

2.2 函数的简单性质基础解答题

一. 解答题 (共 30 小题)

1. (2016 年 崇明县二模) 已知函数 $f(x) = 3^x + \lambda \cdot 3^{-x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

(1) 当 $\lambda = -4$ 时, 求解方程 $f(x) = 3$;

(2) 根据 λ 的不同取值, 讨论函数的奇偶性, 并说明理由.

2. (2016 年 春 淄博校级期中) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$.

(1) 求 $f(0)$, $f(1)$;

(2) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

3. (2016 年 春 西宁校级月考) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, 2]$ 上的最值.

4. (2016 年 春 怀仁县校级月考) 试用定义讨论并证明函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ ($a \neq \frac{1}{2}$) 在 $(-\infty, -2)$ 上的单调性.

5. (2015 年 武汉校级模拟) 函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ (a 为常数) 的图象过点 $(2, 0)$,

(I) 求 a 的值并判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(II) 函数 $g(x) = \lg[f(x) + 2^x - m]$ 在区间 $[2, 3]$ 上有意义, 求实数 m 的取值范围;

(III) 讨论关于 x 的方程 $f(x) = t + 4x - x^2$ (t 为常数) 的正根的个数.

6. (2015 年 奉贤区一模) 判断函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

7. (2015 年 秋 德宏州校级月考) 讨论函数 $f(x) = \frac{ax}{x^2 - 1}$ ($a > 0$) 在 $x \in (-1, 1)$ 上的单调性.

性.

8. (2015 年 秋 呼伦贝尔校级期末) 已知函数 $f(x) = \frac{1+ax^2}{x+b}$ 的图象经过点 $(1, 3)$, 并且 $g(x) = xf(x)$ 是偶函数.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 用定义证明: 函数 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是增函数.

9. (2015 年 秋 漳州期末) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{m} + \frac{m}{e^x}$ (其中 $m > 0$, e 为自然对数的底数) 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数.

(1) 求 m 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并用单调性定义证明你的结论.

10. (2015 年 秋 成都期末) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{3}{x}$

(I) 求 $f(0)$, $f(-2)$ 的值

(II) 用函数单调性的定义证明函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

11. (2015 秋·拉萨校级期末) 已知函数 $f(x) = \lg(3+x) + \lg(3-x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

12. (2015 秋·阜阳校级期末) 已知函数 $f(x) = \lg(2016+x)$, $g(x) = \lg(2016-x)$

(1) 判断函数 $f(x) - g(x)$ 的奇偶性, 并予以证明.

(2) 求使 $f(x) - g(x) < 0$ 成立 x 的集合.

13. (2015 秋·丰台区期中) 已知 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

(1) 证明 $f(x)$ 是奇函数;

(2) 证明 $f(x)$ 是增函数.

14. (2015 秋·北京校级期中) 已知函数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

(I) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明

(II) 证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为单调增函数.

15. (2015 秋·北京校级期中) 已知 $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$

(I) 求 $f(-1)$, $f(1)$ 的值;

(II) 求 $f(a) + f(-a)$ 的值;

(III) 判别并证明函数 $f(x)$ 的单调性.

16. (2015 秋·北京校级期中) 已知定义域为 \mathbb{R} 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + 2}$ 是奇函数.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性 (不必证明);

(3) 解不等式 $f(|x|+1) + f(x) < 0$.

17. (2015 秋·安阳校级期中) 定义在 D 上的函数 $f(x)$, 如果满足: 对任意的 $x \in D$, 都存在常数 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 其中 M 称为 $f(x)$ 的一个上界. 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-ax}{x-1}$

(1) 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 求实数 a 的值;

(2) 在 (1) 的条件下, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{5}{3}, 3]$ 上的所有上界构成的集合.

18. (2015 秋·北京校级期中) 已知函数 $f(x) = x + \frac{k}{x}$ 且 $f(1) = 2$.

(1) 求实数 k 的值及函数的定义域;

(2) 判断函数在 $(1, +\infty)$ 上的单调性, 并用定义加以证明.

19. (2014·赫山区校级三模) 设 p : 函数 $f(x) = \sqrt{a^x - 1}$ 的定义域为 $(-\infty, 0, q$: 关于 x 的不等式 $ax^2 - x + a > 0$ 的解集为 \mathbb{R} . 若 $p \vee q$ 是真命题, $p \wedge q$ 是假命题, 求 a 的取值范围.

20. (2014 秋·珠海期末) 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$.

- (1) 求证: 不论 a 为何实数 $f(x)$ 总是为增函数;
- (2) 确定 a 的值, 使 $f(x)$ 为奇函数.

21. (2014 秋·乳源县校级期末) 用单调性定义证明函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数.

22. (2013 秋·河南期末) 设 $f(x) = x^2 + ax$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数.

- (I) 求实数 a 的值;
- (II) 用定义证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

23. (2014 秋·佛山期末) 已知函数 $f(x) = 2 - \frac{2}{x}$.

- (1) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上的单调性并用定义证明;
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上的最值.

24. (2014 春·萍乡期末) 已知函数 $f(x) = \frac{x+1-a}{a-x}$ ($x \neq a$).

- (1) 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上是增加的;
- (2) 当 $x \in [a + \frac{1}{2}, a + 1]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的取值范围.

25. (2014 秋·广州期末) 已知函数 $f(x) = a^x + \frac{1}{3^x}$, 且 $f(1) = \frac{10}{3}$.

- (1) 求 a 的值;
- (2) 判定 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;
- (3) 令函数 $g(x) = f(x) - 5$, 且 $g(a) = 8$, 求 $g(-a)$ 的值.

26. (2014 秋·安庆校级期末) 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数, 若 $f(x)$ 的最小正周期是 π , 且当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

- (1) 求 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时, $f(x)$ 的解析式;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单增区间.

27. (2014 秋·郑州期末) 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$.

- (I) 若 $g(x) = f(x) - a$ 为奇函数, 求 a 的值;
- (II) 试判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的单调性, 并用定义证明.

28. (2013 秋·中山期末) (I) 求值: $\frac{\log_2 3 + \log_2 \sqrt{3}}{\log_2 9 - \log_2 \sqrt{3}} - 2013^0$;

(II) 设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且 $f(x) = f(x - 2)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x + 1$, 求 $f(\frac{3}{2})$ 的值.

29. (2014 秋·海淀区校级期中) 已知函数 $f(x)$ 是正比例函数, 函数 $g(x)$ 是反比例函数, 且 $f(1) = 1$, $g(1) = 2$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$;
- (2) 判断函数 $f(x) + g(x)$ 的奇偶性.

30. (2014 秋·沂水县校级期中) 对于函数 $f(x) = a - \frac{2}{e^x + 1}$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 确定 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求实数 a , 使 $f(x)$ 是奇函数, 在此基础上, 求 $f(x)$ 的值域.

2.2 函数的简单性质基础解答题

参考答案与试题解析

一. 解答题 (共 30 小题)

1. (2016 崇明县二模) 已知函数 $f(x) = 3^x + \lambda \cdot 3^{-x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

(1) 当 $\lambda = -4$ 时, 求解方程 $f(x) = 3$;

(2) 根据 λ 的不同取值, 讨论函数的奇偶性, 并说明理由.

【分析】 (1) 当 $\lambda = -4$ 时, 令 $t = 3^x > 0$, 则原方程可化为 $t^2 - 3t - 4 = 0$, 求得 t 的值, 可得 x 的值.

(2) 函数的定义域为 \mathbb{R} , 分当 $\lambda = 1$ 、当 $\lambda = -1$ 、当 $\lambda \neq 1$ 三种情况, 分别根据奇偶函数的定义进行判断, 可得结论.

【解答】 解: (1) 当 $\lambda = -4$ 时, 由 $f(x) = 3$, 得 $3^x - 4 \cdot 3^{-x} = 3$.

令 $t = 3^x > 0$, 则原方程可化为 $t^2 - 3t - 4 = 0$, 解得 $t = 4$, 或 $t = -1$ (舍去), 所以, $x = \log_3 4$.

(2) 函数的定义域为 \mathbb{R} , 当 $\lambda = 1$ 时, $f(x) = 3^x + 3^{-x}$, $f(-x) = f(x)$, 函数为偶函数;

当 $\lambda = -1$ 时, $f(x) = 3^x - 3^{-x}$, $f(-x) = -f(x)$, 函数为奇函数;

当 $\lambda \neq 1$ 时, $f(1) = 3 + \frac{\lambda}{3}$, $f(-1) = \frac{1}{3} + 3\lambda$,

此时 $f(-1) \neq -f(1)$ 且 $f(-1) \neq f(1)$, 所以函数为非奇非偶函数.

【点评】 本题主要考查指数方程的解法, 函数的奇偶性的判断, 体现了分类讨论的数学思想, 属于基础题.

2. (2016 春 淄博校级期中) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $x \leq 0$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$.

(1) 求 $f(0)$, $f(1)$;

(2) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

【分析】 (1) 利用函数的奇偶性的性质, 求解函数值即可.

(2) 利用函数的奇偶性以及已知条件真假求解函数的解析式即可.

【解答】 解: (1) $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $x \leq 0$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$.

$f(0) = 0$,

$f(1) = f(-1) = \log_{\frac{1}{2}}(1+1) = -1$.

(2) $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $x \leq 0$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$.

$x > 0$ 时, $f(x) = f(-x) = \log_{\frac{1}{2}}(1+x)$.

可得: $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(1+x), & x > 0 \end{cases}$.

【点评】 本题考查函数的性质，函数值以及函数的解析式的求法，考查计算能力.

3. (2016 春 西宁校级月考) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, 2]$ 上的最值.

【分析】 (1) 求出导数，令导数大于 0，得增区间. 令导数小于 0，得减区间;
(2) 求出函数的导数，求得极值和端点的函数值，比较即可得到最值.

【解答】 解: (1) 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的导数为 $f'(x) = 3x^2 - 3$,
令 $f'(x) > 0$, 可得 $x > 1$ 或 $x < -1$, 令 $f'(x) < 0$, 可得 $-1 < x < 1$,
即有 $f(x)$ 的增区间为 $(1, +\infty)$, $(-\infty, -1)$, 减区间为 $(-1, 1)$;

(2) 由 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, 可得 $x = \pm 1$,
由 (1) 可得 $f(-1)$ 为极大值, 且为 2, $f(1)$ 为极小值, 且为 -2,
又 $f(-3) = -27 + 9 = -18$, $f(2) = 8 - 6 = 2$,
即有 $f(x)$ 的最小值为 -18, 最大值为 2.

【点评】 本题考查导数的运用: 求单调区间和极值、最值, 同时考查解二次不等式的运算能力, 属于基础题.

4. (2016 春 怀仁县校级月考) 试用定义讨论并证明函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ ($a > \frac{1}{2}$) 在 $(-\infty, -2)$ 上的单调性.

【分析】 先将 $f(x)$ 变成: $f(x) = a + \frac{1-2a}{x+2}$, 根据单调性的定义, 设 $x_1, x_2 \in (-\infty, -2)$,
且 $x_1 < x_2$, 通过作差并讨论 a 的取值即可判断 $f(x_1), f(x_2)$ 的大小, 从而判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上的单调性.

【解答】 解: $f(x) = \frac{a(x+2) + 1 - 2a}{x+2} = a + \frac{1-2a}{x+2}$;

设 $x_1, x_2 \in (-\infty, -2)$, 且 $x_1 < x_2$;

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1-2a}{x_1+2} - \frac{1-2a}{x_2+2} = \frac{(1-2a)(x_2-x_1)}{(x_1+2)(x_2+2)};$$

$\because x_1, x_2 \in (-\infty, -2)$, 且 $x_1 < x_2$;

$\therefore (x_1+2)(x_2+2) > 0, x_2 - x_1 > 0$;

\therefore 若 $1-2a < 0$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增;

若 $1-2a > 0$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x_1) > f(x_2)$, \therefore 此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减.

【点评】 考查分离常数法化简 $f(x)$, 以及函数的单调性定义, 根据函数单调性定义讨论 $f(x)$ 单调性的过程.

5. (2015 武汉校级模拟) 函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ (a 为常数) 的图象过点 $(2, 0)$,

- (I) 求 a 的值并判断 $f(x)$ 的奇偶性;
(II) 函数 $g(x) = \lg[f(x) + 2^x - m]$ 在区间 $[2, 3]$ 上有意义, 求实数 m 的取值范围;
(III) 讨论关于 x 的方程 $|f(x)| = t + 4x - x^2$ (t 为常数) 的正根的个数.

【分析】(I) 先依题意有 $0=2+\frac{a}{2} \Rightarrow a=-4$, 从而得出函数的解析式: $f(x)=x-\frac{4}{x}$, 再根据函数奇偶性的定义: 由 $f(-x)=-f(x)$ 判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(II) 函数 $g(x)=\lg[f(x)+2^x-m]$ 在区间 $[2, 3]$ 上有意义, 等价于 $x-\frac{4}{x}+2^x-m>0$ 对 $x \in [2, 3]$ 恒成立, 得 $(x-\frac{4}{x}+2^x)_{\min}>m$, 下面研究 $h(x)=x-\frac{4}{x}+2^x$, $x \in [2, 3]$ 的单调性即可得出实数 m 的取值范围;

(III) 设 $y_1=|f(x)|$, $y_2=t+4x-x^2$ 结合图象得出结论: \square 当 $t<-4$ 时, 正根的个数为 0;
 \square 当 $t=-4$ 时, 正根的个数为 1; \square 当 $t>-4$ 时, 正根的个数为 2.

【解答】解: (I) 依题意有 $0=2+\frac{a}{2} \Rightarrow a=-4$,

此时 $f(x)=x-\frac{4}{x}$, 其定义域为 $x|x \neq 0$, 由 $f(-x)=-f(x)$ 即 $f(x)=x-\frac{4}{x}$ 为奇函数;

(II) 函数 $g(x)=\lg[f(x)+2^x-m]$ 在区间 $[2, 3]$ 上有意义, 即 $x-\frac{4}{x}+2^x-m>0$ 对 $x \in [2, 3]$ 恒成立, 得 $(x-\frac{4}{x}+2^x)_{\min}>m$

令 $h(x)=x-\frac{4}{x}+2^x$, $x \in [2, 3]$ 先证其单调递增:

任取 $2 \leq x_1 < x_2 \leq 3$,

则

$$h(x_2) - h(x_1) = x_2 - \frac{4}{x_2} + 2^{x_2} - (x_1 - \frac{4}{x_1} + 2^{x_1}) = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 + 4)}{x_1 x_2} + (2^{x_2} - 2^{x_1})$$

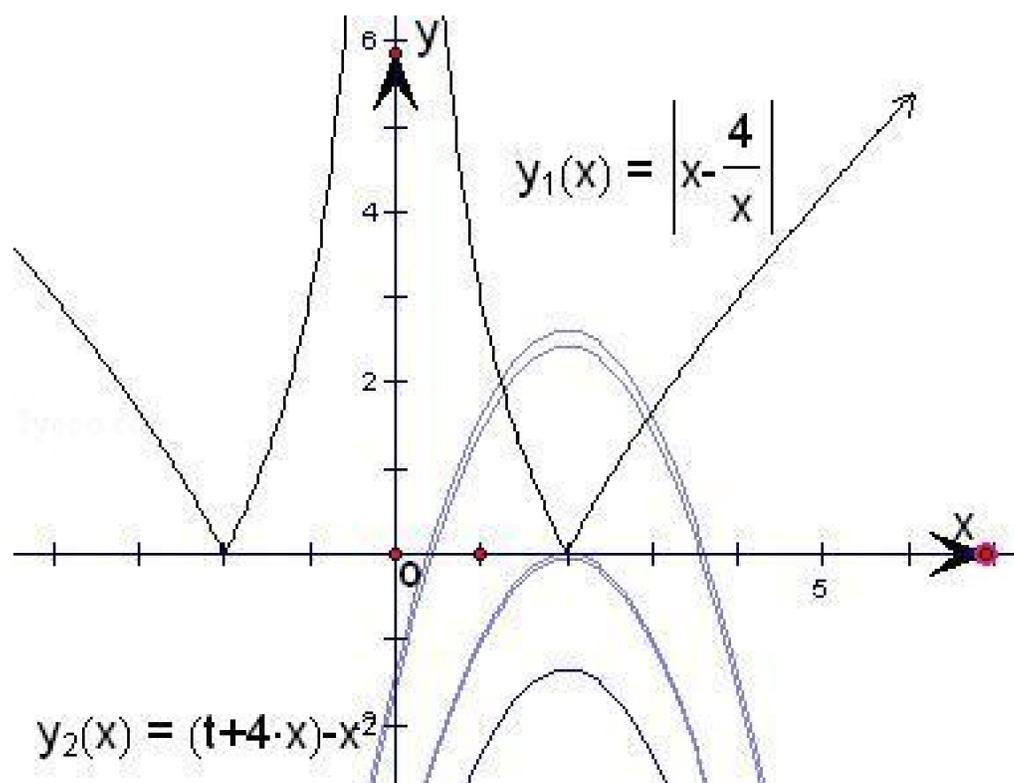
因为 $2 \leq x_1 < x_2 \leq 3$, 则 $h(x_2) - h(x_1) > 0$,

故 $h(x)$ 在 $x \in [2, 3]$ 递增,

则 $h(x)=x-\frac{4}{x}+2^x$ 的最小值 $h(2)=4$, $\therefore m < 4$;

(III) 设 $y_1=|f(x)|$, $y_2=t+4x-x^2$ 结合图象得:

- \square 当 $t < -4$ 时, 正根的个数为 0;
- \square 当 $t = -4$ 时, 正根的个数为 1;
- \square 当 $t > -4$ 时, 正根的个数为 2.



【点评】本小题主要考查函数单调性的应用、函数奇偶性的应用、不等式的解法等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想。属于基础题。

6. (2015 奉贤区一模) 判断函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性。

【分析】根据函数奇偶性的定义即可得到结论。

【解答】解：∵ $\frac{1-x}{1+x} > 0$, (1分)

∴ 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1, 1)$, (2分)

定义域关于原点对称, (3分),

$$f(-x) = \lg \frac{1-(-x)}{1+(-x)} \quad (4分) = \lg \frac{1+x}{1-x} = \lg \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\lg \frac{1-x}{1+x} = -f(x),$$

(5分)

$$\text{而 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \lg \frac{1}{3}, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lg 3,$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) \neq f\left(-\frac{1}{2}\right), \quad (6分)$$

∴ $f(x)$ 是奇函数不是偶函数。

(7分)

【点评】本题主要考查函数奇偶性的判断，根据对数函数的性质是解决本题的关键。

7. (2015 秋 德宏州校级月考) 讨论函数 $f(x) = \frac{ax}{x^2-1}$ ($a > 0$) 在 $x \in (-1, 1)$ 上的单调

性。

【分析】根据函数单调性的定义讨论函数的单调性，是必须掌握的基本方法。

【解答】解：设 $-1 < x_1 < x_2 < 1$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{ax_1}{x_1^2-1} - \frac{ax_2}{x_2^2-1}$$

$$= \frac{ax_1x_2^2 - ax_1 - ax_2x_1^2 + ax_2}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_1x_2 + 1)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}$$

$$\because -1 < x_1 < x_2 < 1,$$

$$\therefore x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 + 1 > 0, (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) > 0. \text{ 又 } a > 0,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为减函数.

【点评】 证明函数单调性的步骤：1、取值；2、作差变形；变形的常用方法：因式分解、配方、有理化等；3、定号；4、下结论：由定义得出函数的单调性.

8. (2015 秋 呼伦贝尔校级期末) 已知函数 $f(x) = \frac{1+ax^2}{x+b}$ 的图象经过点 $(1, 3)$, 并且 $g(x) = xf(x)$ 是偶函数.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 用定义证明：函数 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是增函数.

【分析】 (1) 根据 $g(-x) = g(x)$ 恒成立得出 b 的值, 将 $(1, 3)$ 代入 $f(x)$ 解出 a ;

(2) 设 $x_2 > x_1 > 1$, 化简 $g(x_2) - g(x_1)$ 并判断符号得出 $g(x_2)$ 与 $g(x_1)$ 的大小关系.

【解答】 解: (1) \because 函数 $g(x) = xf(x) = \frac{x+ax^3}{x+b}$ 是偶函数, 则 $g(-x) = g(x)$.

$$\therefore \frac{-x - ax^3}{-x+b} = \frac{x+ax^3}{x+b} \text{ 恒成立, 即 } x - b = x + b \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore b = 0.$$

又函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(1, 3)$,

$$\therefore f(1) = 3, \text{ 即 } 1+a=3,$$

$$\therefore a=2.$$

(2) 由 (1) 知: $g(x) = xf(x) = 2x^2 + 1$.

设 $x_2 > x_1 > 1$,

$$\text{则 } g(x_2) - g(x_1) = 2x_2^2 + 1 - 2x_1^2 - 1 = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

$$\because x_2 > x_1 > 1, \therefore (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$$

$$\therefore g(x_2) > g(x_1),$$

\therefore 函数 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是增函数.

【点评】 本题考查了函数奇偶性与单调性的判断与证明, 使用定义判断非常重要的解题方法. 属于基础题.

9. (2015 秋 漳州期末) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{m} + \frac{m}{e^x}$ (其中 $m > 0$, e 为自然对数的底数) 是定

义在 \mathbf{R} 上的偶函数.

(1) 求 m 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并用单调性定义证明你的结论.

【分析】(1) 根据 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的偶函数, 从而有 $f(-1) = f(1)$, 这样即可得出 $m - \frac{1}{m} = 0$,

由 $m > 0$ 从而得出 $m = 1$;

(2) 写出 $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$, 根据单调性的定义, 设任意的 $x_1 > x_2 > 0$, 然后作差, 通分,

提取公因式, 从而得到 $f(x_1) - f(x_2) = (e^{x_1} - e^{x_2}) \left(1 - \frac{1}{e^{x_1+x_2}}\right)$, 根据 x_1

$> x_2 > 0$ 及指数函数的单调性便可判断 $f(x_1)$, $f(x_2)$ 的关系, 从而得出 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

【解答】解: (1) $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的偶函数;

$\therefore f(-1) = f(1)$;

即 $\frac{1}{me} + me = \frac{e}{m} + \frac{e}{e}$;

$\therefore \left(m - \frac{1}{m}\right) \left(e - \frac{1}{e}\right) = 0$;

$\therefore m - \frac{1}{m} = 0$;

$\because m > 0$, \therefore 解得 $m = 1$;

(2) $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$, 设 $x_1 > x_2 > 0$, 则:

$f(x_1) - f(x_2) = e^{x_1} + \frac{1}{e^{x_1}} - e^{x_2} - \frac{1}{e^{x_2}} = (e^{x_1} - e^{x_2}) \left(1 - \frac{1}{e^{x_1+x_2}}\right)$;

$\because x_1 > x_2 > 0$;

$\therefore e^{x_1} > e^{x_2}$, $x_1 + x_2 > 0$, $e^{x_1+x_2} > 1$;

$\therefore e^{x_1} - e^{x_2} > 0$, $1 - \frac{1}{e^{x_1+x_2}} > 0$;

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$;

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

【点评】考查偶函数的定义, 函数单调性的定义, 根据单调性定义判断一个函数单调性的方法和过程, 作差的方法比较 $f(x_1)$, $f(x_2)$, 作差后是分式的一般要通分, 一般要提取公因式, 以及指数函数的单调性.

10. (2015 秋 \square 成都期末) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{3}{x}$

- 1

(I) 求 $f(0)$, $f(-2)$ 的值

(II) 用函数单调性的定义证明函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

【分析】(I) 根据 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数便可得到 $f(0) = 0$, 而由 $x > 0$ 时的解析式便可求出 $f(2) = \frac{1}{2}$, 从而便得出 $f(-2)$ 的值;

(II) 根据减函数的定义, 设任意的 $x_1 > x_2 > 0$, 然后作差, 通分, 从而得到

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}, \text{ 证明 } f(x_1) < f(x_2) \text{ 便可得到 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty)$$

上为减函数.

【解答】解: (I) $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数;

$$\therefore f(0) = 0;$$

$$x > 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{3}{x} - 1, \therefore f(2) = \frac{1}{2};$$

$$\therefore f(-2) = -f(2) = -\frac{1}{2};$$

(II) 证明: 设 $x_1 > x_2 > 0$, 则:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{x_1} - \frac{3}{x_2} = \frac{3(x_2 - x_1)}{x_1 x_2};$$

$$\because x_1 > x_2 > 0;$$

$$\therefore x_2 - x_1 < 0, x_1 x_2 > 0;$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2);$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

【点评】考查奇函数的定义, 奇函数在原点有定义时, 原点处的函数值为 0, 减函数的定义, 以及根据减函数的定义证明一个函数为减函数的方法和过程, 作差的方法比较 $f(x_1), f(x_2)$, 作差后是分式的一般要通分.

11. (2015 秋 拉萨校级期末) 已知函数 $f(x) = \lg(3+x) + \lg(3-x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

【分析】(1) 欲使 $f(x)$ 有意义, 须有 $\begin{cases} 3+x > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$, 解出即可;

(2) 利用函数奇偶性的定义即可作出判断;

【解答】解: (1) 依题意有 $\begin{cases} 3+x > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$, 解得 $-3 < x < 3$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x \mid -3 < x < 3\}$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 定义域关于原点对称,

$$\because f(x) = \lg(3+x) + \lg(3-x) = \lg(9-x^2),$$

$$\therefore f(-x) = \lg(9 - (-x)^2) = \lg(9-x^2) = f(x),$$

\therefore 函数 $f(x)$ 为偶函数.

【点评】本题考查函数定义域的求解及函数奇偶性的判断, 属基础题, 定义是解决函数奇偶性的基本方法.

12. (2015 秋 阜阳校级期末) 已知函数 $f(x) = \lg(2016+x)$, $g(x) = \lg(2016-x)$

(1) 判断函数 $f(x) - g(x)$ 的奇偶性, 并予以证明.

(2) 求使 $f(x) - g(x) < 0$ 成立 x 的集合.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/555203012330011113>