2022年湖南省衡阳市高考数学二模试卷

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合$A=\{x|\lg x<1\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$，则$A\cup B=$(　)

A. $\{x|0<x\leqslant 2\}$　　B. $\{x|x\leqslant 2\}$　　C. $\{x|x<10\}$　　D. *R*

2. 已知复数$z=2(1-i)i$，则$\bar{z}$的虚部为(　)

A. $-2i$　　B. -2　　C. 2　　D. 2*i*

3. 在冬奥会花样滑冰的比赛中，由9位评委分别给参赛选手评分，评定该选手的成绩时，从9个原始评分中去掉1个最高分、1个最低分，得到7个有效评分.7个有效评分与9个原始评分相比，一定不变的数字特征是(　)

A. 极差　　B. 平均数　　C. 方差　　D. 中位数

4. 设*m*、*n*是空间中两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，则下列说法正确的是(　)

A. 若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\perp n$，则$\alpha\perp\beta$

B. 若$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha//\beta$，则$m//n$

C. 若$m//\alpha$，$n//\beta$，$\alpha\perp\beta$，则$m\perp n$

D. 若$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$m//\beta$，$n//\alpha$，则$\alpha//\beta$

5. 某学校安排音乐、阅读、体育和编程四项课后服务供学生自愿选择参加，甲、乙、丙、丁4位同学每人限报其中项．已知甲同学报的项目其他同学不报的情况下，4位同学所报项目各不相同的概率等于(　)

A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{3}{32}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{8}{9}$

6. 公元前6世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派研究过正五边形和正十边形的作图，发现了黄金分割均为0.618，这一数值也可以表示为$m=2\sin 18^{\circ}$，若$m^2+n=4$，则$\frac{m\sqrt{n}}{2\cos^2 27^{\circ}-1}=$(　)

A. 8　　B. 4　　C. 2　　D. 1

7. 设*a*、*b*、*c*分别是$\triangle ABC$的内角*A*、*B*、*C*的对边，已知$(b+\sqrt{3}c)\sin(A+C)=(a+c)(\sin A-\sin C)$，设*D*是*BC*边的中点，且$\triangle ABC$的面积为1，则$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})$等于(　)

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $-2\sqrt{3}$　　D. -2

8. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 恒有 $f(x-1)=f(x+1)$，当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，已知 $k\in(-\dfrac{2}{15},-\dfrac{1}{18})$，则函数 $g(x)=f(x)-kx-\dfrac{1}{3}$ 在 $(-1,6)$ 上的零点个数为(　　)

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 3 个或 4 个　　D. 4 个或 5 个

二、多选题：本题共 4 小题，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列结论中正确的是(　　)

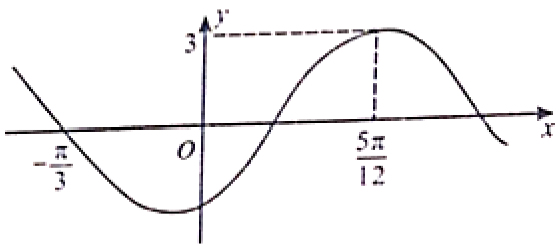
A. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $A>B$，则 $\sin A>\sin B$

B. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形

C. 两个向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 共线的充要条件是存在实数 λ，使 $\overrightarrow{b}=\lambda\overrightarrow{a}$

D. 对于非零向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ 是 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$ 的充分不必要条件

10. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 $A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$)的部分图象如图所示、将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是(　　)



A. 函数 $g(x)$ 为奇函数

B. 函数 $g(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$ 上单调递减

C. 函数 $F(x)=xf(x)$ 为偶函数

D. 函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in z)$

11. 圆锥曲线的光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线过双曲线的另一个焦点、由此可得，过双曲线上任意一点的切线，平分该点与两焦点连线的夹角、请解决下面问题 已知 F_1，F_2 分别是双曲线 C：$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点，点 P 为 C 在第一象限上的点，点 M 在 F_1P 延长线上，点 Q 的坐标为 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$，且 PQ 为 $\angle F_1PF_2$ 的平分线，则下列正确的是(　　)

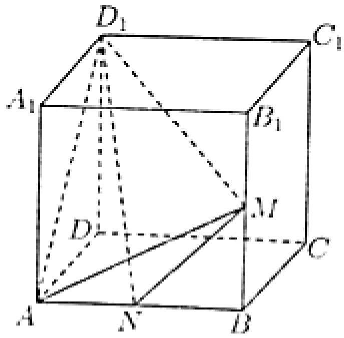
A. $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$

B. $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=2\sqrt{3}$

C. 点 P 到 x 轴的距离为 $\sqrt{3}$

D. $\angle F_2PM$ 的角平分线所在直线的倾斜角为 150°

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $1.M$ 、N 分别为 BB_1 、AB 的中点下列说法正确的是(　)



A. 点 M 到平面 AND_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 外接球的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$

C. 面 AND_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 外接球所得圆的面积为 $\dfrac{3\pi}{4}$

D. 以顶点 A 为球心，$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 为半径作一个球，则球面与正方体的表面相交所得到的曲线的长等于 $\dfrac{5\sqrt{3}\pi}{6}$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 二项式 $(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x})^9$ 的展开式中常数项是______.

14. 函数 $f(x)=x\ln(-2x)$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-\dfrac{e}{2}$ 处的切线方程为______.

15. 意大利数学家列昂那多·斐波那契以兔子繁殖为例，引入“兔子数列”：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，⋯即 $F(1)=F(2)=1$， $F(n)=F(n-1)+F(n-2)(n\geqslant 3,n\in N^*)$，此数列在现代物理“准晶体结构”、化学等领域都有着广泛的应用，若此数列的各项除以 3 的余数构成一个新数列 $\{a_n\}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 2022 项的和为______.

16. 已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$ 与双曲线 C_2：$\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$ 有相同的焦点 F_1、F_2，椭圆 C_1 的离心率为 e_1，双曲线 C_2 的离心率为 e_2，点 P 为椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的第一象限的交点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\dfrac{e_1e_2}{e_1+e_2}$ 的取值范围是______.

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列，$a_3=7$，且 a_4 是 a_1 与 a_{13} 的等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

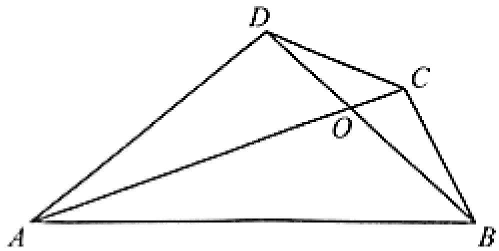
(2) ① $b_n=a_n\cdot(a_1)^n$；② $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$；③ $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，从上面三个条件中任选一个，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（本小题 12 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，AC 平分 $\angle DAB$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=3BC=3$.

(1) 求 $\sin\angle DAB$；

(2) 若 $\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$，求 $\triangle ABD$ 的面积.

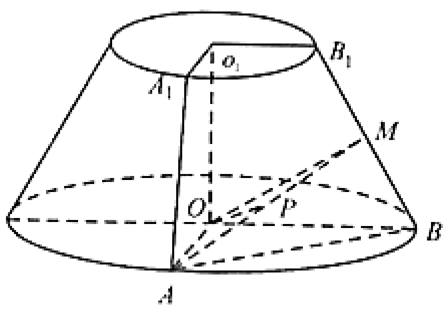


19.（本小题 12 分）

如图，已知圆台 O_1O 的下底面半径为 2，上底面半径为 1，母线与底面所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$，AA_1，BB_1 为母线，平面 $AA_1O_1O\perp$ 平面 BB_1O_1O，M 为 BB_1 的中点.

(1) 证明：平面 $ABB_1\perp$ 平面 AOM；

(2) 当点 P 为线段 AM 的中点时，求直线 AM 与平面 OPB 所成角的正弦值.



20.（本小题 12 分）

随着近期我国不断走向转型化进程以及社会就业压力的不断加剧，创业逐渐成为在校大学生和毕业大学生的一种职业选择方式，但创业过程中可能会遇到风险，有些风险是可以控制的，有些风险不可控制的，某

地政府为鼓励大学生创业，制定了一系列优惠政策．已知创业项目甲成功的概率为$\frac{2}{3}$，项目成功后可获得政府奖金20万元；创业项目乙成功的概率为$P_0(0<P_0<1)$，项目成功后可获得政府奖金30万元．项目没有成功则没有奖励，每个项目有且只有一次实施机会，两个项目的实施是否成功互不影响，项目成功后当地政府兑现奖励．

(1) 大学毕业生张某选择创业项目甲，毕业生李某选择创业项目乙，记他们获得的奖金累计为X(单位：万元)，若$X\leqslant 30$的概率为$\frac{7}{9}$.求P_0的大小；

(2) 若两位大学毕业生都选择创业项目甲或创业项目乙进行创业，问：他们选择何种创业项目，累计得到的奖金的数学期望最大？

21.（本小题12分）

设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为$A$，上顶点为$B$.已知椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$，$|AB|=\sqrt{7}$.

(1) 求椭圆的方程；

(2) 设P，Q为椭圆E上异于点A的两动点，若直线AP、AQ的斜率之积为$-\frac{1}{4}$.

①证明直线PQ恒过定点，并求出该点坐标；

②求$\triangle APQ$面积的最大值．

22.（本小题12分）

已知函数$f(x)=x^2-m\ln x$，其中$m>0$.

(1) 若$m=2$，求函数$f(x)$的极值；

(2) 设$g(x)=xf(x)-1$，若$g(x)>0$在$(1,+\infty)$上恒成立，求实数m的取值范围．

答案和解析

1.【答案】C

【解析】解：$\because A=\{x|\lg x<1\}=\{x|0<x<10\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$，

$\therefore A\cup B=\{x|0<x<10\}\cup\{x|x\leqslant 2\}=\{x|x<10\}$.

故选：C.

求解对数不等式化简 A，再由并集运算得答案.

本题考查并集及其运算，考查对数不等式的解法，是基础题.

2.【答案】B

【解析】解：$\because z=2(1-i)i=2+2i$，

$\therefore \bar{z}=2-2i$，

$\therefore \bar{z}$ 的虚部为 -2.

故选：B.

根据已知条件，结合复数的运算法则，以及复数的性质，即可求解.

本题主要考查复数的运算法则，以及复数的性质，属于基础题.

3.【答案】D

【解析】解：7 个有效评分与 9 个原始评分相比，平均数、极差、方差都有可能变化，

9 个原始评分的中位数是从小到大排序后的第 5 个数，7 个有效评分的中位数是从小到大排序后的第 4 个数，

是同一个数，

故选：D.

9 个原始评分的中位数是从小到大排序后的第 5 个数，7 个有效评分的中位数是从小到大排序后的第 4 个数，是同一个数.

本题考查了数字特征的性质，属于基础题.

4.【答案】A

【解析】解：m、n 是空间中两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，

对于 A，若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\perp n$，则由面面垂直的判定定理得 $\alpha\perp\beta$，故 A 正确；

对于 B，若 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha//\beta$，则 m 与 n 平行或异面，故 B 错误；

对于 C，若 $m//\alpha$，$n//\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 m 与 n 相交、平行或异面，故 C 错误；

对于 *D*，若$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$m//\beta$，$n//\alpha$，则α与β平行或相交，故 *D* 错误.

故选：A.

利用空间向量法可判断 *A*；根据已知条件判断线线、面面位置关系，判断BCD.

本题考查命题真假的判断，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理论证能力，是中档题.

5.【答案】*C*

【解析】解：甲同学报的项目其他同学不报的情况下，4 位同学所报项目各不相同的概率为$\dfrac{\overset{C_4^1A}{33}}{C_4^23^3}=\dfrac{2}{9}$.

故选：C.

甲同学报的项目其他同学不报的情况下，4 位同学所报项目各不相同的情况有$\overset{C_4^1A}{33}$种，甲同学报的项目其他同学不报的情况有$C_4^23^3$种，前面数据除以后面数据可得答案.

本题考查古典概型应用，考查数学运算能力及抽象能力，属于基础题.

6.【答案】*C*

【解析】解：$\because m=2\sin 18^\circ$，若$m^2+n=4$，

$\therefore n=4-m^2=4-4\sin^2 18^\circ=4(1-\sin^2 18^\circ)=4\cos^2 18^\circ$，

$\therefore \dfrac{m\sqrt{n}}{2\cos^2 27^\circ-1}=\dfrac{2\sin 18^\circ\sqrt{4\cos^2 18^\circ}}{1+\cos 54^\circ-1}=\dfrac{4\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\sin 36^\circ}=2.$

故选：C.

由已知利用同角三角函数基本关系式可求$n=4\cos^2 18^\circ$，利用降幂公式，诱导公式，二倍角的正弦函数公式化简所求即可计算得解.

本题主要考查了同角三角函数基本关系式，降幂公式，诱导公式，二倍角的正弦函数公式在三角函数化简求值中的应用，考查了转化思想，属于基础题.

7.【答案】*B*

【解析】解：$\because (b+\sqrt{3}c)\sin(A+C)=(a+c)(\sin A-\sin C)$，

$\therefore$由正弦定理可得：$(b+\sqrt{3}c)b=(a+c)(a-c)$，整理可得：$b^2+c^2-a^2=-\sqrt{3}bc$，

$\therefore$由余弦定理可得：$\cos A=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$由$A\in(0,\pi)$，可得：$A=\dfrac{5\pi}{6}$，

又 *ABC* 的面积为 1，即$\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{5\pi}{6}=1$，$\therefore bc=4$，

又$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})=(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{DB}^2-\overrightarrow{DA}^2$

$$=\frac{\overrightarrow{CB}^2}{4}-\frac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}{4}=\frac{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}{4}-\frac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}{4}$$

$$=-\frac{4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{4}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-bc\cos A=2\sqrt{3}，$$

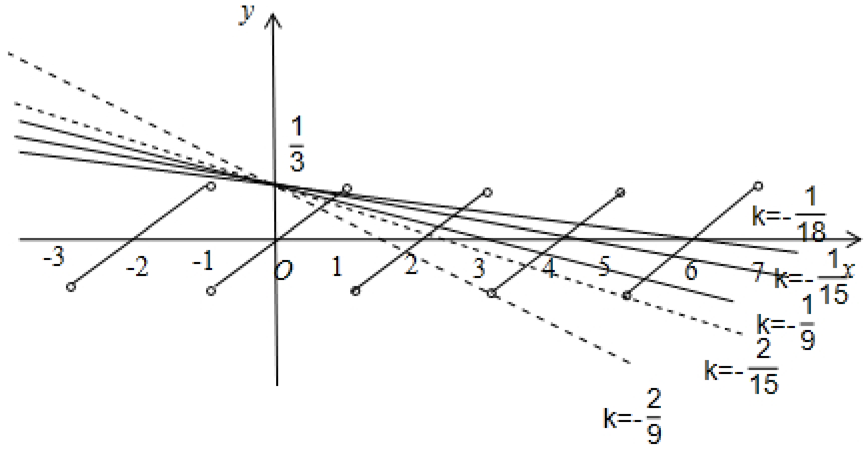
故选：B.

利用正弦定理边角互化思想以及余弦定理可求得 $A=\frac{5\pi}{6}$，由三角形的面积可求得 $bc=4$，由平面向量减法法则可得 $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})=-bc\cos A$，进而可得出结果.

本题考查平面向量的数量积运算，考查学生的运算能力，属于中档题.

8.【答案】D

【解析】解：



$\because f(x-1)=f(x+1)$，$\therefore f(x)$ 的周期为 2，

又$\because f(x)$ 为奇函数，

$f(x)=-f(-x)$，

令 $x=1$，得 $f(1)=-f(-1)$，又 $f(-1)=f(1)$，

$\therefore f(1)=f(-1)=0$，且

$x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，

由 $y=\frac{2}{2^x+1}$ 单调递减得函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增，

$\therefore f(-1)<f(x)<f(1)$，得 $-\frac{1}{3}<f(x)<\frac{1}{3}$，作出函数图象如图，

由图象可知当 $y=kx+\frac{1}{3}$ 经过 $(5,-\frac{1}{3})$ 时，$k=-\frac{2}{15}$，此时在 $(-1,6)$ 上只有 3 个零点，

当 $y=kx+\frac{1}{3}$ 经过 $(3,0)$ 时，$k=-\frac{1}{9}$，此时有 5 个零点，

当 $-\frac{2}{15}<k<-\frac{1}{9}$ 时，有 4 个零点，

当 $y=kx+\frac{1}{3}$ 经过 $(5,0)$ 时，$k=-\frac{1}{15}$，此时有 5 个零点，

当 $-\frac{1}{9}<k<-\frac{1}{15}$ 时，有 4 个零点，

当 $y=kx+\frac{1}{3}$ 经过 $(6,0)$ 时，$k=-\frac{1}{18}$，此时在 $(-1,6)$ 上只有 3 个零点，

当 $-\frac{1}{15}<k<-\frac{1}{18}$ 时，有 4 个零点，

$\therefore -\frac{2}{15} < k < -\frac{1}{18}$时，函数$g(x)=f(x)-kx-\frac{1}{3}$在$(-1,6)$上的零点个数为4个或5个，

故选：D.

本题利用奇函数性质和关系式转化求出$f(x)$的关系式，再利用数形结合思想求出k的值的范围.

本题考查了函数的性质，和数形结合思想，难度较大，属于中档题.

9.【答案】AD

【解析】解: 选项A，若$A>B$，则$a>b$，由正弦定理知，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$\sin A>\sin B$，即选项A正确；

选项B，若$\sin 2A=\sin 2B$，则$2A=2B$或$2A+2B=\pi$，所以$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$，即$\triangle ABC$为等腰或直角三角形，即选项B错误；

选项C，若$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$，则$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$共线，但不存在实数$\lambda$，使$\overrightarrow{b}=\lambda\overrightarrow{a}$，即选项C错误；

选项D，若$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，则$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$是相反向量，显然$\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$，满足充分条件，但$\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$，不一定有$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，不满足必要条件，即选项D正确.

故选：AD.

选项A，结合“大角对大边”和正弦定理，可判断；

选项B，易知$2A=2B$或$2A+2B=\pi$，从而判断三角形的形状；

选项C，举特例，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$；

选项D，由共线向量的基本定理，可判断.

本题考查命题的真假判断，主要涉及正弦定理，共线向量的基本定理，考查逻辑推理能力和运算能力，属于中档题.

10.【答案】AB

【解析】【分析】

本题主要考查了函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象求解函数解析式，还考查了正弦型函数性质的应用，属于中档题.

由图象结合最值求出A，由周期求出ω，结合函数图象所经过的点可求φ，进而可求函数解析式，再结合正弦型函数的性质分别检验各选项即可判断.

【解答】

解：由图象可知，$A=3$，$\frac{3T}{4}=\frac{5\pi}{12}-(-\frac{\pi}{3})=\frac{3\pi}{4}$，

所以$T=\pi$，$\omega=2$，$f(x)=3\sin(2x+\varphi)$，

又$f(\frac{5\pi}{12})=3\sin(\frac{5\pi}{6}+\varphi)=3$，

故$\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$，又$|\varphi|<\pi$，

所以$f(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，$g(x)=3\sin 2x$为奇函数，*A* 正确；

在区间$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$上，$2x\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，所以$g(x)$在$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$上单调递减，*B* 正确；

$F(x)=xf(x)=3x\sin(2x-\frac{\pi}{3})$显然不为偶函数，*C* 错误；

令$2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$得$x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in Z$，*D* 错误.

故选AB.

11.【答案】*AD*

【解析】解：由已知可得 *PQ* 是双曲线的一条切线，

设点$P(x_0,y_0)$，则切线 *PQ* 为$x_0x-\frac{y_0y}{2}=1$，

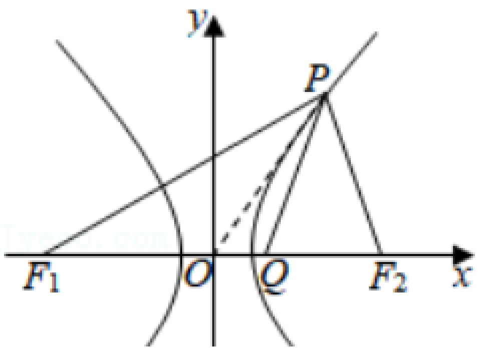
将点$Q(\frac{\sqrt{3}}{3},0)$代入切线方程，可得$x_0=\sqrt{3}$，

所以$P(\sqrt{3},2)$，即点 *P* 到 *x* 轴的距离为 2，所以 *C* 错误；

由双曲线的方程可得$F_2(\sqrt{3},0)$，

由角平分线定理可知$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1Q|}{|QF_2|}=2$，故 *A* 正确；

因为$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=2|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{7}$，故 *B* 错误；



又因为直线 *PQ* 的斜率为$\sqrt{3}$，所以$\angle F_2PM$的角平分线所在直线的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

即倾斜角为150°，故 *D* 正确.

故选：AD.