备考2023年中考数学一轮复习-数与式_代数式_定义新运算-综合题专训及答案

定义新运算综合题专训

1、

(2016大兴.中考模拟) 设在一个变化过程中有两个变量x与y,如果对于x的每一个值,y都有唯一确定的值和它对应,那么就说y是x的函数,记作y=f(x).在函数y=f（x）中，当自变量x=a时，相应的函数值y可以表示为f（a）.

例如：函数f（x）=x^2-2x-3，当x=4时，f（4）=$4^2-2\times4-3=5$ 在平面直角坐标系 xOy 中，对于函数的零点给出如下定义：

如果函数 y=f（x）在 a≤x≤b 的范围内对应的图象是一条连续不断的曲线，并且f（a）.f（b）＜0，那么函数y=f（x）在a≤x≤b 的范围内有零点，即存在c（a≤c≤b），使f（c）=0，则c叫做这个函数的零点，c也是方程f（x）=0 在a≤x≤b范围内的根.

例如：二次函数f（x）=x^2-2x-3的图象如图1所示.

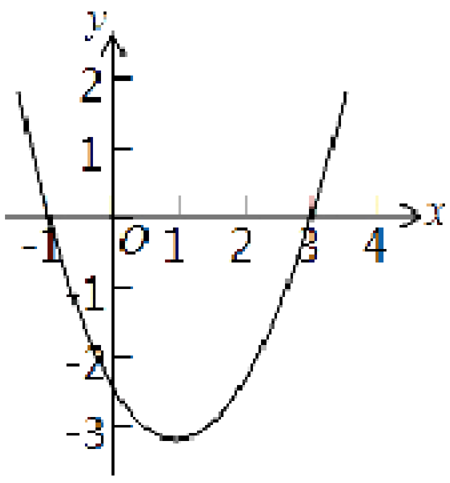


图1

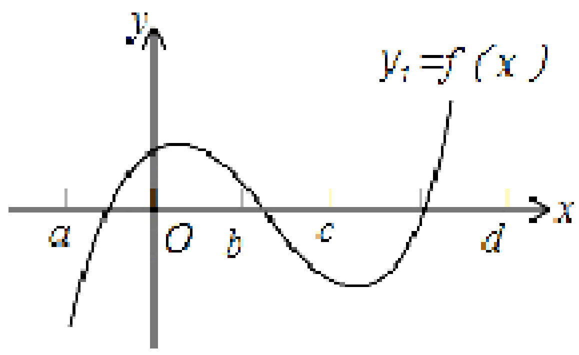


图2

观察可知：f（－2）＞0，f（1）＜0，则f（－2）.f（1）＜0.所以函数f（x）=x^2-2x-3在－2≤x≤1 范围内有零点.由于 f（－1）=0，所以，－1是f（x）=x^2-2x-3的零点，－1也是方程$x^2-2x-3=0$的根.

（1）

观察函数y_1=f（x）的图象2，回答下列问题：

①f（a）•f（b）　0（“＜”“＞”或“=”）

②在a≤x≤b 范围内y_1=f（x）的零点的个数是.

（2）

已知函数 $y_2=f(x)=-\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}(a-1)x-\sqrt{3}(a^2-2a)$的零点为 x_1，x_2，且 $x_1<1<x_2$.

①求零点为 x_1，x_2（用 a 表示）；

②在平面直角坐标 xOy 中，在 x 轴上 A，B 两点表示的数是零点 x_1，x_2，点 P 为线段 AB 上的一个动点（P 点与 A、B 两点不重合），在 x 轴上方作等边△APM 和等边△BPN，记线段 MN 的中点为 Q，若 a 是整数，求抛物线 y_2 的表达式并直接写出线段 PQ 长的取值范围.

2、

(2019 河北. 中考模拟）阅读材料：对于任何实数，我们规定符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的意义是 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=ad-bc.

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$=1x4-2×3= $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$=（-2）×5-4×3=-22

（1） 按照这个规定请你计算 $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$的值；

（2） 按照这个规定请你计算：当 $x^2-4x+4=0$ 时，[redacted] $\left.\begin{matrix} 6 \\ 8 \end{matrix}\right|$的值

3、

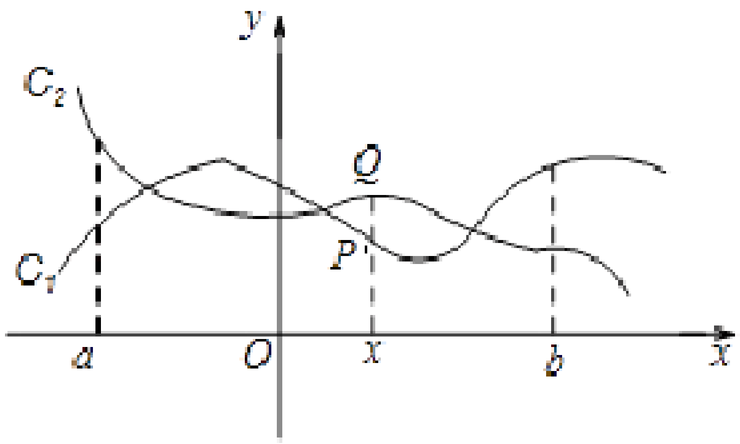
(2018 秦皇岛. 中考模拟）定义新运算：对于任意实数 a，b，都有 a⊕b=a（a－b）+1，等式右边是通常的加法，减法及乘法运算．比如：2⊕5=2×（2－5）+1=2×（－3）+1=－6+1=－5

（1） 求 3⊕（－2）的值；

（2） 若 3⊕x 的值小于 16，求 x 的取值范围，并在数轴上表示出来.

4、

(2017 邗江. 中考模拟）如图，点 P（x，y_1）与 Q（x，y_2）分别是两个函数图象 C_1 与 C_2 上的任一点．当 a≤x≤b 时，有－1≤y_1－y_2≤1 成立，则称这两个函数在 a≤x≤b 上是“相邻函数”，否则称它们在 a≤x≤b 上是“非相邻函数”．例如，点 P（x，y_1）与 Q （x，y_2）分别是两个函数 y=3x+1 与 y=2x－1 图象上的任一点，当－3≤x≤－1 时，y_1－y_2=（3x+1）－（2x－1）=x+2，通过构造函数 y=x+2 并研究它在－3≤x≤－1 上的性质，得到该函数值的范围是－1≤y≤1，所以－1≤y_1－y_2≤1 成立，因此这两个函数在－3≤x≤－1 上是“相邻函数”.



（1） 判断函数 $y=3x+2$ 与 $y=2x+1$ 在 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 上是否为“相邻函数”，并说明理由；

（2） 若函数 $y=x^2-x$ 与 $y=x-a$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上是“相邻函数”，求 a 的取值范围；

（3） 若函数 $y=\frac{a}{x}$ 与 $y=-2x+4$ 在 $1\leqslant x\leqslant 2$ 上是“相邻函数”，直接写出 a 的最大值与最小值.

5、

(2019 鄞州.中考模拟) 定义：如果一个四边形存在一条对角线，使得这条对角线是四边形某两边的比例中项，则称这个四边形为“闪亮四边形”，这条对角线称为“亮线”.如图 1，四边形 $ABCD$中，$AB=AC=AD$，满足 $AC^2=AB\cdot AD$，四边形 $ABCD$是闪亮四边形，AC是亮线.

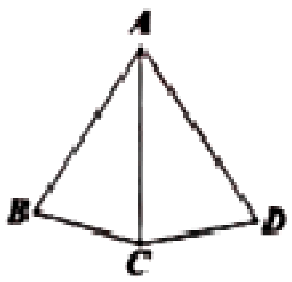


图1

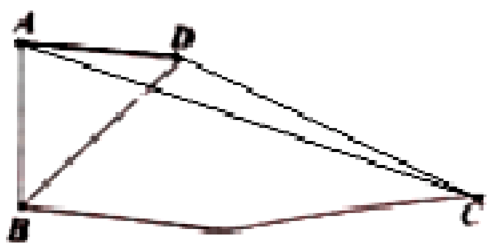


图2

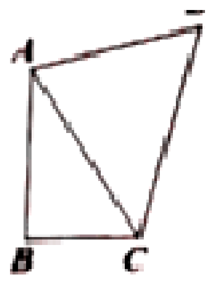


图3

（1） 以下说法正确的是(填写序号).

①正方形不可能是闪亮四边形；

②矩形中存在闪亮四边形；

③若一个菱形是闪亮四边形，则必有一个内角是 60°；

（2） 如图 2，四边形 $ABCD$中，$AD//BC$，$\angle ABC=90°$，$AD=9$，$AB=12$，$CD=20$，判断哪一条线段是四边形 $ABCD$的亮线？请你作出判断并说明理由

（3）如图 3，AC是闪亮四边形 $ABCD$的唯一亮线 $\angle ABC=90°$，$\angle D=60°$，$AB=4$，$BC=2$，

请直接写出线段 AD的长.

6、

(2018 余姚.中考模拟) 请你阅读如图框内老师的新定义运算规定，然后解答下列各小题.

（1） 若 $x\oplus y=1$，$x\oplus 2y=-2$，分别求出 x 和 y 的值；

（2） 若 x 满足 $x\oplus 2\leqslant 0$，且 $3x\oplus(-8)>0$，求 x 的取值范围.

7、

(2018 桐乡.中考模拟) 对于实数 m、n，我们定义一种运算“※”为：m※n=mn+m+n.

（1） 化简：(a+b)※(a 一 b)；

（2） 解关于 x 的方程：x※(1※x)=-1.

8、

(2017 台州.中考模拟) 阅读：对于函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），当 $t_1\leqslant x\leqslant t_2$ 时，求 y 的最值时，主要取决于对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 是否在 $t_1\leqslant x\leqslant t_2$ 的范围和 a 的正负：①当对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 在 $t_1\leqslant x\leqslant t_2$ 之内且 $a>0$ 时，则 $x=-\frac{b}{2a}$ 时 y 有最小值，$x=t_1$ 或 $x=t_2$ 时 y 有最大值；②当对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 在 $t_1\leqslant x\leqslant t_2$ 之内且 $a<0$ 时，则 $x=-\frac{b}{2a}$ 时 y 有最大值，$x=t_1$ 或 $x=t_2$ 时 y 有最小值；③当对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 不在 $t_1\leqslant x\leqslant t_2$ 之内，则函数在 $x=t_1$ 或 $x=t_2$ 时 y 有最值.

解决问题：

设二次函数 $y_1=a(x-2)^2+c$（$a\neq 0$）的图象与 y 轴的交点为（0，1），且 2a+c=0.

（1）

求 a、c 的值；

（2）

当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，直接写出函数的最大值和最小值；

（3）

对于任意实数 k，规定：当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，关于 x 的函数 $y_2=y_1-kx$ 的最小值称为 k 的“特别值”，记作 g（k），求 g（k）的解析式；

（4）

在（3）的条件下，当“特别值”$g(k)=1$ 时，求 k 的值.

9、

(2017 仙游.中考模拟) 定义：若某抛物线上有两点 A、B 关于原点对称，则称该抛物线为“完美抛物线”．已知二次函数 $y=ax^2-2mx+c$（a，m，c 均为常数且 $ac\neq0$）是“完美抛物线”：

（1）

试判断 ac 的符号；

（2）

若 $c=-1$，该二次函数图象与 y 轴交于点 C，且 $S_{\triangle ABC}=1$.

①求 a 的值；

②当该二次函数图象与端点为 M（－1，1）、N（3，4）的线段有且只有一个交点时，求 m 的取值范围.

10、

(2018 青岛.中考模拟) 对 x，y 定义一种新运算 T，规定：$T(x,y)=\frac{ax+by}{2x+y}$（其中 a、b 均为非零常数），这里等式右边是通常的四则运算，例如：$T(0,1)=\frac{a\times0+b\times1}{2\times0+1}=b$.

（1） 已知 $T(1,-1)=-2$，$T(4,2)=1$.

①求 a，b 的值；

②若关于 m 的不等式组 $\begin{cases}T(2m,5-4m)\leq4\\T(m,3-2m)>p\end{cases}$ 恰好有 3 个整数解，求实数 p 的取值范围；

（2） 若 $T(x,y)=T(y,x)$ 对任意实数 x，y 都成立（这里 $T(x,y)$ 和 $T(y,x)$ 均有意义），则 a，b 应满足怎样的关系式?

11、

(2018 重庆.中考真卷) 对任意一个四位数 n，如果千位与十位上的数字之和为 9，百位与个位上的数字之和也为 9，则称 n 为“极数”.

（1） 请任意写出三个“极数”；并猜想任意一个“极数”是否是 99 的倍数，请说明理由;

（2） 如果一个正整数 a 是另一个正整数 b 的平方，则称正整数 a 是完全平方数．若四位数 m 为“极数”，记 $D(m)=\frac{m}{33}$，求满足 D（m）是完全平方数的所有 m.

12、

(2020 邯郸.中考模拟）定义新运算：对于任意实数 m、n 都有 $m☆n=m^2n+n$，等式右边是常用的加法、减法、乘法及乘方运算 .

例如：$-3☆2=(-3)^2\times2+2=20$.

根据以上知识解决问题：

（1） $x☆4=20$,求 x；
（2） 若 $2☆a$ 的值小于 0，请判断方程：$2x^2-bx+a=0$ 的根的情况.
13、
(2020 平阳.中考模拟）
（1） 计算：$(3-\pi)^0-\sqrt{9}+|3-\sqrt{3}|+(\tan30°)^{-1}$
（2） 定义新运算：对于任意实数 a，b，都有 $a\oplus b=a(a-b)+1$，等式右边是通常的加法、减法及乘法运算.比如：$2\oplus5=2\times(2-5)+1$

$=2\times(-3)+1$

$=-6+1$

$=-5$

若 $3\oplus x$ 的值小于 13，求 x 的取值范围，并在如图所示的数轴上表示出来.

14、
(2020 北京.中考模拟）阅读下面的材料：

如果函数 y＝f（x）满足：对于自变量 x 的取值范围内的任意 x_1，x_2，

①若 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 f（x）是增函数；

②若 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 f（x）是减函数.

例题：证明函数 $f(x)=\frac{6}{x}$（x＞0）是减函数.

证明：设 $0<x_1<x_2$，

$f(x1)-f(x2)=\frac{6}{x_1}-\frac{6}{x_2}=\frac{6x_2-6x_1}{x_1x_2}=\frac{6(x_2-x_1)}{x_1x_2}$.

∵$0<x_1<x_2$，

∴$x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$.

∴ $\frac{6(x_2-x_1)}{x_1x_2}>0$. 即 f（$x_1$）－f（$x_2$）＞0.

∴f（x1）＞f（x_2）.

∴函数 f（x）= $\frac{6}{x}$（x＞0）是减函数.

根据以上材料，解答下面的问题：

已知函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}+2x(x<0)$.

f（－1）＝ $\frac{1}{(-1)^2}$＋（－2）＝-1，f（－2）＝ $\frac{1}{(-1)^2}$＋（－4）＝ $-\frac{15}{4}$.

（1） 计算：f（－3）＝，f（－4）＝；

（2） 猜想：函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}+2x(x<0)$是函数（填“增”或“减”）；

（3） 请仿照例题证明你的猜想.

15、

如果抛物线C_1的顶点在抛物线C_2上，抛物线C_2的顶点也在抛物线C_1上时，那么我们称抛物线C_1与C_2“互为关联”的抛物线．如图 1，已知抛物线C_1：y_1＝ $2x^2y-8y^1=$ x^2+x 与C_2：y_2＝ax^2+x+c 是“互为关联”的抛物线，点 A，B 分别是抛物线C_1， C_2的顶点，抛物线C_2经过点 D（6，－1）.

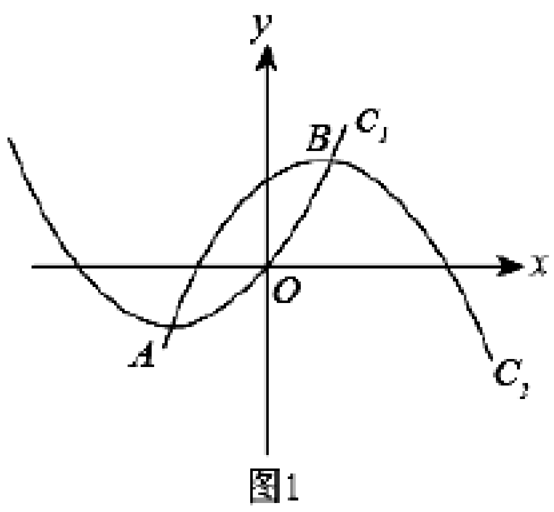


图1

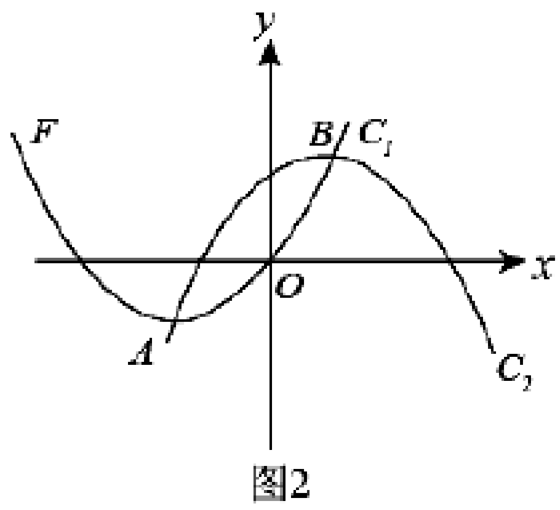


图2

（1） 直接写出 A，B 的坐标和抛物线C_2的解析式；

（2） 抛物线C_2上是否存在点 E，使得△ABE 是直角三角形？如果存在，请求出点 E 的坐标；如果不存在，请说明理由；

（3） 如图 2，点 F（－6，3）在抛物线C_1上，点 M，N 分别是抛物线C_1， C_2上的动点，且点 M，N 的横坐标相同，记△AFM 面积为S_1（当点 M 与点 A，F 重合时S_1＝0），△ABN 的面积为S_2（当点 N 与点 A，B 重合时，S_2＝0），令 S＝S_1+S_2，观察图象，当 y_1≤y_2时，写出 x 的取值范围，并求出在此范围内 S 的最大值.

定义新运算综合题答案

1. 答案：

【第1空】<

【第2空】1

解：①∵x_1、x_2是零点

∴当y=0时，即 - $\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}(a-1)x-\sqrt{3}(a^2-2a)$ =0．

方程可化简为 $x^2+2(a-1)x+(a^2-2a)=0$．

解方程，得x= - a或x= - a+2．

∵$x_1<1<x_2$， - a < - a+2，

∴$x_1=-a$，$x_2=-a+2$．

②∵$x_1<1<x_2$，

∴ - a<1< - a+2．

∴ - 1<a<1．

∵a是整数，

∴a=0，所求抛物线的表达式为y= - $\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$ ．

此时顶点C的坐标为C（1，$\sqrt{3}$ ）如图2，

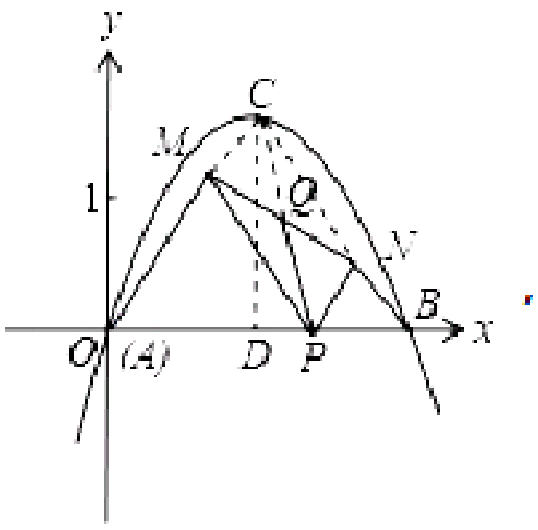


图 2

作CD⊥AB于D，连接CQ，

则AD=1，CD= $\sqrt{3}$ ，tan∠BAC= $\sqrt{3}$ ，

∴∠BAC=60°

由抛物线的对称性可知△ABC是等边三角形；

由△APM和△BPN是等边三角形，线段MN的中点为Q可得，

点M、N分别在AC和BC边上，四边形PMCN的平行四边形，

C、Q、P三点共线，且PQ= $\frac{1}{2}$ PC；

∵点P线段AB上运动的过程中，P与A、B两点不重合，

DC≤PC<AC，DC= $\sqrt{3}$ ，AC=2

2. 答案：

解：$m=2$ $\frac{1}{x-1}$ $\frac{1}{2}$

解：由 $\frac{1}{x-1}$ 得 $x_1=x_2=2$

$x-1=2$ $\begin{vmatrix} 2x & \\ 2x-3 & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-4\times1=-1$

3. 答案：

解：∵a⊕b=a（a - b）+1，

∴3⊕（ - 2）=3（3+2）+1=3×5+1=16

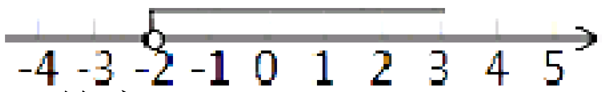
解：∵a⊕b=a（a - b）+1，

∴3⊕x=3（3+x）+1=10 - 3x．

∵3⊕x的值小于16，

∴10 - 3x＜16，解得x＞ - 2．

在数轴上表示为：



4. 答案：

解：是“相邻函数”，

理由如下：y_1 - y_2=（3x+2）－（2x+1）=x+1，构造函数y=x+1，

∵y=x+1在 - 2≤x≤0，是随着x的增大而增大，

∴当x=0时，函数有最大值1，当x= - 2时，函数有最小值 - 1，即 - 1≤y≤1，

∴ - 1≤y_1 - y_2≤1，

即函数y=3x+2与y=2x+1在 - 2≤x≤0上是“相邻函数”

解：y_1 - y_2=（x^2 - x）－（x - a）=x^2 - 2x+a，构造函数y=x^2 - 2x+a，

∵y=x^2 - 2x+a=（x - 1）^{2}+（a - 1），

∴顶点坐标为：（1，a - 1），

又∵抛物线y=x^2 - 2x+a的开口向上，

∴当x=1时，函数有最小值a - 1，当x=0或x=2时，函数有最大值a，即a - 1≤y≤a，

∵函数y=x^2 - x与y=x - a在0≤x≤2上是“相邻函数”，

∴ - 1≤y_1 - y_2≤1，即 $\begin{cases} a\le 1 \\ a-1\ge -1 \end{cases}$，

∴0≤a≤1