江苏省常州市2023-2024学年高一上学期期末学业水平监测数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．$\cos 840^{\circ}$的值为（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2．设全集$U=\mathbf{R}$，集合$M=\left\{x \mid x^{2}-2x-3 \leq 0\right\}, N=\{x \mid x>1\}$，则$\{x \mid 1<x \leq 3\}=$（　）

A．$M \cup N$　　B．$M \cap N$

C．$\left(\complement_{U} N\right) \cup M$　　D．$\left(\complement_{U} M\right) \cap N$

3．已知幂函数$f(x)$的图象经过点$\left(2, \frac{1}{4}\right)$，则$f(x)$（　）

A．为偶函数且在区间$(0,+\infty)$上单调递增

B．为偶函数且在区间$(0,+\infty)$上单调递减

C．为奇函数且在区间$(0,+\infty)$上单调递增

D．为奇函数且在区间$(0,+\infty)$上单调递减

4．已知扇形的周长为$10\mathrm{cm}$，圆心角为$3\mathrm{rad}$，则扇形的面积为（　）

A．$3\mathrm{cm}^{2}$　　B．$4\mathrm{cm}^{2}$　　C．$5\mathrm{cm}^{2}$　　D．$6\mathrm{cm}^{2}$

5．设a，b，m都是正数，且$a<b$，记$x=\frac{a+m}{b+m}, y=\frac{a}{b}$，则（　）

A．$x>y$　　B．$x=y$

C．$x<y$　　D．x与y的大小与m的取值有关

6．“函数$f(x)=\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-3\right)$在区间$[m,+\infty)$上单调递增”的充要条件是（　）

A．$m\geq\frac{3}{2}$

B．$m\leq\frac{3}{2}$

C．$m\geq\ln\frac{3}{2}$

D．$m\leq\ln\frac{3}{2}$

7．将正弦曲线$y=\sin x$向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到曲线C_1，再将曲线C_1上的每一点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$得到曲线C_2，最后将曲线C_2上的每个点的纵坐标变为原来的2倍得到曲线的C_3．若曲线C_3恰好是函数$f(x)$的图象，则$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域是（　）

A．$[-1,1]$　　B．$[-1,2]$　　C．$[1,2]$　　D．$[-2,2]$

8．已知函数$f(x)=\log_2\left(\frac{1}{2^x}-a\right)$的定义域为$[-2,0]$，若存在$x_1,x_2\in[-2,0]$，满足$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\geq 3$，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$\left[\frac{4}{7},+\infty\right)$

B．$\left[\frac{2}{5},1\right)$

C．$\left[\frac{2}{5},4\right)$

D．$\left[\frac{4}{7},1\right)$

二、多选题

9．若函数$f(x)=a^x+b$（其中$a>0$且$a\neq 1$）的图象过第一、三、四象限，则（　）

A．$0<a<1$

B．$a>1$

C．$-1<b<0$

D．$b<-1$

10．下列不等式中，正确的有（   ）

A．$0.2^{-3} < 0.3^{-3} < 0.4^{-3}$　　B．$0.8^{1.1} < 0.8^{0.9} < 0.8^{0.7}$

C．$\log_{0.2} 5 < \log_{0.2} 4 < \log_{0.2} 3$　　D．$\cos\frac{3\pi}{7} < \cos\frac{2\pi}{7} < \cos\frac{\pi}{7}$

11．若函数$f(x)$对于任意$x_1, x_2 \in (0,+\infty)$，都有$\frac{f(x_1)+f(x_1)}{2} \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，则称$f(x)$具有性质$M$．下列函数中，具有性质$M$的有（   ）

A．$f(x)=\sqrt{x}$　　B．$f(x)=\mathrm{e}^x$

C．$f(x)=\ln x$　　D．$f(x)=-\frac{1}{x+2}$

12．已知函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)+1$（其中$\omega,\varphi$均为常数，且$\omega > 0, |\varphi| <$ ）恰能满足下列4个条件中的3个：

①函数$f(x)$的最小正周期为π；　　②函数$f(x)$的图象经过点$\left(0,\frac{3}{2}\right)$；

③函数$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{5\pi}{12},1\right)$对称；　　④函数$f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称．

则这3个条件的序号可以是（   ）

A．①②③　　B．①②④　　C．①③④　　D．②③④

三、填空题

13．已知函数$f(x)=\begin{cases}(-x)^{\frac{1}{2}}, x \le 0 \\ \lg x, x > 0\end{cases}$，则$f(f(0.01))=$___．

14．已知α为第二象限角，且满足$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{7}{13}$，则$\tan\alpha=$___．

15．已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC=25, BC=40$，若$\triangle ABC$的内接矩形的一边在BC边上，则该内接矩形的面积的最大值为___．

16．设$f(x),g(x)$分别为定义在$\mathbf{R}$上的奇函数和偶函数，若$f(x)+g(x)=2^x$，则曲线$y=\frac{f(x)}{g(x)}$与曲线$y=\sin x$在区间$[-2024\pi,2024\pi]$上的公共点个数为____.

四、解答题

17．（1）计算：$3^{\log_3 2}+(0.125)^{-\frac{2}{3}}-0.25\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$；

（2）已知$3^x=5^y=15$，计算$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的值并证明$xy>4$.

18．设集合$A=\left\{x\left|x+\frac{1}{x}>\frac{10}{3}\right.\right\}$，集合$B=\{x||2x-1|<1\}$，集合$I=\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B$.

(1)求I；

(2)当$x\in I$时，求函数$f(x)=\log_3\frac{x}{4x-1}$的值域.

19．在平面直角坐标系xOy中，角α的始边为x轴的非负半轴，终边经过第四象限内的点$P(1,m)$，且$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{10}m$.

(1)求m的值；

(2)求$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos(-\alpha)}$的值.

20．已知函数$f(x)=\left(2^x-2\tan\theta\right)\left(2^x-\tan\theta\right)$，其中$x\in\mathbf{R},\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，求$f(x)$在区间$[0,3]$上的最值及取最值时x的值；

(2)若 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{3}{4}$，求 θ .

21．已知结论：设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}, a, b \in \mathbf{R}$，若 $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则 $f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 中心对称，反之亦然．特别地，当 a ■b ■0 时，$f(x)$ 的图象关于原点对称，此时 $f(x)$ 为奇函数．设函数 $\mathrm{g}(x)=\frac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

(1)判断 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性，并用函数单调性的定义证明；

(2)计算 $g(x)+g(-x)$ 的值，并根据结论写出函数 $g(x)$ 的图象的对称中心；

(3)若不等式 $g\left(m-\frac{1}{x}\right)+g(-4x) \geq 2$ 对 $x>0$ 恒成立，求实数 m 的最大值.

22．已知 $f\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+ax^2, g\left(x\right)=a\left(\cos x+1\right), a \in \mathbf{R}$.

(1)若 $f(x)$ 为奇函数，求 a 的值，并解方程 $f(\tan x)=-\frac{\ln 3}{2}$ ；

(2)解关于 x 的不等式 $f(\sin x)+f\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) \leq g(x)$ ·

参考答案：

1．A

【分析】根据诱导公式以及特殊角的三角函数求解即可.

【详解】$\cos 840^\circ = \cos\left(2\times 360^\circ + 120^\circ\right) = \cos 120^\circ = \cos\left(180^\circ - 60^\circ\right) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$，

故选：A.

2．B

【分析】先求出集合M，然后结合集合的基本运算即可求解.

【详解】因为$M = \left\{x \mid x^2 - 2x - 3 \le 0\right\} = \left\{x \mid -1 \le x \le 3\right\}, N = \{x \mid x > 1\}$，

所以$M \bigcup N = \left\{x \mid x \ge -1\right\}$， $M \cap N = \{x \mid 1 < x \le 3\}$，

$\complement_U N = \left\{x \le 1\right\}$，$\left(\complement_U N\right) \cup M = \left\{x \mid x \le 3\right\}$，$\complement_U M = \left\{x \mid x < -1\right.$或$\left. x > 3\right\}$，$\left(\complement_U M\right) \cap N = \left\{x \mid x > 3\right\}$，

故选：B.

3．B

【分析】根据已知条件，结合幂函数的定义和性质即可求解.

【详解】设幂函数为$f\left(x\right) = x^\alpha$，

因为幂函数$f(x)$的图象经过点$\left(2, \frac{1}{4}\right)$，

所以$2^\alpha = \frac{1}{4}$，解得$\alpha = -2$，

故$f(x) = x^{-2}$，定义域为$\left\{x \mid x \ne 0\right\}$，定义域关于原点对称，

$f(-x) = \left(-x\right)^{-2} = x^{-2} = f\left(x\right)$，所以$f(x)$为偶函数，

又因为$-2 < 0$，所以$f(x)$在区间$(0, +\infty)$上单调递减，

故选：B.

4．D

【分析】根据周长确定扇形半径$R=2$，再计算面积即可.

【详解】设扇形半径为R，则$2R+3R=10$，$R=2$，

所以$S=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$.

故选：D.

5．A

【分析】根据题意通过作差比较大小，得出x,y的大小关系，从而判断出正确答案.

【详解】由$a>0,b>0,m>0$，且$a<b$，即$b-a>0$，

可得$x-y=\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{m\left(b-a\right)}{b\left(b+m\right)}>0$，即$x>y$，

故选：A.

6．C

【分析】利用导数研究函数的单调性即可得到答案.

【详解】$f(x)=\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-3\right)$，定义域为R，

$f'(x)=\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-3\right)+\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-\frac{3}{2}\right)$，

令$f'\left(x\right)=0$，解得$x=\ln\frac{3}{2}$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,\ln\frac{3}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\ln\frac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增，

所以函数$f(x)=\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-3\right)$在区间$\left[m,+\infty\right)$上单调递增”的充要条件是$m\geq\ln\frac{3}{2}$，

故选：C.

7．B

【分析】由题意，利用函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换规律，求得$f(x)$的解析式，再根据正弦函数的定义域和值域，得出结论.

【详解】将正弦曲线$y=\sin x$向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到曲线$C_1: y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象；

再将曲线C_1上的每一点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$得到曲线$C_2: y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象；

最后将曲线C_2上的每个点的纵坐标变为原来的2倍得到曲线的$C_3: y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

由于曲线C_3恰好是函数$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,2]$.

故$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域是$[-1,2]$.

故选：B.

8．D

【分析】由已知结合函数的单调性可求$f(x)$的最大值与最小值，然后结合存在性问题与最值关系的转化即可求解.

【详解】令$u(x)=\frac{1}{2^x}-a$，且$u(x)$在$[-2,0]$单调递减，所以$u(x)$的最小值为$u(0)=1-a>0$，

可得$a<1$，且$u(x)\in[1-a,4-a]$，

所以$g(u)=\log_2 u$在$[1-a,4-a]$上单调递增，所以$g(u)\in[\log_2(1-a),\log_2(4-a)]$

因为存在$x_1,x_2\in[-2,0]$，满足$|f(x_1)-f(x_2)|\geq 3$，

则$f\left(x\right)_{\max}-f\left(x\right)_{\min}\geq 3$，

所以$g\left(u\right)_{\max}-g\left(u\right)_{\min}=\log_2\left(4-a\right)-\log_2\left(1-a\right)=\log_2\frac{4-a}{1-a}\geq 3$

解得：$\frac{4}{7}\leq a<1$，

故选：D.

【点睛】结论点睛：本题考查不等式的恒成立与有解问题，可按如下规则转化：

一般地，已知函数$y=f\left(x\right),x\in\left[a,b\right]$，$y=g\left(x\right),x\in\left[c,d\right]$

（1）若$\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\forall x_2\in\left[c,d\right]$，总有$f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$成立，故$f\left(x\right)_{\max}<g\left(x_2\right)_{\min}$；

（2）若$\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\exists x_2\in\left[c,d\right]$，有$f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$成立，故$f\left(x\right)_{\max}<g\left(x_2\right)_{\max}$；

（3）若$\exists x_1\in\left[a,b\right]$，$\exists x_2\in\left[c,d\right]$，有$f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$成立，故$f\left(x\right)_{\min}<g\left(x_2\right)_{\max}$；

（4）若$\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\exists x_2\in\left[c,d\right]$，有$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，则$f\left(x\right)$的值域是$g\left(x\right)$值域的子集.

9．BD

【分析】根据图象的性质可得：$a>1,a^0+b<0$，即可求解.

【详解】函数$f(x)=a^x+b$（其中$a>0$且$a\neq 1$）的图象在第一、三、四象限，

根据图象的性质可得：$a>1,a^0+b<0$，

即$a>1,b<-1$，

故选：BD.

10．BCD

【分析】利用幂函数、指数函数、对数函数、余弦函数的单调性逐项判断即可.

【详解】对于A，幂函数$y=x^{-3}$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，$0.2<0.3<0.4$，所以

$0.2^{-3}>0.3^{-3}>0.4^{-3}$，故 A 错误；

对于 B，指数函数 $y=0.8^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，$1.1>0.9>0.7$，所以

$0.8^{1.1}<0.8^{0.9}<0.8^{0.7}$，故 B 正确；

对于 C，对数函数 $y=\log_{0.2}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$5>4>3$，所以

$\log_{0.2}5<\log_{0.2}4<\log_{0.2}3$，故 C 正确；

对于 D，余弦函数 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，$\frac{\pi}{2}>\frac{3\pi}{7}>\frac{2\pi}{7}>\frac{\pi}{7}>0$，所以

$\cos\frac{3\pi}{7}<\cos\frac{2\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{7}$，故 D 正确，

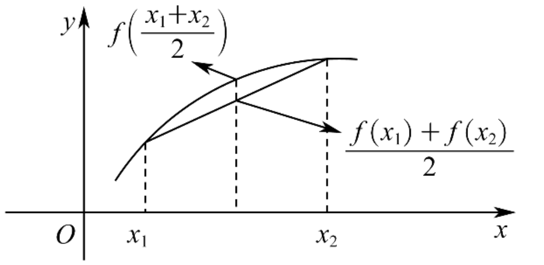
故选：BCD.

11．ACD

【分析】根据条件得到函数图像应该是上凸的或者是直线，画出函数图像，根据图像得到答案.

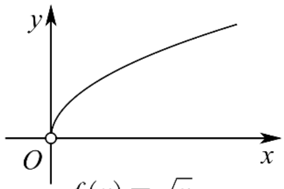
【详解】对于任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$\frac{f(x_1)+f(x_1)}{2}\le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，

故函数图像应该是上凸的，此时 $\frac{f(x_1)+f(x_1)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，如图所示：

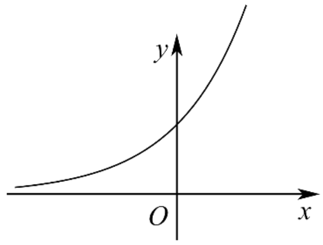


或者函数图像是一条直线，此时$\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_1\right)}{2}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，

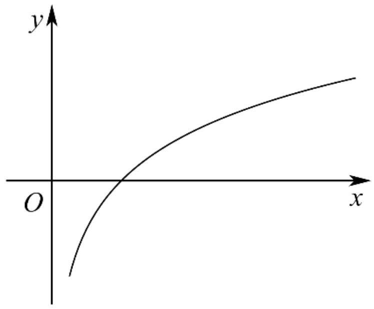
画出函数图像，如图所示：



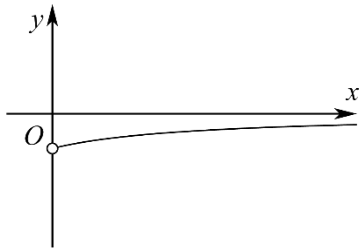
$f(x)=\sqrt{x}$



$f(x)=\mathrm{e}^x$



$f(x)=\ln x$



$f(x)=-\frac{1}{x+2}$

根据图像知：ACD 满足条件.

故选：ACD

12．AB

【分析】根据①②③④分别得到$\omega=2$，$\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi\omega}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k_1\pi$，$k_1\in Z$，

$-\frac{\pi\omega}{6}+\varphi=k_2\pi$，$k_2\in Z$，对选项 AB 验证正确，根据 C 得到$\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)\pi$，不成立，

根据 D 得到$7\varphi=7k_2\pi+2k_3\pi$，不成立，得到答案.

【详解】若①正确，则$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得$\omega=2$；

若②正确，则$f(0)=\cos\varphi+1=\frac{3}{2}$，$\cos\varphi=\frac{1}{2}$，$|\varphi|<\pi$，故$\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$；