河南省郑州市名校教研联盟2024届高三下学期模拟预测数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知复数$z=\dfrac{2}{i^5+i^6}$，则$\bar{z}=$（　）

A．$1-i$　　B．$-1+i$　　C．$2-2i$　　D．$2+2i$

2．已知集合$A=\{x|-1<x+1<2\},B=\left\{x\left|\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{x-2}{|x-2|}=0\right.\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{x|-1<x<0\}$　B．$\{x|-2<x<0\}$　C．$\{x|0<x<1\}$　D．$\{x|0<x<2\}$

3．已知点A，B，C，D为平面内不同的四点，若$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}$，且$\overrightarrow{AC}=(-2,1)$，则$\overrightarrow{AB}=$（　）

A．$(4,-2)$　B．$(-4,2)$　C．$(6,-3)$　D．$(-6,3)$

4．函数$f(x)=(2x+a)^2-\log_2\left(2^{3x+1}+2\right)$是偶函数，则$a$的值为（　）

A．$\dfrac{1}{8}$　B．$\dfrac{3}{2}$　C．$\dfrac{3}{4}$　D．$\dfrac{3}{8}$

5．知名数学教育家单墫曾为中学生写了一个小册子《十个有趣的数学问题》，其中提到了开普勒的将球装箱的方法：考虑一个棱长为2的正方体，分别以该正方体的8个顶点及6个面的中心为球心作半径为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的球，这此球在正方体内的体积之和与正方体的体积之比为（　）

A．$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$　B．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$

6．已知点O为坐标原点，点A为直线$y=kx$（$k\neq0$）与椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的一个交点，点B在C上，$OA\perp OB$，若$\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{4}{3}$，则$C$的长轴长为（　）

A．$\sqrt{3}$　B．3　C．$2\sqrt{3}$　D．6

7．已知$a=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}$，$b=\ln\dfrac{6}{5}$，$c=(\log_6 7-1)\ln 5$，则（　）

A．$a>b>c$　B．$b>c>a$　C．$a>c>b$　D．$c>a>b$

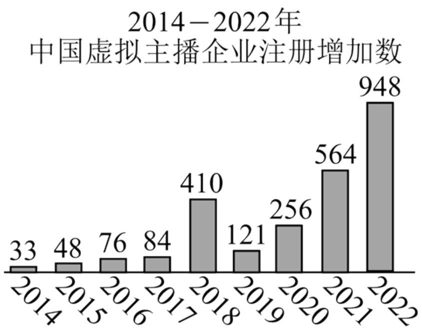
8．已知第一象限内的点P在双曲线C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）上，点$P$

关于原点的对称点为 Q，F_1，F_2，是 C 的左、右焦点，点 M 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心（内切圆圆心），M 在 x 轴上的射影为 M'，记直线 PM',QM' 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $k_1\cdot k_2\cdot\dfrac{|F_1M'|}{|F_2M'|}=9$，则 C 的离心率为（　）

A．2　　　　B．8　　　　C．$2\sqrt{2}$　　　　D．$2\sqrt{10}$

二、多选题

9．近几年随着 AI 技术的发展，虚拟人的智能化水平得到极大的提升，虚拟主播逐步走向商用，如图为 2014～2022 年中国虚拟主播企业注册年增加数（较上一年增加的数量）条形图，根据该图，下列说法正确的是（　）



A．2014～2022 年中国虚拟主播企业注册数量逐年增加

B．2014～2022 年中国虚拟主播企业注册年增加数的中位数为 410

C．2014～2022 年中国虚拟主播企业注册年增加数的极差为 915

D．从图中 9 年企业注册增加数字中任取 2 个数字，这两个数字的平均数大于 110 的概率 $\dfrac{13}{18}$

10．过点 $P(a,b)$ 作直线 l 与函数 $f(x)=-2x^3$ 的图象相切，则（　）

A．若 P 与原点重合，则 l 方程为 $y=0$

B．若 l 与直线 $x-6y=0$ 垂直，则 $6a+b=4$

C．若点 P 在 $f(x)$ 的图象上，则符合条件的 l 只有 1 条

D．若符合条件的 l 有 3 条，则 $\dfrac{a^3}{b}<-\dfrac{1}{2}$

11．已知 $f(x)=|\sin x|\cos x+\sin 2x$，则（　）

A．$f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 对称

B．$f\left(x\right)$的值域为$\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$

C．$f\left(x\right)$在区间$\left(0,50\right)$上有33个零点

D. 若方程$f\left(x\right)=\frac{3}{4}$在$\left(0,t\right)$（$t>0$）有4个不同的解$x_i$（$i=1$，2，3，4），其中$x_i<x_{i+1}$（$i=1$，2，3），则$x_1+x_2+x_3+x_4+t$的取值范围是$\left(\frac{55\pi}{12},\frac{85\pi}{12}\right]$

三、填空题

12．$\left(2x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right)^6$的展开式中$x$的系数为_____.

13．平面几何中有一个著名的塞尔瓦定理：三角形任意一个顶点到其垂心（三角形三条高的交点）的距离等于外心（外接圆圆心）到该顶点对边距离的2倍．若点A，B，C都在圆E上，直线BC方程为$x+y-2=0$，且$\left|BC\right|=2\sqrt{10}$，$\triangle ABC$的垂心$G\left(2,2\right)$在$\triangle ABC$内，点$E$在线段$AG$上，则圆$E$的标准方程_____.

14．四边形$ABCD$中，$BD=2$，$\sin\angle ABD=\frac{1}{4}AD\tan\frac{A}{2}$，$CD=2BC$，设$\triangle ABD$与$\triangle BCD$的面积分别为$S_1$，$S_2$，则$S_1S_2$的最大值为_____.

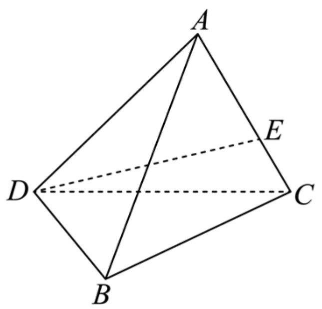
四、解答题

15．已知等差数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_5+a_8=0$，$a_4+a_6=a_3+1$．

(1)求a_n；

(2)若$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$，数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，求$S_n$最小时对应的$n$的值．

16．如图，在三棱锥$A-BCD$中，$AB=9$，其余各棱的长均为6，点E在棱AC上，$AE=2EC$，过点E的平面与直线CD垂直，且与BC，CD分别交于点F，G．



(1)确定F，G的位置，并证明你的结论；

(2)求直线DA与平面DEF所成角的正弦值．

17．某高中数学兴趣小组，在学习了统计案例后，准备利用所学知识研究成年男性的臂长y（cm）与身高x

（cm）之间的关系，为此他们随机统计了 5 名成年男性的身高与臂长，得到如下数据：

x	159	165	170	176	180
y	67	71	73	76	78

(1)根据上表数据，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请用相关系数加以说明；

(2)建立 y 关于 x 的回归方程（系数精确到 0.01）；

(3)从 5 名样本成年男性中任取 2 人，记这 2 人臂长差的绝对值为 X，求 $E\left(X\right)$．

参考数据：$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=62194$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=8.6$，$\sqrt{282}\approx 16.8$

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$，回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

18．已知倾斜角为 α（$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$）的直线 l 与抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）只有 1 个公共点 A，C 的焦点为 F，直线 AF 的倾斜角为 β．

(1)求证：$\beta=2\alpha$；

(2)若 $p=1$，直线 l 与直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 交于点 P，直线 AF 与 C 的另一个交点为 B，求证：$PA\perp PB$．

19．已知函数 $f\left(x\right)=-x^3+3x^2+a$（$x>0$），$g\left(x\right)=x\ln x+ax^2-2x$．

(1)若 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 的导数分别为 $f'\left(x\right)$，$g'\left(x\right)$，且 $\left\{x\middle|f'\left(x\right)<0\right\}\subseteq\left\{x\middle|g'\left(x\right)<0\right\}$，求 a 的取值范围；

(2)用 $\min\left\{a,b\right\}$ 表示 a，b 中的最小值，设 $h\left(x\right)=\min\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}$，若 $\left|a\right|>1$，判断 $h\left(x\right)$ 的零点个数．

参考答案：

1．B

【分析】

根据复数运算和共轭复数的概念可得.

【详解】因为$z=\frac{2}{i^5+i^6}=\frac{2}{i-1}=-1-i$，

所以$\bar{z}=-1+i$.

故选：B.

2．C

【分析】

利用交集的概念计算即可.

【详解】

因为$-1<x+1<2\Rightarrow -2<x<1$，即$A=\{x|-2<x<1\}$，

若$x<0\Rightarrow \frac{x}{|x|}+\frac{x-2}{|x-2|}=-2$，不符题意，

若$0<x<2\Rightarrow \frac{x}{|x|}+\frac{x-2}{|x-2|}=0$，符合题意，

若$x>2\Rightarrow \frac{x}{|x|}+\frac{x-2}{|x-2|}=2$，不符题意，故$B=\{x|0<x<2\}$，

所以$A\cap B=\{x|0<x<1\}$.

故选:C.

3．D

【分析】

由已知整理可得$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$，然后由坐标运算可得.

【详解】由$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}$得$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=3\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}$，即$\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{CA}$，即$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$，

又$\overrightarrow{AC}=(-2,1)$，所以$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}=(-6,3)$.

故选：D.

4．D

【分析】由$f(x)$是偶函数，可得$f(x)=f(-x)$，从而可求解.

【详解】

因为$f(x)$是偶函数，所以$f(x)-f(-x)=8ax-\log_2\frac{2^{3x+1}+2}{2^{-3x+1}+2}=(8a-3)x=0$，所以$a=\frac{3}{8}$

，故 D 正确.

故选：D.

5．D

【分析】

首先确定条件中的球落在正方体的部分，再求体积，即可求解.

【详解】

以 8 个顶点为球心的球各有 $\frac{1}{8}$ 在正方体内，以 6 个面的中心为球心的球各有 $\frac{1}{2}$ 在正方体内，

所以这些球在正方体的体积之和为 4 个半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的球的体积之和，

所以这些球在正方体内的体积之和与正方体的体积之比为 $\frac{4\times\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{8}=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$.

故选：D

6．C

【分析】

将直线 OA 与椭圆 C 联立，求出 x_1，利用两直线垂直的条件，进而求出 x_2，再利用两点的距离公式及椭圆长轴长定义即可求解.

【详解】

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

由 $\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{a^2}+y^2=1\end{cases}$，得 $x_1^2=\frac{a^2}{a^2k^2+1}$，

由 $OA\perp OB$ 可得 $x_2^2=\frac{a^2}{\frac{a^2}{k^2}+1}=\frac{a^2k^2}{a^2+k^2}$，

所以 $|OA|^2=\left(1+k^2\right)x_1^2=\frac{a^2+a^2k^2}{a^2k^2+1}$，$|OB|^2=\left(1+\frac{1}{k^2}\right)x_2^2=\frac{a^2+a^2k^2}{a^2+k^2}$，

所以 $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{\left(a^2+1\right)\left(k^2+1\right)}{a^2\left(k^2+1\right)}=1+\frac{1}{a^2}$，

所以 $1+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3}$，$a^2=3$，

C 的长轴长为 $2a=2\sqrt{3}$，

故选：C.

7．A

【分析】

根据已知条件及构造函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-x$ （ $x>0$ ），利用导数的正负与函数的单调性的关系，结合函数的单调性，再利用作差法、对数的运算及基本不等式即可求解.

【详解】

设 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-x$ （ $x>0$ ），则 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}-1<0$ ，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $f\left(x\right)<f\left(0\right)=0$ ，即 $x>\ln\left(x+1\right)$ ，

所以 $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}>\ln\dfrac{11}{10}+\ln\dfrac{12}{11}=\ln\dfrac{6}{5}$ ，$\ln\dfrac{6}{5}=\left(\log_5 6-1\right)\ln 5$ ，

$$\log_5 6-\log_6 7=\frac{\lg 6}{\lg 5}-\frac{\lg 7}{\lg 6}=\frac{\left(\lg 6\right)^2-\lg 5\lg 7}{\lg 5\lg 6}>\frac{\left(\lg 6\right)^2-\left(\frac{\lg 5+\lg 7}{2}\right)^2}{\lg 5\lg 6}=\frac{\left(\frac{1}{2}\lg 36\right)^2-\left(\frac{1}{2}\lg 35\right)^2}{\lg 5\lg 6}>0$$

，所以 $a>b>c$ ，

故选：A.

【点睛】

关键点睛：利用构造法和作差法，再利用导数法求函数的单调性，结合函数单调性及基本不等式即可.

8．A

【分析】

根据切线性质和双曲线定义求得 $M'\left(a,0\right)$ ，然后由斜率公式和点 P 在双曲线上整理化简，结合已知求解可得.

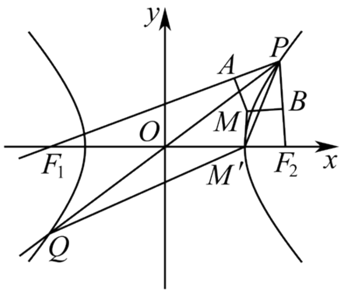
【详解】设圆 M 与 PF_1 ，PF_2 分别切于点 A，B，则 $\left|F_1A\right|=\left|F_1M'\right|$ ，$\left|PA\right|=\left|PB\right|,\left|F_2B\right|=\left|F_2M'\right|$ ，

且 $\left|F_1A\right|+\left|F_1M'\right|=\left|F_1P\right|-\left|AP\right|+\left|F_1F_2\right|-\left|M'F_2\right|$

$=\left|F_1P\right|-\left|PB\right|-\left|F_2B\right|+\left|F_1F_2\right|$

$=\left|F_1P\right|-\left|F_2P\right|+\left|F_1F_2\right|=2a+2c$ ，

所以 $\left|F_1M'\right|=a+c$ ，点 $M'\left(a,0\right)$ ，



设 $P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(-x_1,-y_1\right)$，则 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，

所以 $\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}$，$k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{-y_1}{-x_1-a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$，

$\frac{\left|F_1M'\right|}{\left|F_2M'\right|}=\frac{c+a}{c-a}=\frac{e+1}{e-1}$，

所以 $k_1k_2\cdot\frac{\left|F_1M'\right|}{\left|F_2M'\right|}=\left(e+1\right)^2=9$，$e=2$.

故选：A.

【点睛】方法点睛：本题主要考查双曲线的离心率求解问题.解决圆锥曲线的离心率问题，一般离不开圆锥曲线的定义，如果有角的条件，则常常要用到正余弦定理，如果有三角形的内切圆条件，一般与切线性质或三角形的等面积转化有关，遇到线段的比值时，经常需要利用相似形转化.

9．ACD

【分析】

根据已知条件及图表，利用中位数和极差的定义，结合古典概型的概率公式及对立事件的概率公式即可求解.

【详解】

对 A，由每年增加数均为正数，可得 A 正确；

对 B，2014～2022 年中国虚拟主播企业注册年增加数的中位数为 121，B 错误；

对 C，2014～2022 年中国虚拟主播企业注册年增加数的极差为 $948-33=915$，C 正确；

对 D，当且仅当从 33，48，76，84，121 中任取两个数字，其平均数均不大于 110，所以所求概率为 $1-\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{13}{18}$，D 正确.

故选：ACD.

10．AD

【分析】

设切点坐标，求出切线斜率满足的等量关系，依据在点处的切线方程的求法求出切线方程判断选项A；根据斜率求出切点的横坐标，分别讨论点$P\left(a,b\right)$是否在函数$f\left(x\right)$的图象上，可判断选项B；通过切线斜率求解切点个数可判断直线条数，从而判断选项C；符合条件的l有3条时，点$P\left(a,b\right)$不在图象上，通过斜率求切点与点$P\left(a,b\right)$坐标的关系可判断选项D.

【详解】

设l与$f\left(x\right)=-2x^3$的图象切于点$Q\left(t,-2t^3\right)$，当点P与点Q不重合时，切线斜率$k=f'\left(t\right)=-6t^2=\dfrac{-2t^3-b}{t-a}$，整理得：$4t^3-6at^2-b=0$，当点$P$与点$Q$重合时，切线斜率$k=f'\left(a\right)=-6a^2=-6t^2$，

对于A，若P与原点重合，点P在函数$f\left(x\right)=-2x^3$图象上，则$a=b=0$，此时$t=0$，$k=0$，l即x轴，方程为$y=0$，A正确；

对于B，若l与直线$x-6y=0$垂直，则$k=-6t^2=-6$，$t=\pm1$，

当点$P\left(a,b\right)$为切点时，$6a+b=4$或$6a+b=-4$，

当点$P\left(a,b\right)$不为切点时，满足$-6t^2=\dfrac{-2t^3-b}{t-a}$，整理得$4t^3-6at^2-b=0$，

当$t=1$时$4-6a-b=0$，$6a+b=4$，当$t=-1$时$-4-6a-b=0$，$6a+b=-4$，B错误；

对于C，当点P在$f\left(x\right)$的图象上时，$b=-2a^3$，$4t^3-6at^2-b=0$，则$4t^3-6at^2+2a^3=0$，

即$\left(t-a\right)^2\left(2t+a\right)=0$，所以$t=a$或$t=-\dfrac{a}{2}$，故$a\neq0$有两解，符合条件的直线有两条， C错误；

对于D，若符合条件的l有3条，则点$P\left(a,b\right)$不在$f\left(x\right)$图象上，设l与$f\left(x\right)=-2x^3$的图象切于点$Q\left(t,-2t^3\right)$，则有$4t^3-6at^2-b=0$，

设$g\left(t\right)=4t^3-6at^2-b=0$，$g'\left(t\right)=12t^2-12at=0$，

由$g'\left(t\right)=0$得$t=0$或$t=a$，符合条件的l有3条，$g\left(t\right)$有3个零点，

则$g\left(0\right)g\left(a\right)=-b\left(-2a^3-b\right)<0$，所以$b\left(2a^3+b\right)<0$，$\dfrac{2a^3}{b}+1<0$，$\dfrac{a^3}{b}<-\dfrac{1}{2}$，D正确.

故选：AD.

11．AB

【分析】根据题意可得$f\left(\pi-x\right)=-f\left(x\right)$，从而可对A判断；由题意可得$f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)$，

则2π为$f\left(x\right)$的一个周期，不妨讨论$\left[0,2\pi\right]$内的值域情况，从而可对B判断；令$f\left(x\right)=0$，

可得$\sin x=0$或$\cos x=0$，即$x=\frac{1}{2}k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），从而可对C判断；根据$f\left(x\right)=\frac{3}{4}$分情况讨

论得到$\frac{29\pi}{12}<t\leq\frac{49\pi}{12}$，$x_1+x_2+x_3+x_4=5\pi$，从而可对D判断.

【详解】

对A：由

$f\left(\pi-x\right)=\left|\sin\left(\pi-x\right)\right|\cos\left(\pi-x\right)+\sin 2\left(\pi-x\right)=\left|\sin x\right|\times\left(-\cos x\right)-\left(\sin 2x\right)=-\left|\sin x\right|\cos x-\sin 2x=-f\left(x\right)$

，

所以$f\left(\pi-x\right)+f\left(x\right)=0$，则$f\left(x\right)$的图象关于$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称，故A正确；

对B：由$f\left(x\right)=\left|\sin x\right|\cos x+\sin 2x=\left|\sin x\right|\cos x+2\sin x\cos x$，

因为$f\left(x+2\pi\right)=\left|\sin\left(x+2\pi\right)\right|\cos\left(x+2\pi\right)+\sin\left(2x+4\pi\right)=\left|\sin x\right|\cos x+2\sin 2x=f\left(x\right)$，所以

$f\left(x\right)$的一个周期为2π，

不妨讨论$\left[0,2\pi\right]$一个周期的值域情况，

当$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$，此时$\sin x\geq 0,\cos x\geq 0$，

则$f\left(x\right)=\left|\sin x\right|\cos x+\sin 2x=\frac{1}{2}\sin x\cos x+\sin 2x=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin 2x=\frac{3}{2}\sin 2x$，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$2x\in\left[0,\pi\right]$，则$\sin 2x\in\left[0,1\right]$，则$f\left(x\right)\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$；

当$\frac{\pi}{2}<x\leq\pi$，此时$\sin x\geq 0,\cos x\leq 0$，

则$f\left(x\right)=\left|\sin x\right|\cos x+\sin 2x=\frac{1}{2}\sin x\cos x+\sin 2x=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin 2x=\frac{3}{2}\sin 2x$，

因为$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$，所以$2x\in\left(\pi,2\pi\right]$，则$\sin 2x\in\left[-1,0\right]$，则$f\left(x\right)\in\left[-\frac{3}{2},0\right]$，

当$\pi<x\leq\frac{3\pi}{2}$，此时$\sin x\leq 0,\cos x\leq 0$，

则$f\left(x\right)=\left|\sin x\right|\cos x+\sin 2x=-\frac{1}{2}\sin x\cos x+\sin 2x=-\frac{1}{2}\sin 2x+\sin 2x=\frac{1}{2}\sin 2x$，

因为$x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$，所以$2x\in\left(2\pi,3\pi\right]$，则$\sin 2x\in\left[0,1\right]$，则$f\left(x\right)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，