浙江省杭州市北斗联盟2023-2024学年高三上数学期末监测模拟试题

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用2B铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

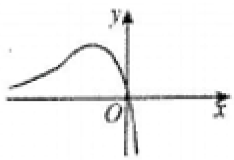
1．若直线$y=kx-2$与曲线$y=1+3\ln x$相切，则$k=$（　）

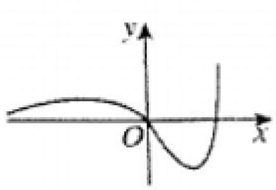
A． 3　　**B．** $\frac{1}{3}$　　**C．** 2　　**D．** $\frac{1}{2}$

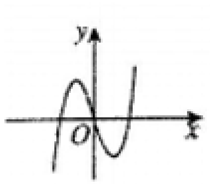
2．设i是虚数单位，$a\in R$，$\frac{5+ai}{a+i}=3-2i$，则$a=$（　　）

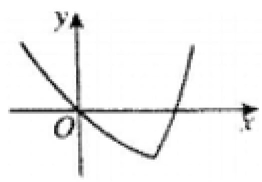
A． -2　　**B．** -1　　**C．** 1　　**D．** 2

3．当$a>0$时，函数$f\left(x\right)=\left(x^{2}-ax\right)e^{x}$的图象大致是（　　）

A．


B．


C．


D．


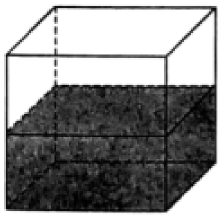
4．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{b}$=(1，$\sqrt{3}$)，且$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为$\frac{1}{2}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于（　　）

A． 2　　**B．** 1　　**C．** $\frac{1}{2}$　　**D．** 0

5．已知定义在R上的奇函数$f(x)$和偶函数$g(x)$满足$f(x)+g(x)=a^{x}-a^{-x}+2$（$a>0$且$a\neq 1$），若$g(2)=a$，则函数$f\left(x^{2}+2x\right)$的单调递增区间为（　　）

A． $(-1,1)$　　**B．** $(-\infty,1)$　　**C．** $(1,+\infty)$　　**D．** $(-1,+\infty)$

6．一个封闭的棱长为2的正方体容器，当水平放置时，如图，水面的高度正好为棱长的一半．若将该正方体绕下底面（底面与水平面平行）的某条棱任意旋转，则容器里水面的最大高度为（　　）



A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{2}$

7．已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{m^x}{m^x+1}+2018\tan x+x^2\left(m>0,m\neq 1\right)$，若$f\left(1\right)=3$，则$f\left(-1\right)$等于（　　）

A．-3　　B．-1　　C．3　　D．0

8．在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　B．$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

9．若复数z满足$\left(1+i\right)z=\left|3+4i\right|$，则$z$对应的点位于复平面的（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

10．已知函数$f(x)=\ln x+ax+b$的图象在点$(1,a+b)$处的切线方程是$y=3x-2$，则$a-b=$（　　）

A．2　　B．3　　C．-2　　D．-3

11．已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$A\left(\dfrac{1}{3},0\right)$为$f\left(x\right)$图象的对称中心，若图象上相邻两个极值点$x_1$，$x_2$满足$\left|x_1-x_2\right|=1$，则下列区间中存在极值点的是（　　）

A．$\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$　　B．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　C．$\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$　　D．$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

12．已知向量$\vec{a}=(0,2)$，$\vec{b}=\left(2\sqrt{3},x\right)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则$x=$（　　）

A．-2　　B．2　　C．1　　D．-1

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知A、B、C、P是同一球面上的四个点，其中$PA\perp$平面ABC，$\triangle ABC$是正三角形，$PA=AB=3$，则该球的表面积为______.

14．在直角坐标系中，某等腰直角三角形的两个顶点坐标分别为$(1,1),(2,2)$，函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,0<\omega<\dfrac{\pi}{2},\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的图象经过该三角形的三个顶点，则$f\left(x\right)$的解析式为

$f(x)=$__________.

15．二项式$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^n$的展开式中所有项的二项式系数之和是 **64**，则展开式中的常数项为______.

16．某中学数学竞赛培训班共有 **10** 人，分为甲、乙两个小组，在一次阶段测试中两个小组成绩的茎叶图如图所示，若甲组 **5** 名同学成绩的平均数为 **81**，乙组 **5** 名同学成绩的中位数为 **73**，则 $x-y$ 的值为________.

甲		乙
	6	7
7　2	7	0　y
6　x	8	5
0	9	1

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数

$$□(□)=□□^□-\frac{□}{2}□^2-□□$$

（1）讨论$□(□)$的单调性；

（2）当$□\geq -1$时，$□(□)+\frac{□}{2}□^2-□+1\geq 0$，求$□$的取值范围.

18．（12 分）已知函数$f(x)=(2-x)e^x+ax$.

（Ⅰ）已知$x=2$是$f(x)$的一个极值点，求曲线$f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程

（Ⅱ）讨论关于x的方程$f(x)=a\ln x(a\in R)$根的个数.

19．（12 分）已知动圆M经过点$N(2,0)$，且动圆M被y轴截得的弦长为4，记圆心M的轨迹为曲线C.

（1）求曲线C的标准方程；

（2）设点M的横坐标为x_0，A，B为圆M与曲线C的公共点，若直线AB的斜率$k=1$，且$x_0\in[0,4]$，求x_0的值.

20．（12 分）某调查机构对某校学生做了一个是否同意生"二孩"抽样调查，该调查机构从该校随机抽查了 **100** 名不同性别的学生，调查统计他们是同意父母生"二孩"还是反对父母生"二孩"，现已得知 **100** 人中同意父母生"二孩"占 **60%**，统计情况如下表：

	同意	不同意	合计
男生	***a***	**5**	

女生	**40**	***d***	
合计			**100**

（1）求 *a*，*d* 的值，根据以上数据，能否有 97.5%的把握认为是否同意父母生“二孩”与性别有关?请说明理由；

（2）将上述调查所得的频率视为概率，现在从所有学生中，采用随机抽样的方法抽取 4 位学生进行长期跟踪调查，记被抽取的 4 位学生中持“同意”态度的人数为 *X*，求 *X* 的分布列及数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(k^2\ge k_0)$	**0.15**	**0.100**	**0.050**	**0.025**	**0.010**
k_0	**2.072**	**2.706**	**3.841**	**5.024**	**6.635**

21.（12 分）设点 $F\left(1,0\right)$，动圆 P 经过点 F 且和直线 $x=-1$ 相切.记动圆的圆心 P 的轨迹为曲线 W.

（1）求曲线 W 的方程；

（2）过点 $M\left(0,2\right)$ 的直线 l 与曲线 W 交于 A、B 两点，且直线 l 与 x 轴交于点 C，设 $\overrightarrow{MA}=\alpha\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{MB}=\beta\overrightarrow{BC}$，求证：$\alpha+\beta$ 为定值.

22.（10 分）已知函数 $f(x)=x^3-3ax+e,g(x)=1-\ln x$，其中 *e* 为自然对数的底数.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）用 $\max\{m,n\}$ 表示 m,n 中较大者，记函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\},(x>0)$.若函数 $h(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恰有 2 个零点，求实数 *a* 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**A**

【解析】

设切点为(x_0,kx_0-2)，对$y=1+3\ln x$求导，得到$y'=\frac{3}{x}$，从而得到切线的斜率$k=\frac{3}{x_0}$，结合直线方程的点斜式化简得切线方程，联立方程组，求得结果.

【详解】

设切点为(x_0,kx_0-2)，

$\because y'=\frac{3}{x}$，$\therefore\begin{cases}\frac{3}{x_0}=k①,\\ kx_0-2=1+3\ln x_0②,\end{cases}$

由①得$kx_0=3$，

代入②得$1+3\ln x_0=1$，

则$x_0=1$，$k=3$，

故选 A.

【点睛】

该题考查的是有关直线与曲线相切求参数的问题，涉及到的知识点有导数的几何意义，直线方程的点斜式，属于简单题目.

2、C

【解析】

由$\frac{5+ai}{a+i}=3-2i$，可得$5+ai=(a+i)(3-2i)=3a+2+(3-2a)i$，通过等号左右实部和虚部分别相等即可求出$a$的值.

【详解】

解：Q $\frac{5+ai}{a+i}=3-2i$，$\therefore 5+ai=(a+i)(3-2i)=3a+2+(3-2a)i$

$\therefore\begin{cases}5=3a+2\\ 3-2a=a\end{cases}$，解得：$a=1$.

故选:C.

【点睛】

本题考查了复数的运算，考查了复数相等的涵义.对于复数的运算类问题，易错点是把i^2 当成1进行运算.

3、B

【解析】

由 $f\left(x\right)=0$，解得 $x^2-ax=0$，即 $x=0$ 或 $x=a$，$\because a>0,\therefore$ 函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点，$\therefore A,C$，不正确，设 $a=1$，

则 $f\left(x\right)=\left(x^2-x\right)e^x,\therefore f'\left(x\right)=\left(x^2+x-1\right)e^x$，由 $f'\left(x\right)=\left(x^2+x-1\right)e^x>0$，解得 $x>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，

由 $f'\left(x\right)=\left(x^2-1\right)e^x<0$，解得：$-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，即 $x=-1$ 是函数的一个极大值点，$\therefore D$ 不成立，排除

D，故选 **B.**

【方法点睛】本题通过对多个图象的选择考察函数的解析式、定义域、值域、单调性，导数的应用以及数学化归思想，属于难题.这类题型也是近年高考常见的命题方向，该题型的特点是综合性较强较强、考查知识点较多，但是并不是无路可循.解答这类题型可以从多方面入手，根据函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、特殊点以及

$x\to 0^+,x\to 0^-,x\to +\infty,x\to -\infty$ 时函数图象的变化趋势，利用排除法，将不合题意选项一一排除.

4、**B**

【解析】

先求出 $\left|\vec{b}\right|$，再利用投影公式 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$ 求解即可.

【详解】

解：由已知得 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1+3}=2$，

由 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\dfrac{1}{2}$，得 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{1}{2}$，

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{b}\right|=1$.

故答案为：**B.**

【点睛】

本题考查向量的几何意义，考查投影公式的应用，是基础题.

5、**D**

【解析】

根据函数的奇偶性用方程法求出 $f(x),g(x)$ 的解析式，进而求出 a，再根据复合函数的单调性，即可求出结论.

【详解】

依题意有 $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2$， ①

$f(-x)+g(-x)=a^{-x}-a^x+2=-f(x)+g(x)$， ②

①－②得 $f(x)=a^{x}-a^{-x},g(x)=2$，又因为 $g(2)=a$，

所以 $a=2,f(x)=2^{x}-2^{-x}$， $f(x)$ 在 R 上单调递增，

所以函数 $f\left(x^{2}+2x\right)$ 的单调递增区间为 $(-1,+\infty)$.

故选:**D.**

【点睛】

本题考查求函数的解析式、函数的性质，要熟记复合函数单调性判断方法，属于中档题.

6、**B**

【解析】

根据已知可知水面的最大高度为正方体面对角线长的一半，由此得到结论．

【详解】

正方体的面对角线长为 $2\sqrt{2}$，又水的体积是正方体体积的一半，

且正方体绕下底面（底面与水平面平行）的某条棱任意旋转，

所以容器里水面的最大高度为面对角线长的一半，

即最大水面高度为 $\sqrt{2}$，故选 **B.**

【点睛】

本题考查了正方体的几何特征，考查了空间想象能力，属于基础题．

7、**D**

【解析】

分析：因为题设中给出了 $f\left(1\right)$ 的值，要求 $f\left(-1\right)$ 的值，故应考虑 $f\left(x\right),f\left(-x\right)$ 两者之间满足的关系.

详解：由题设有 $f\left(-x\right)=\dfrac{m^{-x}}{m^{-x}+1}-2018\tan x+x^{2}=\dfrac{1}{m^{x}+1}-2018\tan x+x^{2}$，

故有 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=1+2x^{2}$，所以 $f\left(1\right)+f\left(-1\right)=3$，

从而 $f\left(-1\right)=0$，故选 **D.**

点睛：本题考查函数的表示方法，解题时注意根据问题的条件和求解的结论之间的关系去寻找函数的解析式要满足的关系.

8、**B**

【解析】

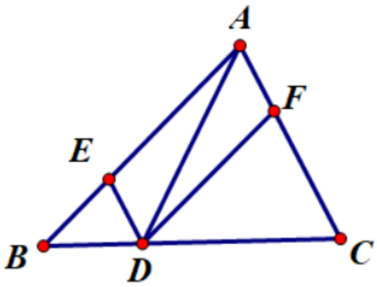
在 AB,AC 上分别取点 E、F ,使得 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，

可知 $AEDF$ 为平行四边形，从而可得到 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，即可得到答案.

【详解】

如下图，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，在 AB, AC 上分别取点 E、F，使得 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，

则 $AEDF$ 为平行四边形，故 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，故答案为 **B.**



【点睛】

本题考查了平面向量的线性运算，考查了学生逻辑推理能力，属于基础题.

9、**D**

【解析】

利用复数模的计算、复数的除法化简复数 z，再根据复数的几何意义，即可得答案；

【详解】

$\because (1+i)z=|3+4i|=5 \Rightarrow z=\frac{5}{1+i}=\frac{5(1-i)}{2}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$，

$\therefore z$ 对应的点 $(\frac{5}{2},-\frac{5}{2})$，

$\therefore z$ 对应的点位于复平面的第四象限.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查复数模的计算、复数的除法、复数的几何意义，考查运算求解能力，属于基础题.

10、**B**

【解析】

根据 $f'(1)=3$ 求出 $a=2$，再根据 $(1,a+b)$ 也在直线 $y=3x-2$ 上，求出 **b** 的值，即得解.

【详解】

因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+a$，所以 $f'(1)=3$

所以 $1+a=3, a=2$，

又 $(1,a+b)$ 也在直线 $y=3x-2$ 上，

所以 $a+b=1$，

解得 $a=2,b=-1,$

所以 $a-b=3$.

故选：**B**

【点睛】

本题主要考查导数的几何意义，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

11、**A**

【解析】

结合已知可知，$\frac{1}{2}T=1$ 可求 T，进而可求 ω，代入 $f(x)$，结合 $f(\frac{1}{3})=0$，可求 φ，即可判断.

【详解】

$\because$ 图象上相邻两个极值点 x_1， x_2 满足 $|x_1-x_2|=1$，

$\therefore \frac{1}{2}T=1$ 即 $T=2$，

$\therefore \omega=\pi$， $f(x)=\sin(\pi x+\varphi)$，且 $f(\frac{1}{3})=\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi)=0$，

$\therefore \frac{1}{3}\pi+\varphi=k\pi$， $k\in Z$，

$\because |\varphi|<\frac{1}{2}\pi$， $\therefore \varphi=-\frac{1}{3}\pi$， $f(x)=\sin(\pi x-\frac{1}{3}\pi)$，

当 $x=-\frac{1}{6}$ 时， $f(-\frac{1}{6})=-1$ 为函数的一个极小值点，而 $-\frac{1}{6}\in(-\frac{\pi}{6},0)$.

故选： A.

【点睛】

本题主要考查了正弦函数的图象及性质的简单应用，解题的关键是性质的灵活应用.

12、**B**

【解析】

由题意 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$，代入解方程即可得解.

【详解】

由题意 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}=\frac{1}{2}$，

所以 $x>0$，且 $2x=\sqrt{x^2+12}$，解得 $x=2$.

故选：**B.**