ 的内切圆 O_2 的面积为 S_2，则 (　　)

A. 圆 O_1 和圆 O_2 外切　　B. 圆心 O_1 在直线 AO 上

C. $S_1\cdot S_2=\pi^2$　　D. S_1+S_2 的取值范围是 $[2\pi, 3\pi]$

【答案】AC

【详解】双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的 $a=1, b=\sqrt{3}, c=2$，渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$、$y=-\sqrt{3}x$，两渐近线倾斜角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$，设圆 O_1 与 x 轴切点为 G 过 F_2 的直线与双曲线的右支交于 A, B 两点，可知直线 AB 的倾斜角取值范围为 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$，$O_1$、$O_2$ 的的横坐标为 x，则由双曲线定义 $||AF_1|-|AF_2||=2a$，所以由圆的切线长定理知 $[x-(-c)]-(c-x)=2a$，所以 $x=a$. O_1、O_2 的横坐标均为 a，即 O_1O_2 与 x 轴垂直. 故圆 O_1 和圆 O_2 均与 x 轴相切于 $G(1,0)$，圆 O_1 和圆 O_2 两圆外切. 选项 A 正确；由双曲线定义知，$\triangle AF_1F_2$ 中，$AF_1>AF_2$，则 AO 只能是 $\triangle AF_1F_2$ 的中线，不能成为 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线，则圆心 O_1 一定不在直线 AO 上. 选项 B 错误；在 $\triangle O_1O_2F_2$ 中，$\angle O_1F_2O_2=90^\circ$，$O_1O_2\perp F_2G$，则由直角三角形的射影定理可知 $F_2G^2=O_1G\cdot O_2G$，即 $(c-a)^2=r_1\cdot r_2$ 则 $r_1\cdot r_2=1$，故 $S_1\cdot S_2=\pi r_1^2\cdot\pi r_2^2=\pi^2$. 选项 C 正确；



由直线 AB 的倾斜角取值范围为 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，可知 $\angle AF_2F_1$ 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，则 $\angle O_1F_2F_1$ 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，故 $r_1=F_2G\cdot\tan\angle O_1F_2F_1=\tan\angle O_1F_2F_1\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$，又 $r_1\cdot r_2=1$，则 $S_1+S_2=\pi(r_1^2+r_2^2)$ $=\pi\left(r_1^2+\frac{1}{r_1^2}\right)$，$r_1\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$

令 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，$x\in\left(\frac{1}{3},3\right)$，则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 单调递减，在 $(1,3)$ 单调递增.$f(1)=2$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}$，$f(3)=\frac{10}{3}$，

$f(x)=x+\frac{1}{x}$，$x\in\left(\frac{1}{3},3\right)$ 值域为 $\left[2,\frac{10}{3}\right)$ 故 $S_1+S_2=\pi\left(r_1^2+\frac{1}{r_1^2}\right)$，$r_1\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$ 的值域为 $\left[2\pi,\frac{10}{3}\pi\right)$.

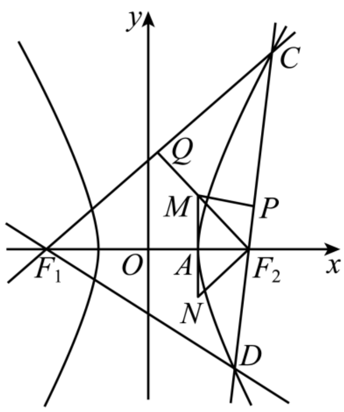
选项 D 错误. 故选：AC.

【跟踪训练】

题目 3 已知双曲线方程是 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，过 F_2 的直线与双曲线右支交于 C，D 两点(其中 C 点在第一象限)，设点 M、N 分别为 $\triangle CF_1F_2$、$\triangle DF_1F_2$ 的内心，则 $|MN|$ 的范围是______.

【答案】$\left[2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

【详解】 因 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，故 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，



如图，过 M 点分别作 $MA\perp F_1F_2$，$MP\perp F_2C$，$MQ\perp F_1C$，垂足分别为 A，P，Q，

因 M 为 $\triangle CF_1F_2$ 的内心，所以 $|AF_1|-|AF_2|=|QF_1|-|PF_2|=|CF_1|-|CF_2|=2a=2$，

故 A 点也在双曲线上，即 A 为双曲线的右顶点，同理 $NA\perp F_1F_2$，所以 M，A，N 三点共线，设直线 CD 的倾斜角为 θ，因双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，根双曲线的对称性，不妨设 $\frac{\pi}{3}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，因 $|AF_2|=c$

$-a=2-1=1$,所以 $|MA|=\dfrac{|MA|}{|AF_1|}=\tan\angle MF_2A=\tan\dfrac{\pi-\theta}{2}$, $|NA|=\dfrac{|NA|}{|NF_1|}=\tan\angle NF_2A=\tan\dfrac{\theta}{2}$,

所以 $|MN|=|MA|+|NA|=\tan\dfrac{\pi-\theta}{2}+\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\frac{\pi-\theta}{2}}{\cos\frac{\pi-\theta}{2}}+\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2}{\sin\theta}$,

因 $\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\sin\theta\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,所以 $\dfrac{2}{\sin\theta}\in\left[2,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$,故答案为:$\left[\mathbf{2},\dfrac{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\right)$

题目 4 (多选题) 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2,离心率为2,焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{6}$. 过 F_2 作直线 l 交双曲线 C 的右支于 A、B 两点,若 H、G 分别为 $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle BF_1F_2$ 的内心,则 (　　)

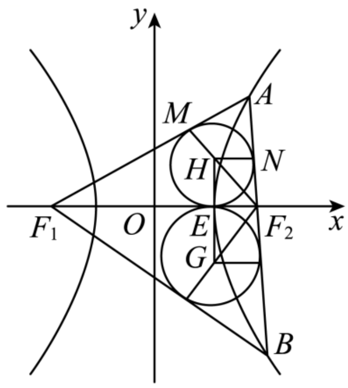
A. C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

B. 点 H 与点 G 均在同一条定直线上

C. 直线 HG 不可能与 l 平行

D. $|HG|$ 的取值范围为 $\left[2\sqrt{2},\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$

【答案】ABD



【详解】设双曲线 C 半焦距为 c,双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$,即 $bx\pm ay=0$,双曲线 C 的右焦点 $F_2(c,0)$ 到渐近线的距离为 $\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+a^2}}=b=\sqrt{6}$,由题意知 $\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{6}{a^2}}=2$,所以 $a^2=2$,所以 $c=\sqrt{b^2+a^2}=2\sqrt{2}$,

故双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{6}=1$,故渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$,故 A 正确;对于 B 选项,记 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆在边 AF_1、AF_2、F_1F_2 上的切点分别为 M、N、E, 由切线长定理可得 $|AM|=|AN|$, $|F_1M|=|F_1E|$, $|F_2N|=|F_2E|$,由 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,即 $|AM|+|MF_1|-(|AN|+|NF_2|)=2a$,

得 $|MF_1|-|NF_2|=2a$,即 $|F_1E|-|F_2E|=2a$,记 H 的横坐标为 x_0,则 $E(x_0,0)$,于是 $x_0+c-(c-x_0)=2a$,得 $x_0=a$,

同理内心 G 的横坐标也为 a,故 $HG\perp x$ 轴,即 H、G 均在直线 $x=a$ 上,故 B 正确;对于 C 选项,当 l 与 x 轴垂直时,$HG\,/\!/\,l$,故 C 错误;对于 D 选项,设直线 AB 的倾斜角为 θ,则 $\angle OF_2G=\dfrac{\theta}{2}$, $\angle HF_2O=90^\circ-\dfrac{\theta}{2}$($O$ 为坐标原点),在 $\triangle HF_2G$ 中, $|HG|=|EG|+|HE|=(c-a)\left[\tan\dfrac{\theta}{2}+\tan\left(90^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]=$

$(c-a)\left[\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\sin\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}\right]$.

$(c-a)\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)=(c-a)\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=(c-a)\cdot\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}$,由于直线 l 与 C 的右支交于两点,且 C 的一条渐近线的斜率为 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$,倾斜角为 $60°$,结合图形可知 $60°<\theta<120°$,即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta\leqslant 1$,所以,$|HG|=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}\in\left[2\sqrt{2},\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$,故 D 正确. 故选:ABD.

考点五:已知具有公共焦点 F_1,F_2 的椭圆与双曲线的离心率分别为 e_1,e_2,P 是它们的一个交点,且 $\angle F_1PF_2=2\theta$,则有 $\left(\dfrac{\sin\theta}{e_1}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\theta}{e_2}\right)^2=1$.

【精选例题】

例 6 已知 F_1,F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点,P 是它们的一个公共点,且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$,则椭圆和双曲线离心率倒数之和的最大值为(　　)

A. $\dfrac{4}{3}$　　　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　　　C. 4　　　　D. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

【答案】B

【分析】根据双曲线和椭圆的性质和关系,结合余弦定理即可得到结论.

【详解】设椭圆的长半轴为 a,双曲线的实半轴为 $a_1(a>a_1)$,半焦距为 c,

由椭圆和双曲线的定义可知,设 $|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,$|F_1F_2|=2c$,

椭圆和双曲线的离心率分别为 $e_1=\dfrac{c}{a}$,$e_2=\dfrac{c}{a_1}$,

因 P 是它们的一个公共点,且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$,则由余弦定理可得:

$4c^2=m^2+n^2-2mn\cos\dfrac{\pi}{3}$ …… ①

在椭圆中,由定义知 $m+n=2a$,①式化简为:$4c^2=4a^2-3mn$ …… ②

在双曲线中,由定义知 $|m-n|=2a_1$,①式化简为:$4c^2=4a_1^2+mn$ …… ③

由②③两式消去 mn 得:$16c^2=4a^2+12a_1^2$,等式两边同除 c^2 得 $4=\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{3a_1^2}{c^2}$,

即 $4=\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{3}{e_2^2}$,

由柯西不等式得 $\left(\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{3}{e_2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\geqslant\left(\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{\sqrt{3}}{e_2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$,

$\therefore\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

故选:B

例 7 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$ 与双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$ 有公共焦点 F_1(左焦

点)，F_2(右焦点)，且两条曲线在第一象限的交点为 P，若 $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形，C_1，C_2 的离心率分别为 e_1 和 e_2，且 $e_2=2$，则（　　）

A. $a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2$　　B. $\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=2$　　C. $e_1=\frac{2}{5}$　　D. $\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{4}$

【答案】ACD

【分析】A 由已知共焦点及椭圆、双曲线参数的关系判断；B、C 由椭圆、双曲线的定义可得 $|PF_1|=2a_1-|PF_2|=2a_2+|PF_2|$，而 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，即可判定；D 记 $\angle F_1PF_2=\theta$，应用余弦定理可得 $\cos\theta=\frac{e_1^2+e_2^2-2e_1^2e_2^2}{e_2^2-e_1^2}$，由已知及 B、C 分析，即可判断.

【详解】设 C_1，C_2 的焦距为 $2c$，由 C_1，C_2 共焦点知：$a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2=c^2$，故 A 正确；

$\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形知 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，由 P 在第一象限知：$|PF_1|=2a_1-|PF_2|=2a_2+|PF_2|$，即 $2a_1-2c=2a_2+2c$，即 $a_1-a_2=2c$，即 $\frac{1}{e_1}-\frac{1}{e_2}=2$，故 B 错；

由 $e_2=2$ 且 $\frac{1}{e_1}-\frac{1}{e_2}=2$，易得 $e_1=\frac{2}{5}$，故 C 正确；

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，记 $\angle F_1PF_2=\theta$，根据定义 $\begin{cases}PF_1+PF_2=2a_1\\PF_1-PF_2=2a_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}PF_1=a_1+a_2\\PF_2=a_1-a_2\end{cases}$.

由余弦定理有 $(2c)^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-2(a_1+a_2)(a_1-a_2)\cos\theta$.

整理得 $2c^2=a_1^2+a_2^2-(a_1^2-a_2^2)\cos\theta$，两边同时除以 c^2，可得 $2=\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}-\left(\frac{1}{e_1^2}-\frac{1}{e_2^2}\right)\cos\theta$，故 $\cos\theta=\frac{e_1^2+e_2^2-2e_1^2e_2^2}{e_2^2-e_1^2}$.

将 $e_1=\frac{2}{5}$，$e_2=2$ 代入，得 $\cos\theta=\frac{3}{4}$. 故 D 正确

故选：ACD.

【跟踪训练】

题目 5 已知 F 是椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，A 为椭圆 C_1 的下顶点，双曲线 C_2：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$ 与椭圆 C_1 共焦点，若直线 AF 与双曲线 C_2 的一条渐近线平行，C_1，C_2 的离心率分别为 e_1，e_2，则 $\frac{1}{e_1}+\frac{2}{e_2}$ 的最小值为______.

【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】根据直线 AF 与 C_2 的一条渐近线平行，得到 $\frac{b}{c}=\frac{n}{m}$，再结合双曲线与椭圆共焦点得到 $e_1e_2=1$，再利用基本不等式求解.

【详解】解：设 C_1 的半焦距为 $c(c>0)$，则 $F(c,0)$，又 $A(0,-b)$，