浙江省杭州市浙大附中2023-2024学年高三数学第一学期期末学业水平测试试题

注意事项：

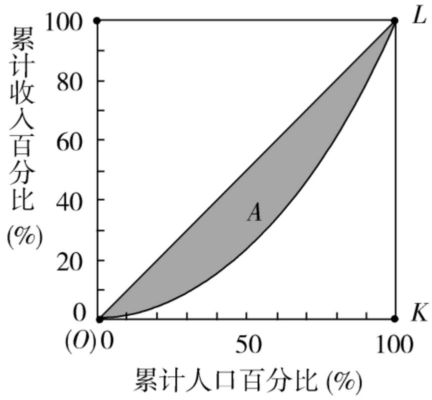
1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．为了研究国民收入在国民之间的分配，避免贫富过分悬殊，美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线，如图所示.劳伦茨曲线为直线OL时，表示收入完全平等.劳伦茨曲线为折线OKL时，表示收入完全不平等.记区域A为不平等区域，a表示其面积，S为$\triangle OKL$的面积，将$\text{Gini}=\dfrac{a}{S}$称为基尼系数.



对于下列说法：

①Gini越小，则国民分配越公平；

②设劳伦茨曲线对应的函数为$y=f(x)$，则对$\forall x\in(0,1)$，均有$\dfrac{f(x)}{x}>1$；

③若某国家某年的劳伦茨曲线近似为$y=x^2(x\in[0,1])$，则$\text{Gini}=\dfrac{1}{4}$；

④若某国家某年的劳伦茨曲线近似为$y=x^3(x\in[0,1])$，则$\text{Gini}=\dfrac{1}{2}$.

其中正确的是：

A．①④　　**B．**②③　　**C．**①③④　　**D．**①②④

2．二项式$\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)^7$展开式中，$\dfrac{1}{x}$项的系数为（　　）

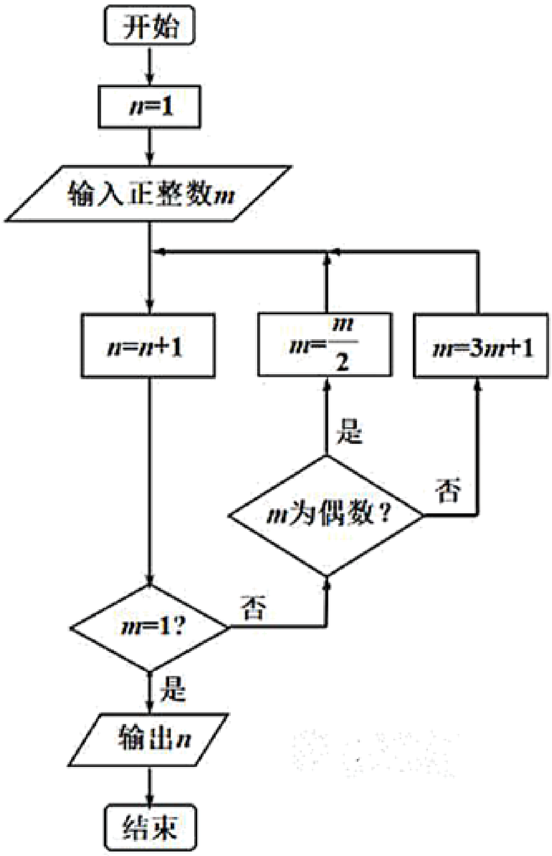
A．$-\dfrac{945}{16}$　　**B．**$-\dfrac{189}{32}$　　**C．**$-\dfrac{21}{64}$　　**D．**$\dfrac{2835}{8}$

3．在关于x的不等式$ax^2+2x+1>0$中，“$a>1$”是“$ax^2+2x+1>0$恒成立”的（　　）

A．充分不必要条件　　**B．**必要不充分条件

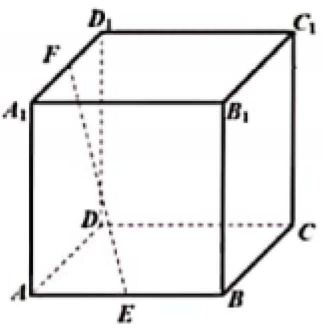
C．充要条件　　　　　　　　　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

4．20世纪产生了著名的“$3x+1$”猜想：任给一个正整数x，如果x是偶数，就将它减半；如果x是奇数，则将它乘3加1，不断重复这样的运算，经过有限步后，一定可以得到1.如图是验证“$3x+1$”猜想的一个程序框图，若输入正整数m的值为40，则输出的n的值是（　　）



A．8　　　　　　B．9　　　　　　C．10　　　　　　D．11

5．如图所示，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱AB，A_1D_1的中点分别为E，F，则直线EF与平面AA_1D_1D所成角的正弦值为（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　　　D．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

6．若集合M＝{1，3}，N＝{1，3，5}，则满足M∪X＝N的集合X的个数为(　　)

A．1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　B．2

C. 3　　　　**D.** 4

7．已知集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|e^x<1\}$，则（　　）

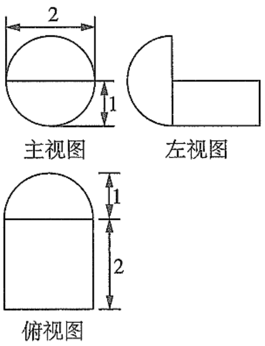
A. $A\cap B=\{x|x<1\}$　　　　**B.** $A\cup B=\{x|x<e\}$

C. $A\cup B=\{x|x<1\}$　　　　**D.** $A\cap B=\{x|0<x<1\}$

8．已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足 $|\vec{b}|=2,|\vec{a}+\vec{b}|=1,\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 且 $\lambda+2\mu=1$，若对每一个确定的向量 $\vec{a}$，记 $|\vec{c}|$ 的最小值为 m，则当 $\vec{a}$ 变化时，m 的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　**B.** $\frac{1}{3}$　　**C.** $\frac{1}{2}$　　**D.** 1

9．某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是（　　）



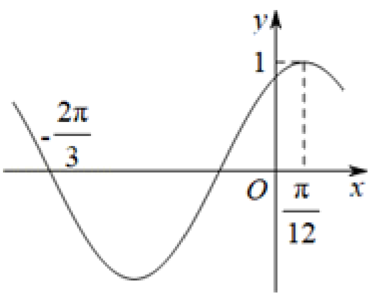
A. $\frac{5\pi}{3}$　　**B.** $\frac{4\pi}{3}$　　**C.** $2+\frac{2\pi}{3}$　　**D.** $4+\frac{2\pi}{3}$

10．设 $a,b\in(1,+\infty)$，则"$a>b$"是"$\log_a b<1$"的（　）

A. 充分而不必要条件　　　　**B.** 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　**D.** 既不充分也不必要条件

11．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$（　　）



A. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　　**B.** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　　**C.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　**D.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

12．已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z\cdot(1-i)=i$，则复数 z 在复平面内对应的点在（　　）

A．第一象限　　　B．第二象限　　　C．第三象限　　　D．第四象限

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．曲线 $y=x^3$ 在点（1，1）处的切线与 x 轴及直线 $x=a$ 所围成的三角形面积为 $\frac{1}{6}$，则实数 $a=$____。

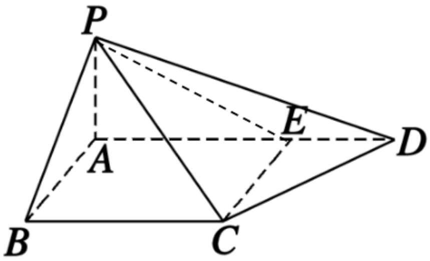
14．已知向量 $\vec{a}=(1,1),|\vec{b}|=2$，且向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$，$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$______.

15．定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，并且当 $0\le x\le 1$ 时 $f(x)=2^x-1$，则 $f(123)=$___

16．若 $\int_0^1\left(a-x^2\right)dx=\frac{5}{3}$，则 $a=$______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，点 E 在线段 AD 上，且 $CE//AB$.



（1）求证：$CE\perp$ 平面 PAD；

（2）若 $PA=AB=1$，$AD=3$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle CDA=45°$，求二面角 $P-CE-B$ 的正弦值.

18．（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a-1)x-\ln x(a\in R,a\ne 0)$

（1）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间

（2）记函数 $y=F(x)$ 的图象为曲线 C，设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是曲线 C 上不同两点，如果在曲线 C 上存在点 $M(x_0,y_0)$，使得① $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$；②曲线 C 在点 $\boldsymbol{M}$ 处的切线平行于直线 $\boldsymbol{AB}$，则称函数存在“中值和谐切线”，当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 是否存在“中值和谐切线”请说明理由

19．（12 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a=b\cos C+c\sin B$.

(1) 求 B 的值；

(2) 设 $\angle BAC$ 的平分线 AD 与边 BC 交于点 D，已知 $AD=\frac{17}{7}$，$\cos A=-\frac{7}{25}$，求 b 的值.

20．（12 分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，a_3+2 是 a_2 和 a_4 的等差中项.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)记 $b_n=a_n\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

21．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2t \\ y=\dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}$（$t$ 为参数），以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.若直线 l 交曲线 C 于 A，B 两点，求线段 AB 的长.

22．（10 分）已知 $f\left(x\right)=\left|x+1\right|+\left|x+3\right|$.

（**1**）解不等式 $f\left(x\right)<6$；

（**2**）若 a,b,c 均为正数，且 $f\left(a\right)+f\left(b\right)+c=10$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**A**

【解析】

对于①，根据基尼系数公式 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}$，可得基尼系数越小，不平等区域的面积 a 越小，国民分配越公平，所以①正确.对于②，根据劳伦茨曲线为一条凹向横轴的曲线，由图得 $\forall x\in(0,1)$，均有 $f(x)<x$，可得 $\dfrac{f(x)}{x}<1$，所以②错误.对于③，因为 $a=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3)\big|_0^1=\dfrac{1}{6}$，所以 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，所以③错误.对于④，因为

$a=\int_0^1(x-x^3)\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x^4)\big|_0^1=\dfrac{1}{4}$，所以 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$，所以④正确.故选 **A**.

2、**D**

【解析】

写出二项式的通项公式,再分析 x 的系数求解即可.

【详解】

二项式 $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)^7$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r\left(\dfrac{x}{2}\right)^{7-r}\left(-\dfrac{3}{x}\right)^r=C_7^r\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-r}(-3)^r x^{7-2r}$,令 $7-2r=-1$,得 $r=4$,故 $\dfrac{1}{x}$

项的系数为$C_7^4\left(\frac{1}{2}\right)^{7-4}(-3)^4=\frac{2835}{8}$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查了二项式定理的运算,属于基础题.

3、C

【解析】

讨论当$a>1$时，$ax^2+2x+1>0$是否恒成立；讨论当$ax^2+2x+1>0$恒成立时，$a>1$是否成立，即可选出正确答案.

【详解】

解：当$a>1$时，$\Delta=4-4a<0$，由$y=ax^2+2x+1$开口向上，则$ax^2+2x+1>0$恒成立；

当$ax^2+2x+1>0$恒成立时，若$a=0$，则$2x+1>0$ 不恒成立，不符合题意，

若$a\neq 0$ 时，要使得$ax^2+2x+1>0$恒成立，则$\begin{cases} a>0 \\ \Delta=4-4a<0 \end{cases}$，即$a>1$.

所以“$a>1$”是“$ax^2+2x+1>0$恒成立”的充要条件.

故选:C.

【点睛】

本题考查了命题的关系，考查了不等式恒成立问题.对于探究两个命题的关系时，一般分成两步，若$p\Rightarrow q$，则推出p是q 的充分条件；若$q\Rightarrow p$，则推出p 是q 的必要条件.

4、C

【解析】

列出循环的每一步，可得出输出的n的值.

【详解】

$n=1$，输入$m=40$，$n=1+1=2$，$m=1$不成立，m是偶数成立，则$m=\frac{40}{2}=20$；

$n=2+1=3$，$m=1$不成立，m是偶数成立，则$m=\frac{20}{2}=10$；

$n=3+1=4$，$m=1$不成立，m是偶数成立，则$m=\frac{10}{2}=5$；

$n=4+1=5$，$m=1$不成立，m是偶数不成立，则$m=3\times 5+1=16$；

$n=5+1=6$，$m=1$不成立，m是偶数成立，则$m=\frac{16}{2}=8$；

$n=6+1=7$，$m=1$不成立，m是偶数成立，则$m=\frac{8}{2}=4$；

$n=7+1=8$，$m=1$不成立，m是偶数成立，则$m=\frac{4}{2}=2$；

$n=8+1=9$，$m=1$不成立，m是偶数成立，则$m=\frac{2}{2}=1$；

$n=9+1=10$，$m=1$成立，跳出循环，输出n的值为10．

故选：**C.**

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果，考查计算能力，属于基础题.

5、**C**

【解析】

以 **D** 为原点，**DA**，**DC**，**DD_1** 分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系，由向量法求出直线 **EF** 与平面 **AA_1D_1D** 所成角的正弦值.

【详解】

以 **D** 为原点，**DA** 为 **x** 轴，**DC** 为 **y** 轴，**DD_1** 为 **z** 轴，建立空间直角坐标系，设正方体 **$ABCD-A_1B_1C_1D_1$** 的棱长为 **2**，

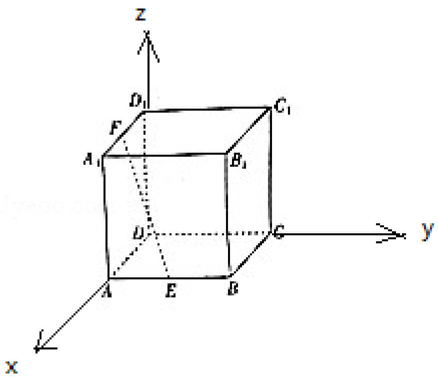
则$E(2,1,0)$，$F(1,0,2)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,-1,2)$，

取平面AA_1D_1D的法向量为$\vec{n}=(0,1,0)$，

设直线 **EF** 与平面 **AA_1D_1D** 所成角为 **θ**，则 **sinθ**=$|\cos\langle\overrightarrow{EF},\vec{n}\rangle|=|\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\vec{n}|}|=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore$直线EF与平面AA_1D_1D所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故选 **C**.



【点睛】

本题考查了线面角的正弦值的求法，也考查数形结合思想和向量法的应用，属于中档题.

6、**D**

【解析】

X 可以是 $\{5\},\{1,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}$ 共 **4** 个，选 **D.**

7、**C**

【解析】

求出集合 B，计算出 $A\cap B$ 和 $A\cup B$，即可得出结论.

【详解】

$\because A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|e^x<1\}=\{x|x<0\}$，$\therefore A\cap B=\{x|x<0\}$，$A\cup B=\{x|x<1\}$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查交集和并集的计算，考查计算能力，属于基础题.

8、**B**

【解析】

根据题意,建立平面直角坐标系.令 $\overrightarrow{OP}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$. E 为 OB 中点.由 $|\vec{a}+\vec{b}|=1$ 即可求得 P 点的轨迹方程.将 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 变形,结合 $\lambda+2\mu=1$ 及平面向量基本定理可知 P,C,E 三点共线.由圆切线的性质可知 $|\vec{c}|$ 的最小值 m 即为 O 到直线 PE 的距离最小值,且当 PE 与圆 M 相切时, m 有最大值.利用圆的切线性质及点到直线距离公式即可求得直线方程,进而求得原点到直线的距离,即为 m 的最大值.

【详解】

根据题意, $|\vec{b}|=2$, 设 $\overrightarrow{OP}=\vec{a}=(x,y),\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(2,0),\overrightarrow{OC}=\vec{c},E(1,0)$

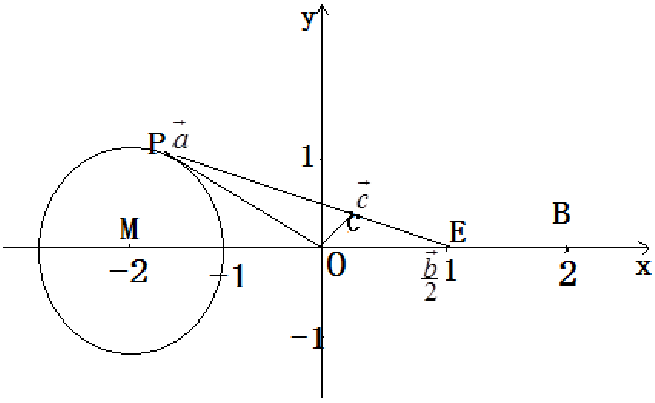
则 $\overrightarrow{OE}=\dfrac{\vec{b}}{2}$

由 $|\vec{a}+\vec{b}|=1$ 代入可得 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=1$

即 P 点的轨迹方程为 $(x+2)^2+y^2=1$

又因为 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$,变形可得 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+2\mu\left(\dfrac{\vec{b}}{2}\right)$,即 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OP}+2\mu\overrightarrow{OE}$,且 $\lambda+2\mu=1$

所以由平面向量基本定理可知 P,C,E 三点共线,如下图所示:



所以$|\vec{c}|$的最小值m即为O到直线PE的距离最小值

根据圆的切线性质可知,当PE与圆M相切时,m有最大值

设切线PE的方程为$y=k(x-1)$,化简可得$kx-y-k=0$

由切线性质及点M到直线距离公式可得$\frac{|-2k-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,化简可得$8k^2=1$

即$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

所以切线方程为$\frac{\sqrt{2}}{4}x-y-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$或$\frac{\sqrt{2}}{4}x+y-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$

所以当$\vec{a}$变化时，O到直线PE的最大值为$m=\frac{\left|-\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(\pm1)^2}}=\frac{1}{3}$

即m的最大值为$\frac{1}{3}$

故选:**B**

【点睛】

本题考查了平面向量的坐标应用,平面向量基本定理的应用，圆的轨迹方程问题,圆的切线性质及点到直线距离公式的应用,综合性强,属于难题.

9、**A**

【解析】

观察可知，这个几何体由两部分构成,：一个半圆柱体，底面圆的半径为**1**，高为**2**；一个半球体，半径为**1**，按公式计算可得体积。

【详解】

设半圆柱体体积为V_1，半球体体积为V_2，由题得几何体体积为

$V=V_1+V_2=\pi\times1^2\times2\times\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\times\pi\times1^3\times\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{3}$，故选 **A**。

【点睛】

本题通过三视图考察空间识图的能力，属于基础题。

10、C

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义结合对数的运算进行判断即可．

【详解】

∵*a*，*b*∈（1，+∞），

∴*a*＞*b*⇒$\log_a b$＜1，

$\log_a b$＜1⇒*a*＞*b*，

∴*a*＞*b* 是 $\log_a b$＜1 的充分必要条件，

故选 ***C***．

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据不等式的解法是解决本题的关键．

11、A

【解析】

先利用最高点纵坐标求出 *A*，再根据$\frac{3T}{4}=\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$求出周期，再将$\left(\frac{\pi}{12},1\right)$代入求出 φ 的值.最后将$\frac{3\pi}{8}$代入解析式即可.

【详解】

由图象可知 ***A*＝1，**

$\because\frac{3T}{4}=\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 ***T*＝π，**$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

∴*f*（*x*）＝sin（2*x*+*φ*），将$\left(\frac{\pi}{12},1\right)$代入得$sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)$ **＝1，**

$\therefore\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，结合 **0＜*φ*＜**$\frac{\pi}{2}$，**∴*φ*＝**$\frac{\pi}{3}$.

$\therefore f\left(x\right)=sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.