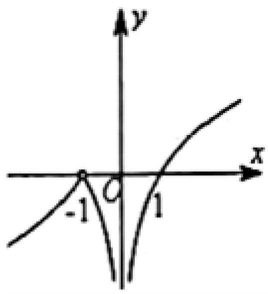
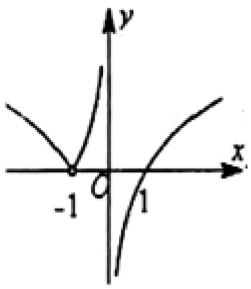
# 浙江省杭州市 2024 届高三上数学期末考试试题

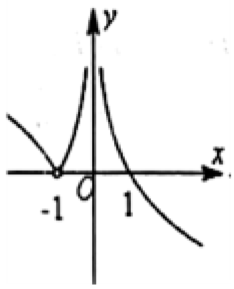
注意事项:
1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2．答题时请按要求用笔。
3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

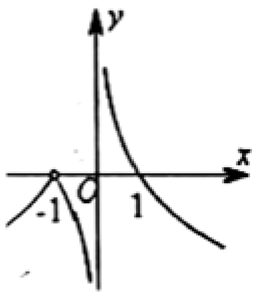
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{\left|x+1\right|}\log_a\left|x\right|$（$0<a<1$）的图象的大致形状是（　　）

A. 


B. 


C. 


D. 


2．设 $m$ 、$n$ 是两条不同的直线，$\alpha$ 、$\beta$ 是两个不同的平面，则 $m\perp\beta$ 的一个充分条件是（　　）

A. $\alpha\perp\beta$ 且 $m\subset\alpha$　B. $m//n$ 且 $n\perp\beta$　C. $\alpha\perp\beta$ 且 $m//\alpha$　D. $m\perp n$ 且 $n//\beta$

3．已知定义在 $R$ 上的可导函数 $f\left(x\right)$ 满足 $\left(1-x\right)\cdot f\left(x\right)+x\cdot f'\left(x\right)>0$，若 $y=f(x+2)-e^3$ 是奇函数，则不等式 $x\cdot f(x)-2e^{x+1}<0$ 的解集是（　　）

A. $\left(-\infty,2\right)$　B. $\left(-\infty,1\right)$　C. $\left(2,+\infty\right)$　D. $\left(1,+\infty\right)$

4.记集合 $A=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le16\right\}$ 和集合 $B=\left\{\left(x,y\right)\middle|x+y\le4,x\ge0,y\ge0\right\}$ 表示的平面区域分别是 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$,若在区域 $\Omega_1$ 内任取一点,则该点落在区域 $\Omega_2$ 的概率为(　　)

A. $\dfrac{1}{4\pi}$　B. $\dfrac{1}{\pi}$　C. $\dfrac{1}{2\pi}$　D. $\dfrac{\pi-2}{4\pi}$

5．已知复数 $z$ 满足 $i(3+z)=1+i$，则 $z$ 的虚部为（　　）

A．$-i$　　　　B．$i$　　　　C．$-1$　　　　D．1

6．已知数列$\{\square_\square\}$满足：$\square_\square=\begin{cases}2, & \square\le 5\\ \square_1\square_2\ldots\square_{\square-1}-1, & \square\ge 6\end{cases}(\square\in \mathrm{N}^*)$.若正整数$\square(\square\ge 5)$使得

$\square_1^2+\square_2^2+\cdots+\square_\square^2=\square_1\square_2\ldots\square_\square$成立，则$\square$ =(　　)

A．16　　　　B．17　　　　C．18　　　　D．19

7．若函数$f\left(x\right)=-\ln x+x+h$，在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上任取三个实数$a$，$b$，$c$均存在以$f\left(a\right)$，$f\left(b\right)$，$f\left(c\right)$为边长的三角形，则实数$h$的取值范围是（　　）

A．$\left(-1,\frac{1}{e}-1\right)$　　　　B．$\left(\frac{1}{e}-1,e-3\right)$　　　　C．$\left(\frac{1}{e}-1,+\infty\right)$　　　　D．$\left(e-3,+\infty\right)$

8．若复数$z=\dfrac{1-bi}{2+i}$（$b\in R,i$为虚数单位）的实部与虚部相等，则$b$的值为(　　)

A．3　　　　B．$\pm 3$　　　　C．$-3$　　　　D．$\pm\sqrt{3}$

9．射线测厚技术原理公式为$I=I_0e^{-\rho\mu t}$，其中$I_0$，$I$分别为射线穿过被测物前后的强度，$e$是自然对数的底数，$t$为被测物厚度，$\rho$为被测物的密度，$\mu$是被测物对射线的吸收系数.工业上通常用镅241（$^{241}Am$）低能$\gamma$射线测量钢板的厚度.若这种射线对钢板的半价层厚度为0.8，钢的密度为7.6，则这种射线的吸收系数为（　　）

（注：半价层厚度是指将已知射线强度减弱为一半的某种物质厚度，$\ln 2\approx 0.6931$，结果精确到0.001）

A．0.110　　　　B．0.112　　　　C．0.114　　　　D．0.116

10．若$x\in\left[0,1\right]$时，$e^x-|2x-a|\ge 0$，则$a$的取值范围为（　　）

A．$\left[-1,1\right]$　　　　B．$\left[2-e,e-2\right]$　　　　C．$\left[2-\mathrm{e},1\right]$　　　　D．$\left[2\ln 2-2,1\right]$

11．设函数$f(x)$定义域为全体实数，令$g(x)=f(|x|)-|f(x)|$．有以下6个论断：

①$f(x)$是奇函数时，$g(x)$是奇函数；

②$f(x)$是偶函数时，$g(x)$是奇函数；

③$f(x)$是偶函数时，$g(x)$是偶函数；

④$f(x)$是奇函数时，$g(x)$是偶函数

⑤$g(x)$是偶函数；

⑥对任意的实数$x$，$g(x)\leqslant 0$．

那么正确论断的编号是（　　）

A．③④　　B．①②⑥　　C．③④⑥　　D．③④⑤

12．二项式$(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2})^n$的展开式中只有第六项的二项式系数最大，则展开式中的常数项是( )

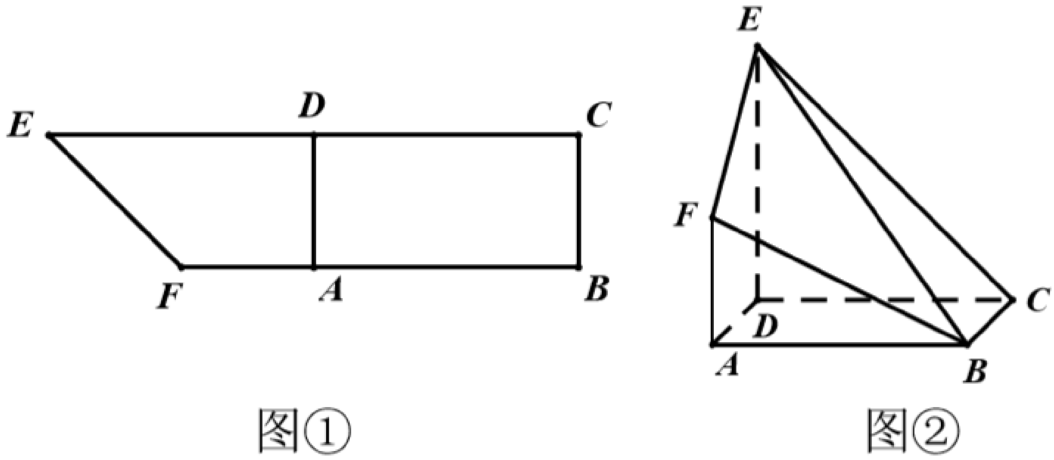
A．180　　B．90　　C．45　　D．360

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．某班有学生 52 人,现将所有学生随机编号,用系统抽样方法,抽取一个容量为 4 的样本,已知 5 号、31 号、44 号学生在样本中,则样本中还有一个学生的编号是__________.

14．设$x,y$满足约束条件$\begin{cases}x+2y-2\le 0\\ x-y-1\le 0\\ 2x+y+1\ge 0\end{cases}$，则$z=\frac{x+1}{y+2}$的取值范围是______.

15．如图所示，在直角梯形$BCDF$中，$\angle CBF=\angle BCE=90^\circ$，$A$、$D$分别是$BF$、$CE$上的点，$AD//BC$，且$AB=DE=2BC=2AF$（如图①）.将四边形$ADEF$沿$AD$折起，连接$BE$、$BF$、$CE$（如图②）.在折起的过程中，则下列表述：




①$AC//$平面$BEF$；

②四点$B$、$C$、$E$、$F$可能共面；

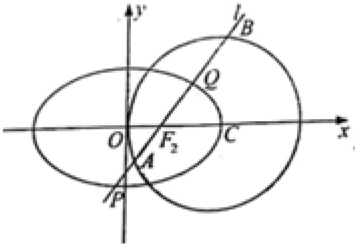
③若$EF\perp CF$，则平面$ADEF\perp$平面$ABCD$；

④平面$BCE$与平面$BEF$可能垂直.其中正确的是__________.

16．函数$f(x)=\frac{2+\ln 2x}{x^2}$的图象在$x=\frac{e}{2}$处的切线方程为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

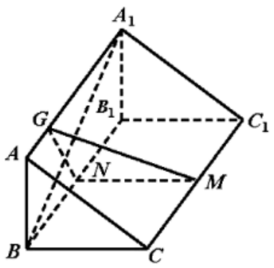
17．（12 分）如图,设点$F_2(1,0)$为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，圆$C:(x-a)^2+y^2=a^2$,过$F_2$且斜率为$k(k>0)$的直线$l$交圆$C$于$A,B$两点，交椭圆$E$于点$P,Q$两点，已知当$k=\sqrt{3}$时，$AB=2\sqrt{6}$.




（1）求椭圆 $E$ 的方程.

（2）当 $PF_2=\dfrac{10}{3}$ 时，求 $\Delta PQC$ 的面积.

18.（12 分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 $ABC$ 为等腰直角三角形，$AB\perp BC$，$AA_1=2AB=4$，$M$，$N$ 分别为 $CC_1$，$BB_1$ 的中点，$G$ 为棱 $AA_1$ 上一点，若 $A_1B\perp$ 平面 $MNG$.




（1）求线段 $AG$ 的长；

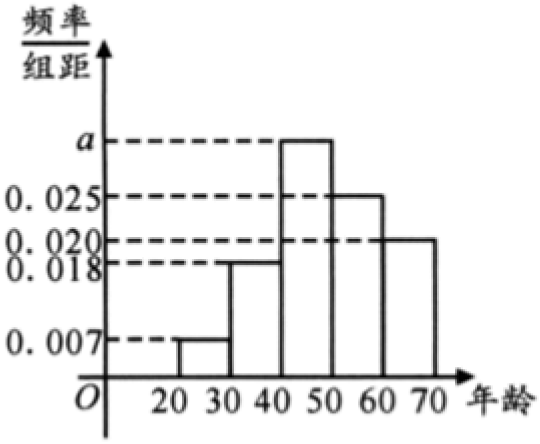
（2）求二面角 $B-MG-N$ 的余弦值.

19.（12 分）已知函数 $f(x)=(x-a)^2-2x\ln x$，其导函数为 $f'(x)$，

（1）若 $a=0$，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2）证明：对任意的 $0<s<t<2$，恒有 $\dfrac{f'(s)-f'(t)}{s-t}<1$.

20.（12 分）某保险公司给年龄在 $20-70$ 岁的民众提供某种疾病的一年期医疗保险，现从 $10000$ 名参保人员中随机抽取 $100$ 名作为样本进行分析，按年龄段 $[20,30),[30,40),[40,50),[50,60),[60,70]$ 分成了五组，其频率分布直方图如下图所示；参保年龄与每人每年应交纳的保费如下表所示. 据统计，该公司每年为这一万名参保人员支出的各种费用为一百万元.




| 年龄（单位：岁） | $[20,30)$ | $[30,40)$ | $[40,50)$ | $[50,60)$ | $[60,70]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 保费（单位：元） | $x$ | $2x$ | $3x$ | $4x$ | $5x$ |

（1）用样本的频率分布估计总体分布，为使公司不亏本，求$x$精确到整数时的最小值$x_0$；

（2）经调查，年龄在$[60,70]$之间的老人每$50$人中有$1$人患该项疾病(以此频率作为概率).该病的治疗费为$12000$元，如果参保，保险公司补贴治疗费$10000$元.某老人年龄$66$岁，若购买该项保险($x$取$(1)$中的$x_0$).针对此疾病所支付的费用为$X$元；若没有购买该项保险，针对此疾病所支付的费用为$Y$元.试比较$X$和$Y$的期望值大小，并判断该老人购买此项保险是否划算？

21.（12分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$A$为椭圆上一动点（异于左右顶点），$\Delta AF_1F_2$面积的最大值为$\sqrt{3}$.

（1）求椭圆$C$的方程；

（2）若直线$l:y=x+m$与椭圆$C$相交于点$A,B$两点，问$y$轴上是否存在点$M$，使得$\Delta ABM$是以$M$为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求点$M$的坐标；若不存在，请说明理由.

22.（10分）已知函数$f(x)=axe^x$（$a\in R$，$a\neq 0$），$g(x)=x+\ln x+1$.

（Ⅰ）讨论$f(x)$的单调性；

（Ⅱ）若对任意的$x>0$，$f(x)\geq g(x)$恒成立，求实数$a$的取值范围.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

**【解析】**

对 x 分类讨论，去掉绝对值，即可作出图象.

**【详解】**

$$f\left(x\right)=\frac{x+1}{\left|x+1\right|}\log_a\left|x\right|=\begin{cases}-\log_a\left(-x\right), & x<-1,\\ \log_a\left(-x\right), & -1<x<0,\\ \log_a x, & x>0.\end{cases}$$

故选 **C**.

**【点睛】**

识图常用的方法

**(1)**定性分析法：通过对问题进行定性的分析，从而得出图象的上升(或下降)的趋势，利用这一特征分析解决问题；

**(2)**定量计算法：通过定量的计算来分析解决问题；

**(3)**函数模型法：由所提供的图象特征，联想相关函数模型，利用这一函数模型来分析解决问题.

2、**B**

**【解析】**

由 $m//n$ 且 $n\perp\beta$ 可得 $m\perp\beta$，故选 **B.**

3、**A**

**【解析】**

构造函数 $g\left(x\right)=\frac{x\cdot f\left(x\right)}{e^x}$，根据已知条件判断出 $g\left(x\right)$ 的单调性.根据 $y=f\left(x+2\right)-e^3$ 是奇函数，求得 $f\left(2\right)$ 的值，由此化简不等式 $x\cdot f(x)-2e^{x+1}<0$ 求得不等式的解集.

**【详解】**

构造函数 $g\left(x\right)=\frac{x\cdot f\left(x\right)}{e^x}$，依题意可知 $g'\left(x\right)=\frac{\left(1-x\right)\cdot f\left(x\right)+x\cdot f'\left(x\right)}{e^x}>0$，所以 $g\left(x\right)$ 在 $R$ 上递增.由于

$y=f\left(x+2\right)-e^{3}$ 是奇函数，所以当 $x=0$ 时，$y=f\left(2\right)-e^{3}=0$，所以 $f\left(2\right)=e^{3}$，所以 $g\left(2\right)=\dfrac{2\times e^{3}}{e^{2}}=2e$.

由 $x\cdot f(x)-2e^{x+1}<0$ 得 $g\left(x\right)=\dfrac{x\cdot f\left(x\right)}{e^{x}}<2e=g\left(2\right)$，所以 $x<2$，故不等式的解集为 $\left(-\infty,2\right)$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查构造函数法解不等式，考查利用导数研究函数的单调性，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

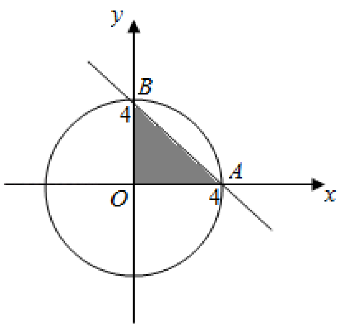
4、C

【解析】

据题意可知，是与面积有关的几何概率，要求 $M$ 落在区域 $\Omega_2$ 内的概率，只要求 $A$ 、$B$ 所表示区域的面积，然后代入概率公式 $P=\dfrac{区域\Omega_2的面积}{区域\Omega_1的面积}$，计算即可得答案.

【详解】

根据题意可得集合 $A=\{(x,y)\,|\,x^{2}+y^{2}\leqslant 16\}$ 所表示的区域即为如图所表示：




的圆及内部的平面区域，面积为 $16\pi$，

集合 $B=\{(x,y)\,|\,x+y-4\leqslant 0，\ x\geqslant 0，\ y\geqslant 0\}$ 表示的平面区域即为图中的 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{AOB}$，$S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=8$，

根据几何概率的计算公式可得 $P=\dfrac{8}{16\pi}=\dfrac{1}{2\pi}$，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了几何概率的计算，本题是与面积有关的几何概率模型．解决本题的关键是要准确求出两区域的面积.

5、C

【解析】

利用复数的四则运算可得 $z=-2-i$，即可得答案.

【详解】

$\because i(3+z)=1+i$，$\therefore 3+z=\dfrac{1+i}{i}=1-i$，

$\therefore z=-2-i$，$\therefore$复数 $z$ 的虚部为 $-1$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查复数的四则运算、虚部概念，考查运算求解能力，属于基础题.

6、**B**

【解析】

由题意可得$\square_1=\square_2=\square_3=\square_4=\square_5=2$，$\square_6=\square_1\square_2\square_3\ldots\square_5-1=2^5-1=31$，$\square\ \ 6$时，$\square_1\square_2\ldots\square_{\square-1}=1+\square_\square$，

将$\square$换为$\square+1$，两式相除，$\square_\square^2=\square_{\square+1}-\square_\square+1$，$\square\ \ 6$，

累加法求得$\square_6^2+\square_7^2+\cdots+\square_\square^2=\square_{\square+1}-\square_6+\square-5$即有

$\square_1^2+\square_2^2+\cdots+\square_\square^2=20+\square_{\square+1}-\square_6+\square-5=\square_{\square+1}+\square-16$，结合条件，即可得到所求值.

【详解】

解：$\square_\square=\begin{cases}2,\square\ \ 5\\ \square_1\square_2\ldots\square_{\square-1}-1,\square\ \ 6\end{cases}(\square\in\square*)$，

即$\square_1=\square_2=\square_3=\square_4=\square_5=2$，$\square_6=\square_1\square_2\square_3\ldots\square_5-1=2^5-1=31$，

$\square\ \ 6$时，$\square_1\square_2\ldots\square_{\square-1}=1+\square_\square$，

$\square_1\square_2\ldots\square_\square=1+\square_{\square+1}$，

两式相除可得$\frac{1+\square_{\square+1}}{1+\square_\square}=\square_\square$，

则$\square_\square^2=\square_{\square+1}-\square_\square+1$，$\square\ \ 6$，

由$\square_6^2=\square_7-\square_6+1$，

$\square_7^2=\square_8-\square_7+1$，

…，

$\square_\square^2=\square_{\square+1}-\square_\square+1$，$\square\ \ 5$，

可得$\square_6^2+\square_7^2+\cdots+\square_\square^2=\square_{\square+1}-\square_6+\square-5$

$\square_1^2+\square_2^2+\cdots+\square_{\square}^2=20+\square_{\square+1}-\square_6+\square-5=\square_{\square+1}+\square-16$,

且$\square_1\square_2\ldots\square_{\square}=1+\square_{\square+1}$,

正整数$\square(\square\ \ 5)$时，要使得$\square_1^2+\square_2^2+\cdots+\square_{\square}^2=\square_1\square_2\ldots\square_{\square}$成立，

则$\square_{\square+1}+\square-16=\square_{\square+1}+1$,

则$\square=17$,

故选：□.

【点睛】

本题考查与递推数列相关的方程的整数解的求法，注意将题设中的递推关系变形得到新的递推关系，从而可简化与数列相关的方程，本题属于难题.

7、D

【解析】

利用导数求得$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上的最大值和最小，根据三角形两边的和大于第三边列不等式，由此求得$h$的取值范围.

【详解】

$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{1}{x}+1=\frac{x-1}{x}$，

所以$f(x)$在$\left(\frac{1}{e},1\right)$上递减，在$(1,e)$上递增，$f(x)$在$x=1$处取得极小值也即是最小值，$f(1)=-\ln 1+1+h=1+h$，

$f\left(\frac{1}{e}\right)=-\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+h=\frac{1}{e}+1+h$，$f(e)=-\ln e+e+h=e-1+h$，$f\left(\frac{1}{e}\right)<f(e)$，

所以$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上的最大值为$f(e)=e-1+h$.

要使在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上任取三个实数$a$，$b$，$c$均存在以$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$为边长的三角形，

则需$f(a)+f(b)>f(c)$恒成立，且$f(1)>0$，

也即$\left[f(a)+f(b)\right]_{\min}>f(c)_{\max}$，也即当$a=b=1$、$c=e$时，$2f(1)>f(\mathrm{e})$成立，

即$2(1+h)>e-1+h$，且$f(1)>0$，解得$h>e-3$.所以$h$的取值范围是$(e-3,+\infty)$.

故选：D

【点睛】

本小题主要考查利用导数研究函数的最值，考查恒成立问题的求解，属于中档题.

8、**C**

【解析】

利用复数的除法，以及复数的基本概念求解即可.

【详解】

$z=\frac{1-bi}{2+i}=\frac{2-b-(2b+1)i}{5}$，又$z$的实部与虚部相等，

$\therefore b-2=2b+1$，解得$b=-3$.

故选:**C**

【点睛】

本题主要考查复数的除法运算，复数的概念运用.

9、**C**

【解析】

根据题意知,$t=0.8,\rho=7.6,\frac{I}{I_0}=\frac{1}{2}$，代入公式$I=I_0e^{-\rho\mu t}$,求出$\mu$即可.

【详解】

由题意可得,$t=0.8,\rho=7.6,\frac{I}{I_0}=\frac{1}{2}$因为$I=I_0e^{-\rho\mu t}$，

所以$\frac{1}{2}=e^{-7.6\times0.8\times\mu}$,即$\mu=\frac{\ln 2}{7.6\times0.8}=\frac{0.6931}{6.08}\approx0.114$.

所以这种射线的吸收系数为$0.114$.

故选:**C**

【点睛】

本题主要考查知识的迁移能力,把数学知识与物理知识相融合;重点考查指数型函数,利用指数的相关性质来研究指数型函数的性质,以及解指数型方程；属于中档题.

10、**D**

【解析】

由题得$2x-e^x\le a\le 2x+e^x$对$\forall x\in[0,1]$恒成立，令$f(x)=2x-e^x,g(x)=2x+e^x$，然后分别求出$f(x)_{\max}$，$g(x)_{\min}$即可得$a$的取值范围.

【详解】