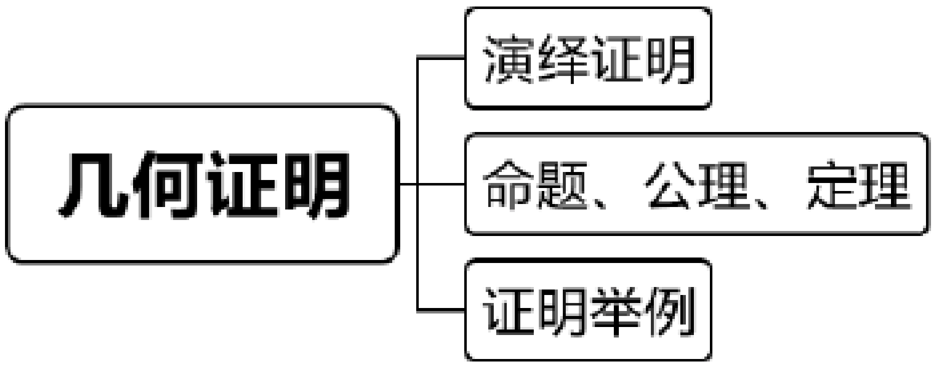
几何证明

内容分析

命题与证明是八年级数学上学期第十九章第一节内容，主要对演绎证明和命题、公理、定理的概念及举例证明进行讲解，重点是真假命题的判定，难点是改写出已知命题和举例证明．通过这节课的学习一方面为我们后面学习垂直平分线和角平分线等几何内容提供依据，另一方面也为后面学习直角三角形性质奠定基础．

知识结构



模块一：演绎证明

知识精讲

1、演绎证明的概念

演绎证明：演绎推理的过程就是演绎证明．也就是说演绎证明是指：从已知的概念、条件出发，依据已被确认的事实和公认的逻辑规则，推导出某结论为正确的过程．

演绎推理是数学证明的一种常用的、完全可靠的方法．演绎证明是一种严格的数学证明，是我们现在要学习的证明方式，简称为证明．

例题解析

【例1】 填空：

（1） 已知，如图$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle AED=\angle EDC$，BF、DE分别平分$\angle ABC$和$\angle ADC$，求证：$DE\parallel EF$

证明：因为BF平分$\angle ABC$，（________________________），

所以$\angle ABF=\dfrac{1}{2}\angle ABC$（______________________________）．

同理$\angle EDF=\dfrac{1}{2}\angle ADC$．

因为$\angle ABC=\angle ADC$（________），所以$\angle ABF=\angle EDF$（________），

又因为$\angle AED=\angle EDC$，所以$\angle AED=\angle ABF$（________________），

所以$DE\parallel EF$（______________________________）．

（2） 已知：如图，$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足分别为D、E，EB交CD于点F，且$AD=DF$．求证：$AC=BF$．

证明：因为$CD\perp AB$，$BE\perp AC$（已知），

所以$\angle AEB=\angle BDC=\angle ADC=90°$(______________________________)，

因为$\angle A+\angle B+\angle AEB=180°$（______________________），

同理$\angle BFD+\angle B+\angle BDC=180°$．

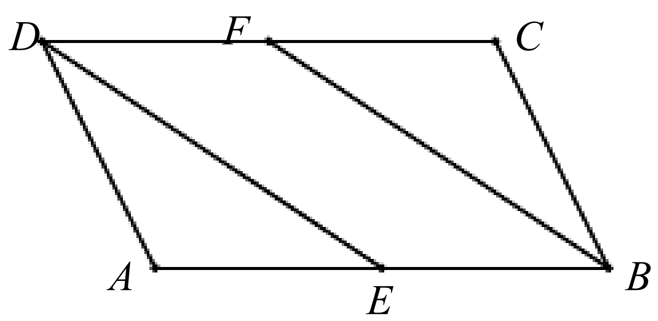
所以$\angle A+\angle B+\angle AEB=\angle BFD+\angle B+\angle BDC$ (__________________________)，

所以$\angle A=\angle BFD$．（____________）

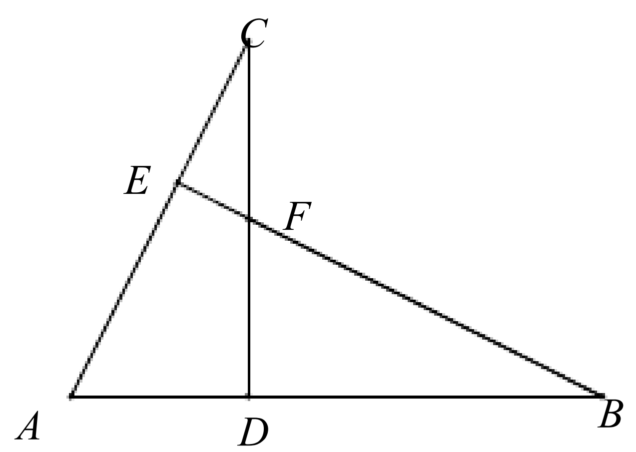
在ΔADC与ΔFDB中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle BFD \\ \underline{\qquad\qquad\quad} \\ \angle ADC=\angle FDB\end{cases}$$，所以$\Delta ADC\cong\triangle FDB$（____________）

所以____________________（____________________）



（图 1）



（图 2）

【答案】略

【解析】（1）已知；角平分线的定义；已知；等量代换；等量代换；同位角相等，两直线平

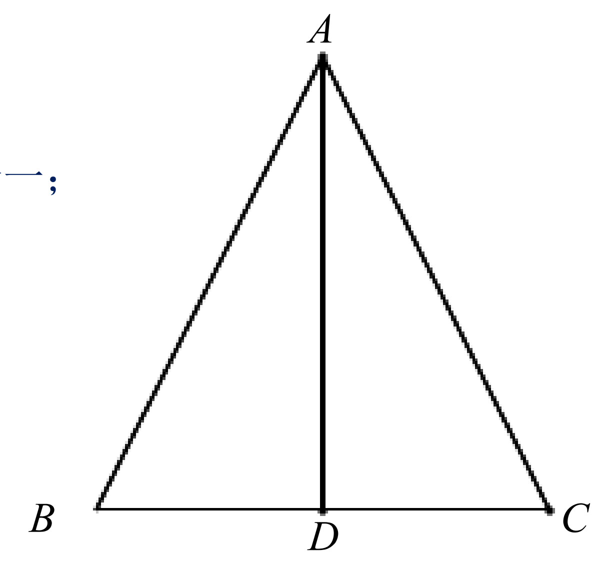
行；

（2）垂直的意义；三角形内角和 180°；等量代换；等式性质；$AD=DF$；ASA；$AC=BF$；全等三角形的对应边相等.

【总结】考查证明题证明过程的依据和相关条件.

【例2】（1）如图，由 $AB=AC$，$AD\perp BC$，得____________，依据是__________；

（2）如图，由 $AB=AC$，$BD=DC$，得________________，依据是__________.



【答案】略.

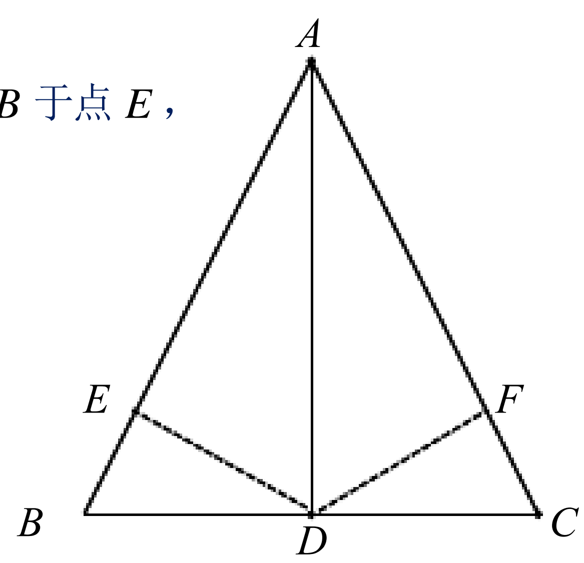
【解析】（1）$BD=CD$ 或 $\angle BAD=\angle CAD$，等腰三角形三线合一；

（2）$AD\perp BC$ 或 $\angle BAD=\angle CAD$，等腰三角形三线合一.

【总结】考查等腰三角形“三线合一”的性质应用.

【例3】求证：等腰三角形底边的中点到两腰的距离相等.

【答案】略



【解析】已知：如图 $AB=AC$，$BD=CD$，$DE\perp AB$ 交 AB 于点 E，$DF\perp AC$ 交 AC 于点 F.

求证：$DE=DF$.

证明：$\because AB=AC$，$BD=CD$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$

$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore \angle DEA=\angle DFA=90^\circ$

$\because AD=AD$，

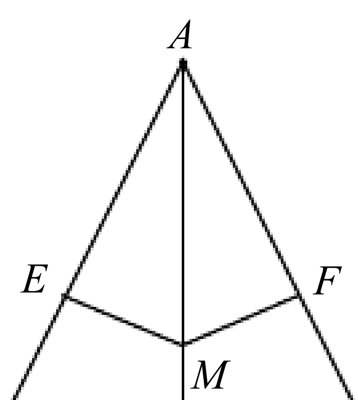
$\therefore \Delta ADE\cong\Delta ADF$

$\therefore DE=DF$

【总结】考查等腰三角形性质定理的应用，作图，已知，求证，证明的完整过程.

【例4】求证：等腰三角形底边上的高上任意一点到两腰的距离相等.

【答案】略.



【解析】已知：如图 $AB=AC$， $AD\perp BC$， M 为线段 AD 上任意一点，

$ME\perp AB$ 交 AB 于点 E， $MF\perp AC$ 交 AC 于点 F．

求证： $ME=MF$ ．

证明： $\because AB=AC$， $AD\perp BC$， $\therefore\angle BAD=\angle CAD$ ．

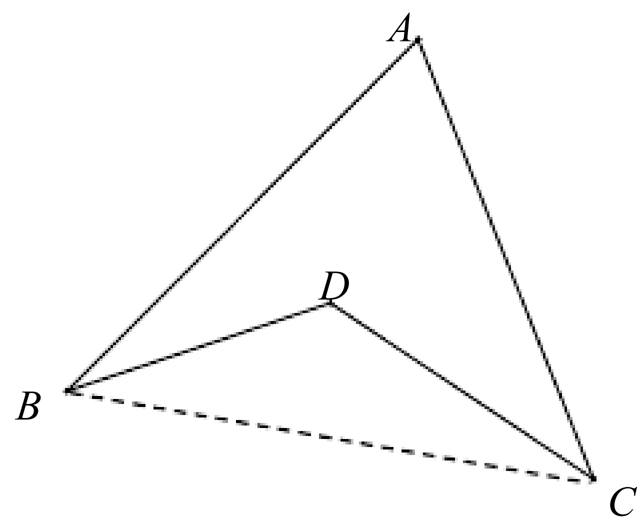
$\because ME\perp AB$， $MF\perp AC$， $\therefore\angle MEA=\angle MFA=90°$．

$\because AM=AM$， $\therefore\Delta AME\cong\Delta AMF$ ．

$\therefore ME=MF$ ．

【总结】考查等腰三角形性质定理的应用，作图，已知，求证，证明的完整过程．

【例5】 如图，已知四边形 $ABCD$ 是凹四边形，求证：$\angle D=\angle A+\angle B+\angle C$．



【答案】略．

【解析】证明：联结 BC ．

$\because\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，

$\angle ACB=\angle ABD+\angle BDC$， $\angle ACB=\angle ACD+\angle DCB$

$\therefore\angle A+\angle ABD+\angle ACD=180°-\angle DBC-\angle DCB$

$\because\angle D+\angle DBC+\angle DCB=180°$

$\therefore\angle D=180°-\angle DBC-\angle DCB$

$\therefore\angle D=\angle A+\angle ABD+\angle ACD$

【总结】考查三角形中的等量代换，利用三角形内角和 180° 即可解题．

【例6】 如图，已知ΔABC 中，求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$

证明：过 BC 上一点 D，分别作________，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F，

因为__________________，所以$\angle A$=______．

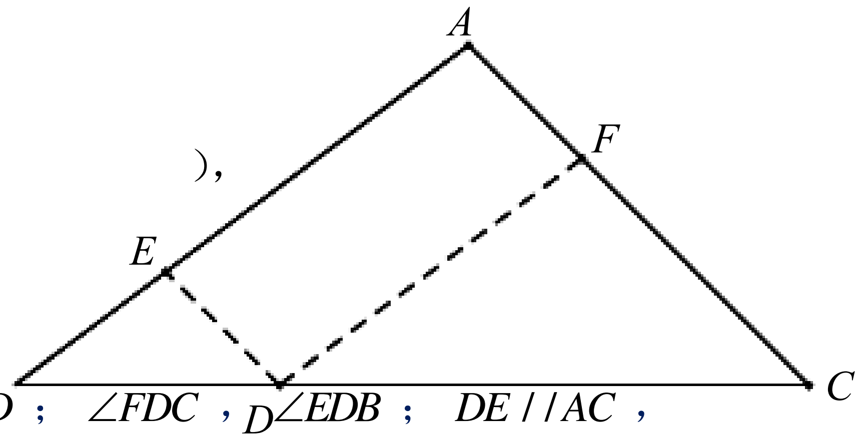
同理∠B=______，∠C=______．

因为________________，

所以________________．

因为∠EDB+∠EDF+∠FDC=180°（　　　　　　　　　　），

所以________________．



【答案】略

【解析】$DE//AC$；$DF//AB$；$DF//AB$；$\angle CFD$；$\angle FDC$；$\angle EDB$；$DE//AC$；$\angle EDF=\angle CFD=\angle A$；平角的意义；$\angle A+\angle B+\angle C=180°$．

【总结】考查三角形内角和的证明，利用平行线得到相等角等量代换即可．

模块二：命题、公理、定理

知识精讲

1、命题：能界定某个对象含义的句子叫作定义；对某一件事情做出判断的句子叫作命题；其判断为正确的命题叫作真命题；其判断为错误的命题叫作假命题．

数学命题通常由假设、结论两部分组成，可以写成“如果……那么……”的形式，“如果”开始的部分是题设，“那么”开始的部分是结论．

逆命题：在两个命题中，如果第一个名义的题设是第二个命题的结论，而第一个命题的结论是第二个命题的题设，那么这两个命题叫做互逆命题．如果把其中的一个命题叫做原命题，那么另一个叫做它的逆命题．

2、公理：人们从长期的实践中总结出来的真命题．它们可以作为判断其他命题真假的原始依据．

3、定理：从公理或其他真命题出发，用推理方法证明为正确的，并进一步作为判断其他命题定理真假的依据，这样的真命题叫做定理．

逆定理：如果一个定理的逆命题经过证明也是定理，那么这两个定理叫做互逆定理，其中一个叫做另一个的逆定理．

所有的命题都有逆命题，但不是所有的定理都有逆定理．

例题解析

【例7】 判断下列语句是不是命题?

（1） 直线 AB 和直线 CD 垂直；

（2） 同旁内角不相等，两直线平行；

（3） 天气预报播报，明天下雨的概率较大，大家出门带好雨具；

（4） 两点之间，线段最短；

（5） 对顶角相等；

（6） 请把门关上！

【答案】（2）、（4）、（5）是命题，（1）、（3）、（6）不是命题.

【解析】根据命题的定义，对某一件事情做出判断的句子叫做命题，(2)(4)(5)是对一件事情做出判断的句子，是命题，(1)(3)(6)不是.

【总结】考查对语句是否为命题的判断.

【例8】 判断下列命题的真假.

（1）两个钝角的和还是钝角；

（2）两个等腰三角形必定可以拼成一个直角三角形；

（3）等边三角形既是轴对称图形，又是中心对称图形；

（4）在一个三角形中，若一边上的中线等于这边的一半，则这个三角形是直角三角形；

（5）若两个三角形全等，则这两个三角形关于某个点成中心对称；

（6）有两边及第三边上的高对应相等的两个三角形全等.

【答案】（1）、（2）、（3）、（5）、（6）是假命题，（4）是真命题.

【解析】（1）两个钝角的和大于 180°，不是钝角，是假命题；（2）两个等腰三角形的三边长都不相等，则不能组合在一起，也不能拼成直角三角形，是假命题；（3）等边三角形不是中心对称图形，是假命题；（4）这条中线将三角形分成两个等腰三角形，根据等腰三角形两底角相等，可得这条边的对角为 180°÷2=90°，即为直角三角形，是真命题；（5）两全等三角形的对应点不一定交于一点，则不一定关于某点中心对称，是假命题；（6）保持一边不变，过一个顶点作一条射线，另一个顶点向这条射线作垂线，并以这点为圆心，长于垂线长的长度为半径作圆与射线有两个交点，形成三角形一个是锐角三角形，一个是钝角三角形，满足题目条件，但两个三角形明显不全等，是假命题.

【总结】考查判断一个命题的真假，判断命题为假命题举一个反例即可.

【例9】 下列定理中有逆定理的是（　　　　）.

A．直角三角形中没有钝角；　　*B*．互为相反数的数的绝对值相等；

C．同旁内角互补，两直线平行；　　*D*．若 $a=b$，则 $a^2=b^2$.

【答案】C

【解析】没有钝角的三角形可能为锐角三角形，A 错误；绝对值相等的数可能是相等也可能是互为相反数，B 错误；$a^2=b^2$，$a=\pm b$，D 错误；C 选项逆命题为平行线判定定理.

【总结】考查定理和相关逆定理，平行线三条性质定理都有逆定理.

【例10】 以下命题的逆命题为真命题的是（　　）.

A．三个角相等的三角形是等边三角形；

B．同角的余角相等；

C．在三角形中，钝角所对的边最长；

D．对顶角相等.

【答案】A

【解析】等边三角形三个内角相等，A 的逆命题是真命题；余角相等的角是等角，不一定是同角，B 的逆命题是假命题；根据“大边对大角”，最长边所对的角是三角形中最大角即可，三角形中的最大角不一定是钝角，例如直角三角形，C 的逆命题是假命题；相等的角不一定为对顶角，同位角、内错角等，D 的逆命题是假命题；故选 A.

【总结】考查对命题的逆命题的真假的判断，举反例即可.

【例11】 把下列命题改写成“如果……,那么……”的形式：

（1）等边对等角；

如果____________________，那么______________________________；

（2）同角的补角相等；

如果____________________，那么______________________________；

（3）平行于同一条直线的两条直线互相平行；

如果____________________，那么______________________________；

（4）全等三角形对应边相等；

如果____________________，那么______________________________.

【答案】略.

【解析】（1）如果一个三角形中有两条边相等，那么这两条边所对的角相等；

（2）如果两个角是同一个角的补角，那么这两个角相等；

（3）如果两条直线平行于同一条直线，那么这两条直线平行；

（4）一对全等三角形中，如果两条边是这对全等三角形的对应边，那么这两条边相等.

【总结】考查命题“如果……那么……”形式的改写，注意加入适当的描述性的语句，使得语句更通顺好理解.

【例12】　写出以下命题的逆命题，并判断真假：

（1）等边三角形的三个内角相等；

（2）有两边及一角对应相等的两个三角形全等；

（3）等腰三角形的底角相等；

（4）全等三角形对应角相等；

（5）全等三角形面积相等.

【答案】略.

【解析】（1）逆命题：三个内角相等的三角形是等边三角形，真命题；

（2）逆命题：两个三角形是全等三角形，这两个三角形中两条对应边和其中一个对应角都相等，真命题；

（3）逆命题：如果一个三角形中有两个角相等，那么这个三角形是等腰三角形，真命题；

（4）逆命题：对应角相等的两个三角形是全等三角形，假命题；

（5）逆命题：面积相等的两个三角形是全等三角形，假命题.

【总结】考查对命题的逆命题的真假的判断.

【例13】　以下说法中正确的有（　　　）个.

（1）逆定理一定是真命题；

（2）一个定理一定有逆定理；

（3）互逆命题一定是互逆定理；

（4）互逆定理一定是互逆命题.

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】B

【解析】逆定理的前提是真命题，（1）正确；定理对应的逆命题不一定为真命题，则没有逆定理，（2）错误；定理一定是命题，但命题不一定是定理，可知互逆定理一定是互逆命题，但互逆命题不一定是互逆定理，（3）错误，（4）正确；

综上，（1）（4）正确，故选 B.

【总结】考查定理和命题的区别和联系.

【例14】　下列命题是假命题有（　　　）个.

（1）　若 $a>0, b>0$ 则 $ab>0$；

（2）　两直线相交，只有一个交点；

（3） 等腰三角形是锐角三角形；

（4） 等边三角形是等腰三角形.

A．1 *B*．2 *C*．3 *D*．4

【答案】A

【解析】(1) 正确，是真命题；(2) 正确是真命题；等腰三角形顶角有可能为钝角，则为钝角三角形，(3) 是假命题；等边三角形是特殊的等腰三角形，(4) 是真命题；

综上 (3) 是假命题故选 A.

【总结】考查命题的真假的判断.

【例15】 判断下列命题的真假，若是假命题，举出反例.

（1） 如果两个角的两边分别平行，那么这两个角相等；

（2） 有两边及第三边上的高对应相等的两个三角形全等.

【答案】略

【解析】(1) 假命题，组成角的两条射线，一条方向相同，一条相反，则两角互补；

(2) 假命题，保持一边不变，过一个顶点作一条射线，另一个顶点向这条射线作垂线，并以这点为圆心，长于垂线长的长度为半径作圆与射线有两个交点，形成三角形一个是锐角三角形，一个是钝角三角形，满足题目条件，但两个三角形明显不全等.

【总结】考查命题的真假的判断，假命题举反例即可.

【例16】 写出下列命题的逆命题，判断逆命题的真假，并说明其中哪些是逆定理.

（1）等腰三角形两腰上的中线相等；

（2）内错角相等，两直线平行；

（3）等边对等角；

（4）两条平行直线被第三条直线所截，截得的同旁内角的角平分线互相垂直.

【答案】略.

【解析】(1) 逆命题：如果一个三角形中有两条边上的中线相等，那么这个三角形是等腰三角形，真命题，不是逆定理；

(2) 逆命题：两直线平行，内错角相等，真命题，是逆定理；

(3) 逆命题：等角对等边，真命题，是逆定理；

(4) 逆命题：如果两条直线被第三条直线所截，截得的一对同旁内角的角平分线互相垂直，那么这两条直线平行，真命题，不是逆定理.

【总结】考查一个命题的逆命题的写法，以及对命题真假的判断.

模块三：证明举例

知识精讲

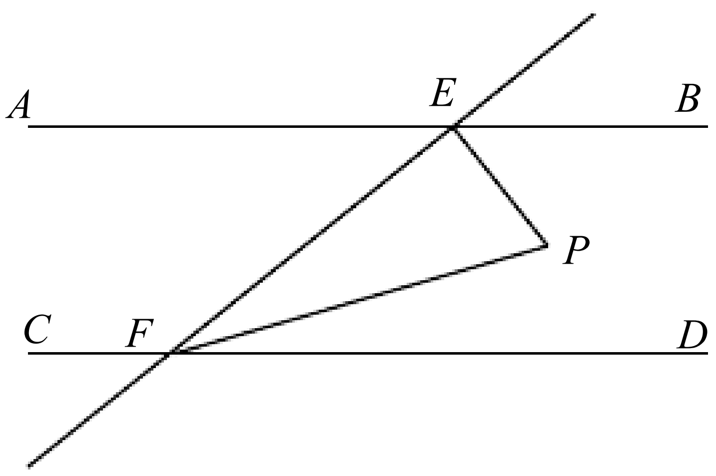
证明两直线平行的一般方法：

（1）平行线的判定和性质；

（2）利用全等得出结论证明两直线平行.

例题解析

【例17】 如图，若 $AB // CD$，直线 EF 分别与 AB 和 CD 相交于点 E 和 F，$EP \perp EF$，$\angle EFD$ 的平分线与 EP 相交于点 P，且 $\angle BEP=40°$，则 $\angle EPF=$____________.



【答案】65°．

【解析】$\because \angle PEF = 90°$，$\angle BEP = 40°$，

$\therefore \angle BEF = \angle PEF + \angle BEP = 130°$

$\because AB // CD$，　$\therefore \angle BEF + \angle EFD = 180°$

$\therefore \angle EFD = 50°$

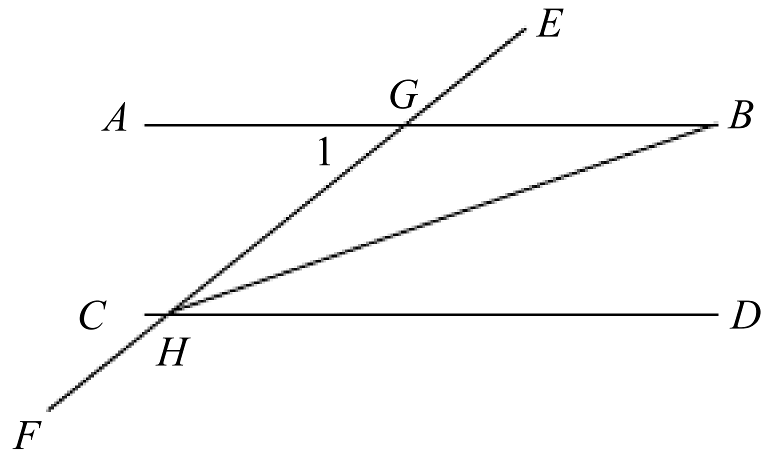
$\because PF$ 是 $\angle EFD$ 的角平分线，

$\therefore \angle EFP = \dfrac{1}{2}\angle EFD = 25°$

$\therefore \angle EPF = 180° - \angle PEF - \angle EFP = 65°$

【总结】考查平行线的性质定理的应用，两直线平行，同旁内角互补.

【例18】 已知 $AB /\!/ CD$，$\angle 1=2\angle GBH$．求证：BH 平分 $\angle DHG$ ．



【答案】略.

【解析】证明：$\because AB//CD$

$\therefore \angle 1=\angle DHG$，$\angle GBH=\angle DHB$

$\because \angle 1=2\angle GBH$， $\angle 1=\angle B+\angle GHB$

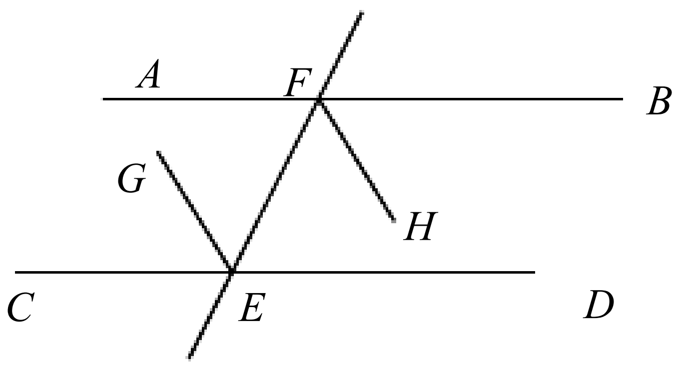
$\therefore \angle GHB=\angle GBH=\angle DHB$

即证 BH 平分 $\angle DHG$

【总结】考查平行线的性质定理的应用，两直线平行，内错角相等.

【例19】 已知：如图，$AB /\!/ CD$，且 FH、EG 分别是 $\angle BFE$、$\angle CEF$ 的平分线，

求证：$FH /\!/ EG$.



【答案】略

【解析】证明：$\because AB//CD$， $\therefore \angle CEF=\angle BFE$，

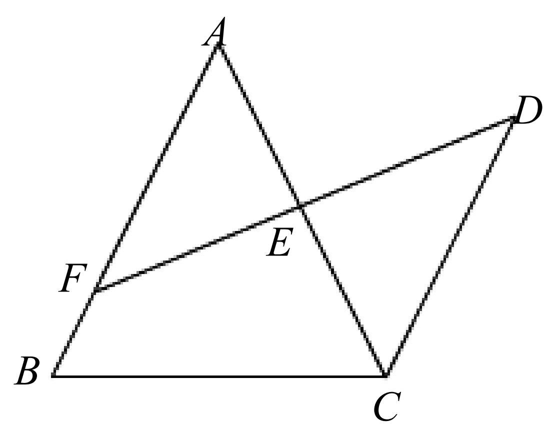
$\because GE$ 是 $\angle CEF$ 的角平分线，

$\therefore \angle GEF=\dfrac{1}{2}\angle CEF$，同理 $\angle EFH=\dfrac{1}{2}\angle BFE$

$\therefore \angle GEF=\angle EFH$， $\therefore FH//EG$．

【总结】考查平行线的判定定理，内错角相等，两直线平行.

【例20】如图，已知 E 是$\triangle ABC$ 一边 AC 的中点，F 是 AB 上的一点，FE 的延长线与 CD 交于点 D，且 $FE=DE$．求证：$DC /\!/ AB$．



【答案】略.

【解析】证明：$\because E$ 是 AC 的中点，$\therefore AE=CE$．

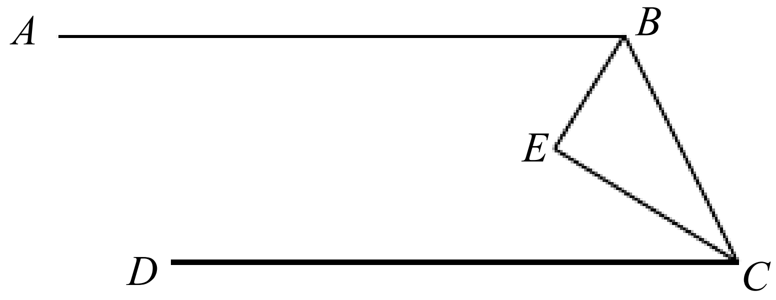
$\because FE=DE$，$\angle AEF=\angle DEC$， $\therefore \Delta AEF\cong \Delta CED$．

$\therefore \angle A=\angle ECD$， $\therefore DC//AB$．

【总结】考查平行线的判定定理，内错角相等，两直线平行．

【例21】 如图，BE、CE 分别为$\angle B$、$\angle C$ 的平分线，且$\angle BEC$=90°，

求证：$AB // CD$．



【答案】略

【解析】证明：$\because \angle BEC=90°$，

$\therefore \angle EBC+\angle ECB=90°$

$\because BE$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle ABC=2\angle EBC$，同理$\therefore \angle DCB=2\angle ECB$，

$\therefore \angle ABC+\angle DCB=2\left(\angle EBC+\angle ECB\right)=180°$

$\therefore AB//CD$

【总结】考查平行线的判定定理，同旁内角互补，两直线平行．

【例22】如图，已知$\angle ADE$=$\angle B$，$FG\perp AB$，$\angle EDC$=$\angle GFB$，求证：$CD\perp AB$．

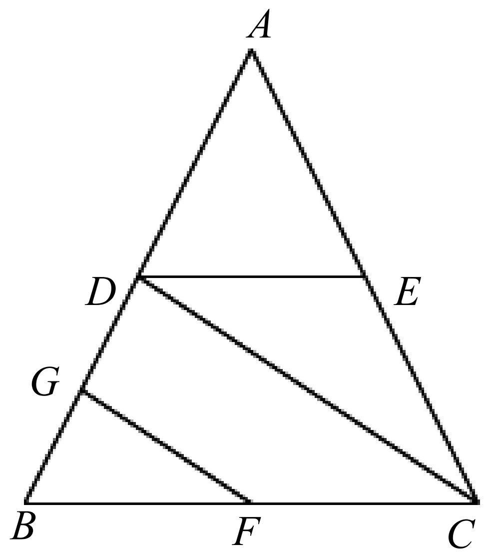
【答案】略

【解析】证明：$\because \angle ADE=\angle B$， $\therefore DE//BC$， $\therefore \angle EDC=\angle BCD$

$\because \angle EDC=\angle GFB$， $\therefore \angle DCB=\angle GFB$， $\therefore GF//DC$．

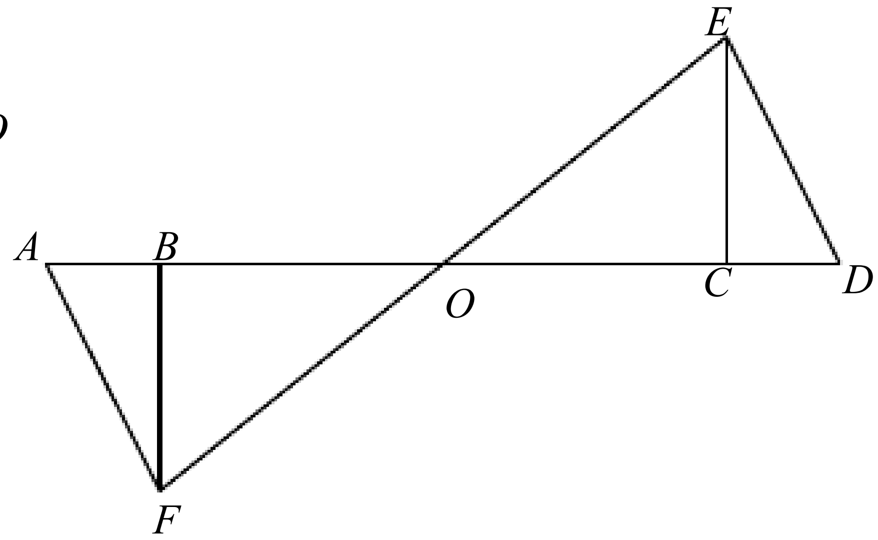
$\because FG\perp AB$， $\therefore CD\perp AB$．

【总结】考查平行线的性质和判定定理的相互转换应用．



【例23】 如图，已知 BO =OC，AB =DC，$BF // CE$，且 A、B、C、D、O 在同一直线上．

求证：$DE // AF$．



【答案】略

【解析】证明：$\because BF//CE$， $\therefore \angle BFO=\angle CEO$

$\because BO=OC$，$\angle BOF=\angle COE$

$\therefore \Delta BOF\cong \Delta COE$ $\therefore OE=OF$

$\because BO=OC$，$AB=CD$

$\therefore BO+AB=OC+CD$，即 $AO=OD$

$\because \angle AOF=\angle DOE$ $\therefore \Delta AOF\cong \Delta DOE$