河南省五市 2024 届高三第一次联考数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．集合 $A=\left\{x\middle|y=x^2\right\}$，$B=\left\{y\middle|y=x^2\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\varnothing$　　B．$\{0\}$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$\mathbf{R}$

2．以坐标原点为顶点，x 轴非负半轴为始边的角 α，其终边落在直线 $y=x$ 上，则有（　）

A．$\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\sqrt{2}$　　D．$\tan\alpha=\pm 1$

3．平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$，$\left|\vec{b}\right|=3$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=4$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{15}}{12}\vec{a}$　　B．$\dfrac{1}{4}\vec{a}$　　C．$\dfrac{3}{8}\vec{a}$　　D．$\dfrac{\sqrt{15}}{8}\vec{a}$

4．已知口袋中有 3 个黑球和 2 个白球（除颜色外完全相同），现进行不放回摸球，每次摸一个，则第一次摸到白球的情况下，第三次又摸到白球的概率为（　）

A．$\dfrac{1}{10}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{3}{5}$

5．已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f(x)=-\dfrac{3}{7}f'(3)\ln x-f(1)x^2-4x$，则 $f(x)$ 的极值点为（　）

A．$\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

6．某款卷筒卫生纸绕在圆柱形空心纸筒上，纸筒直径为 20mm，卫生纸厚度约为 0.1mm，若未使用时直径为 80mm，则这个卷筒卫生纸总长度大约为（　）（参考数据 $\pi\approx 3.14$）

A．47m　　B．51m　　C．94m　　D．102m

7．已知 P 为棱长为 $\sqrt{6}$ 的正四面体 $A-BCD$ 各面所围成的区域内部（不在表面上）一动点，记 P 到面 ABC，面 ACD，面 BCD，面 ABD 的距离分别为 h_1，h_2，h_3，h_4，若 $h_3+h_4=1$，则 $\dfrac{1}{2h_1}+\dfrac{8}{h_2}$ 的最小值为（　）

A．2　　B．$\dfrac{25}{2}$　　C．$\dfrac{9+4\sqrt{2}}{2}$　　D．$12+4\sqrt{2}$

8．抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 在其上一点处的切线方程为 $y-x-1=0$，点 A，B 为 C

上两动点，且$|AB|=6$，则AB的中点M到y轴距离的取值范围为（　）

A．$[2,+\infty)$　　B．$\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$　　C．$[3,+\infty)$　　D．$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

二、多选题

9．新高考模式下，化学、生物等学科实施赋分制，即通过某种数学模型将原始分换算为标准分.某校在一次高三模拟考试中实施赋分制的方式，其中应用的换算模型为：$y=kx+t\left(k,t\in\mathbf{R}\right)$，其中$x$为原始分，$y$为换算后的标准分.已知在本校2000名高三学生中某学科原始分最高得分为150分，最低得分为50分，经换算后最高分为150分，最低分为80分.则以下说法正确的是（　）

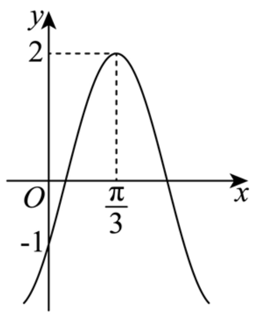
A．若学生甲本学科考试换算后的标准分为115分，则其原始得分为100分

B．若在原始分中学生乙的得分为中位数，则换算后学生乙的分数仍为中位数

C．该校本学科高三全体学生得分的原始分与标准分的标准差相同

D．该校本学科高三全体学生得分的原始分的平均分低于标准分的平均分

10．函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则（　）



A．$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$

B．不等式$f\left(x\right)>1$的解集为$\left(k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$(k\in\mathbf{Z})$

C．$\frac{7\pi}{12}$为$f\left(x\right)$的一个零点

D．若A，B，C为$\triangle ABC$内角，且$f\left(A\right)=f\left(B\right)$，则$A=B$或$C=\frac{\pi}{3}$

11．对于数列$\{a_n\}$（$a_n\in\mathrm{N}_+$），定义b_k为a_1，a_2，…，a_k中最大值（$k=1,2,\cdots,n$）（$n\in\mathrm{N}_+$），把数列$\{b_n\}$称为数列$\{a_n\}$的“M值数列”.如数列2，2，3，7，6的“M值数列”为2，2，3，7，7，则（　）

A．若数列$\{a_n\}$是递减数列，则$\{b_n\}$为常数列

B．若数列$\{a_n\}$是递增数列，则有$a_n=b_n$

C．满足$\{b_n\}$为2，3，3，5，5的所有数列$\{a_n\}$的个数为8

D．若$a_n=(-2)^{n-1}(n\in N_+)$，记S_n为$\{b_n\}$的前n项和，则$S_{100}=\frac{2}{3}(2^{100}-1)$

12．定义在**R**上的函数$f(x)=\log_a(\sqrt{1+b^2x^2}+bx)$（$a>0$且$a\neq1$，$b\neq0$），若存在实数$m$使得不等式$f(-m+\sqrt{m^2+12})+f(-m)\geq0$恒成立，则下列叙述正确的是（　）

A．若$a>1$，$b>0$，则实数m的取值范围为$[-2,2]$

B．若$0<a<1$，$b<0$，则实数m的取值范围为$(-\infty,2]$

C．若$a>1$，$b<0$，则实数m的取值范围为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

D．若$0<a<1$，$b>0$，则实数m的取值范围为$[2,+\infty)$

三、填空题

13．计算$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$（i为虚数单位）的值为_____.

14．$\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的二项展开式中的常数项为_________.

15．已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为**R**，记$g(x)=f'(x)$.且$f(1-3x)+f(3x-1)=0$，$g(1+x)+g(1-x)=0$，当$x\in(0,1]$，$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，则$\sum_{i=1}^{2024}|f(i)|=$_____.（用数字作答）

16．三棱锥$P-ABC$中，$PB=2$，$\angle PAB=\angle ABC=30°$，$PB\perp AB$，$AC\perp AB$，点$M$，$N$分别在线段$AP$，$BC$上运动.若二面角$P-AB-C$的大小为$60°$，则$|MN|$的最小值为_____.

四、解答题

17．　$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且满足$b^2-a^2=ac$.

(1)求证：$B=2A$；

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，求$\frac{\sin(C-A)-\sin B}{\sin A}$的取值范围.

18．已知函数$f(x)=a\ln x-x^2+a(a\in R)$.

(1)求函数$f(x)$的单调区间；

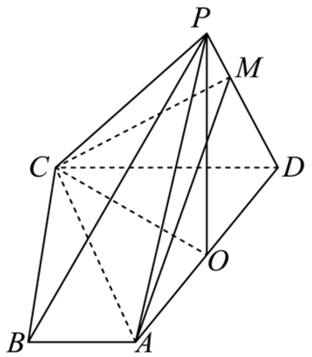
(2)若 $f\left(x\right)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围.

19．在等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_3+a_4+a_{11}=84$，$a_7=33$.

(1)求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

(2)若记 $b_k(k\in \mathrm{N}_+)$ 为 $\left\{a_n\right\}$ 中落在区间 $\left(5^k,5^{2k}\right)$ 内项的个数，求 $\left\{b_k\right\}$ 的前 k 项和 T_k.

20．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AB//CD$，$\angle ABC=90°$，且 $PA=PD=AD$，$PC=PB$.



(1)若 O 为 AD 的中点，证明：$CO\perp PO$；

(2)若 $\angle CDA=60°$，$AB=\frac{1}{2}CD=1$，点 M 满足 $\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{MP}$，求平面 PCB 与平面 ACM 所成角的余弦值.

21．某档电视节目举行了关于“中国梦”的知识竞赛，规则如下：选手每两人一组，同一组的两人以抢答的方式答题，抢到并回答正确得 1 分，答错则对方得 1 分，比赛进行到一方比另一方净胜 2 分结束，且多得 2 分的一方最终胜出.已知甲、乙两名选手分在同一组，两人都参与每一次抢题，且每次抢到题的概率都为$\frac{1}{2}$.甲、乙两人每道题答对的概率分别为$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{2}$，并且每道题两人答对与否相互独立，假设准备的竞赛题足够的多.

(1)求第二题答完比赛结束的概率；

(2)求知识竞赛结束时，抢答题目总数 X 的期望 $E\left(X\right)$.

22．已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，其长轴长为 6，离心率为 e 且 $e>\frac{1}{3}$，点 D 为 E 上一动点，$\triangle DF_1F_2$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$，过 $P\left(-3,0\right)$ 的直线 l_1，l_2 分别与椭圆 E 交于 A，B 两点（异于点 P），与直线 $x=8$ 交于 M，N 两点，且 M，N 两点的纵坐标之和为 11.过坐标原点 O 作直线 AB 的垂线，垂足为 H.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)问：平面内是否存在定点 Q，使得 $\left|HQ\right|$ 为定值？若存在，请求出 Q

点坐标；若不存在，请说明理由.

参考答案：

1．C

【分析】

求出函数 $y=x^2$ 的定义域和值域，求它们的交集即得.

【详解】因函数 $y=x^2$ 的定义域为 **R**，值域为 $[0,+\infty)$，故 $A=\mathrm{R}$，$B=[0,+\infty)$，故 $A\cap B=[0,+\infty)$.

故选：C.

2．C

【分析】

利用角 α 的终边落在直线 $y=x$ 上易于求得角 $\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $\alpha=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$，分别求出角 α 的正弦、余弦值，即可对选项一一判断.

【详解】因角 α 的终边落在直线 $y=x$ 上，故 $\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $\alpha=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

对于 A，当 $\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$ 时，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 A 项错误；

对于 B，当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$ 时，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 B 项错误；

对于 C，当 $\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$ 时，$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$ 时，$\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{2}$，故 C 项正确；

对于 D 项，当 $\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$ 时，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\tan\alpha=1$；

当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$ 时，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\tan\alpha=1$.故 D 项错误.

故选：C.

3．C

【分析】

由题设条件，利用向量的模长公式求得 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，再利用 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量的公式 $\frac{|\vec{b}|\cos\langle\vec{b},\vec{a}\rangle}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ 即可求得.

【详解】由 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{13+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=4$ 可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$，

而$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$\frac{|\vec{b}|\cos\langle\vec{b},\vec{a}\rangle}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{\frac{3}{2}}{4}\vec{a}=\frac{3}{8}\vec{a}$.

故选：C.

4．B

【分析】

分析题意，利用全概率公式即可得解.

【详解】设事件A表示“第二次摸到白球”，事件B表示“第三次又摸到白球”，

依题意，在第一次摸到白球的情况下，口袋中有3个黑球和1个白球（除颜色外完全相同），

所以$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(\overline{A})=\frac{3}{4}$，$P(B|A)=0$，$P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}$，

则所求概率为$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})=0\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

故选：B

5．D

【分析】

先对函数求导，先后代入$x=3$和$x=1$，确定函数$f\left(x\right)$的解析式，再通过导函数的符号确定函数的极小值点即可.

【详解】对$f(x)=-\frac{3}{7}f'(3)\ln x-f(1)x^2-4x$进行求导，可得$f'(x)=-\frac{3}{7}f'(3)\cdot\frac{1}{x}-2f(1)x-4$，

将$x=3$代入整理，$4f'(3)+21f(1)+14=0$ ①

将 $x=1$代入$f(x)=-\frac{3}{7}f'(3)\ln x-f(1)x^2-4x$可得$f(1)=-f(1)-4$，即$f(1)=-2$，

将其代入① ，解得：$f'(3)=7$，故得$f(x)=-3\ln x+2x^2-4x$.

于是$f'(x)=-\frac{3}{x}+4x-4$，由$f'(x)=0$可得$x=-\frac{1}{2}$或$x=\frac{3}{2}$，因$x>0$，

故当$0<x<\frac{3}{2}$时，$f'(x)<0$，当$x>\frac{3}{2}$时，$f'(x)>0$ ，

即$\frac{3}{2}$是函数$f\left(x\right)$的极小值点，函数没有极大值.

故选：D.

6．A

【分析】

因卷纸厚度固定，且卷在圆柱形空心纸筒上，故卷纸总长即每一圈卷纸的周长的和，而从内到外每圈卷纸的周长依次构成等差数列，故可以利用等差数列的基本量运算求解.

【详解】因空心纸筒直径为 20mm，则半径为10mm，其周长为$2\pi\times10=20\pi(\text{mm})$，卷纸未使用时直径为 80mm，则半径为$40\text{mm}$，其周长为$2\pi\times40=80\pi(\text{mm})$，

又因为卫生纸厚度约为 0.1mm，则卷纸共有的层数约为$\dfrac{80-20}{2\times0.1}=300$，即每一圈的卷纸周长构成一个等差数列，首项为$20\pi$，末项为$80\pi$，项数为$300$，

则这个卷筒卫生纸总长度即这个等差数列的前300项和：

$S_{300}=\dfrac{300(20\pi+80\pi)}{2}=15000\pi(\text{mm})$，而$15000\pi\approx15000\times3.14=47100\text{mm}\approx47\text{m}$.

即这个卷筒卫生纸总长度大约为47m.

故选：A.

7．B

【分析】

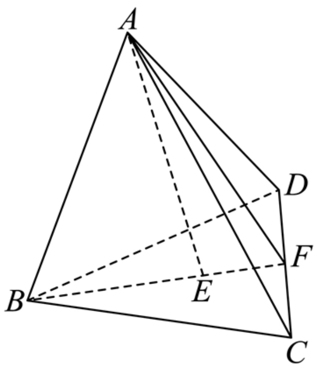
由等体积法求得$h_1+h_2+h_3+h_4$为定值 2，则有$h_1+h_2=1$，利用基本不等式求$\dfrac{1}{2h_1}+\dfrac{8}{h_2}$的最小值.

【详解】正四面体$A-BCD$棱长为$\sqrt{6}$，E为$\triangle BCD$的中心，则$AE\perp$底面BCD，

F为CD边中点，则E在BF上，如图所示，

则有$BF\perp CD$，$BF\subset$平面BCD，$AE\perp BF$，

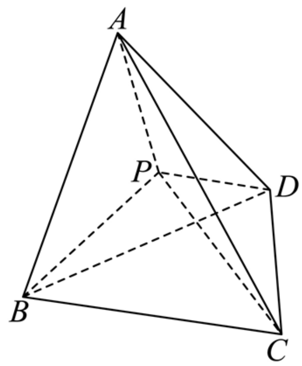
$AF=BF=\sqrt{BC^2-CF^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$EF=\dfrac{1}{3}BF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，



$AE=\sqrt{AF^2-EF^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$，即正四面体$ABCD$的高$h=2$，

P为正四面体$A-BCD$各面所围成的区域内部，连接PA,PB,PC,PD，

可得到 4 个小四面体，



设正四面体$A-BCD$各面的面积为S，则有$\frac{1}{3}S\left(h_1+h_2+h_3+h_4\right)=\frac{1}{3}Sh$，

得$h_1+h_2+h_3+h_4=h=2$，

由$h_3+h_4=1$，则$h_1+h_2=1$，

则$\frac{1}{2h_1}+\frac{8}{h_2}=\left(\frac{1}{2h_1}+\frac{8}{h_2}\right)\left(h_1+h_2\right)=\frac{1}{2}+8+\frac{h_2}{2h_1}+\frac{8h_1}{h_2}\geq\frac{1}{2}+8+2\sqrt{\frac{h_2}{2h_1}\cdot\frac{8h_1}{h_2}}=\frac{25}{2}$，

当且仅当$\frac{h_2}{2h_1}=\frac{8h_1}{h_2}$，即$h_1=\frac{1}{5},h_2=\frac{4}{5}$时等号成立，

$\frac{1}{2h_1}+\frac{8}{h_2}$的最小值为$\frac{25}{2}$.

故选：B

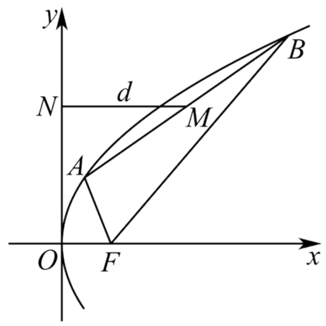
8．A

【分析】

根据抛物线的切线方程，利用求导数，设切点，求出$p=2$；接着设出$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，表示出点M到y轴的距离为：$d=\frac{x_1+x_2}{2}$，利用抛物线的定义表达式，将其转化为两条焦半径的和，结合图形易得$d\geq 2$，故得解.

【详解】依题意，因切线斜率为1，故切点必在第一象限，设切点为$(\frac{y_0^2}{2p},y_0)$，由$y=\sqrt{2px}$求导可得：$y'=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$，

依题，$\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_0}}=1$，即$\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{\frac{y_0^2}{2p}}}=1$化简得$y_0=p$，故切点为$(\frac{p}{2},p)$，代入$y-x-1=0$中，解得$p=2$，故$C:y^2=4x$.



如图，设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$，点 M 到 y 轴的距离为：

$d=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_1+1+x_2+1}{2}-1=\frac{|AF|+|BF|}{2}-1\geq\frac{|AB|}{2}-1=2$，

当且仅当线段 AB 经过点 F 时，等号成立. 故 AB 的中点 M 到 y 轴距离的取值范围为$[2,+\infty)$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：通过已知切线方程求出 p 值之后，对于 $d=\frac{x_1+x_2}{2}$ 的处理，应结合抛物线定义将其拼凑成 $\frac{x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}}{2}-\frac{p}{2}$，再转化成 $\frac{|AF|+|BF|}{2}-\frac{p}{2}$，结合图形把他缩小为 $\frac{|AB|}{2}-\frac{p}{2}$ 即得.

9．ABD

【分析】先求出换算模型公式，进行原始分和标准分的计算，得到有关结论.

【详解】对 A，由题意得：$\begin{cases}150=150k+b\\80=50k+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=0.7\\b=45\end{cases}$.所以换算模型为：$y=0.7x+45$

由 $115=0.7x+45\Rightarrow x=100$，故 A 对；

对 B，因为函数 $y=0.7x+45$ 为增函数，所以标准分不改变原始分的排名顺序，原始分的中位数换算后，得到的标准分仍为中位数，故 B 对；

对 C，由 $0.7x+45\geq x\Rightarrow x\leq150$，所以只有原始分是 150 分时，标准分与原始分相等，

当原式分低于 150 分时，标准分都高于原始分，所以标准分相比于原始分，分数更集中，

所以标准分的标准差比原始分的标准差要小，故 C 错误；

对 D，因为标准分都不低于原式分，所以原始分的平均分低于标准分的平均分，故 D 对.

故选：ABD

10．BCD

【分析】

根据图象中的两个已知点的坐标，代入解析式求得 ω 和 φ