

2023 高考数学模拟试卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

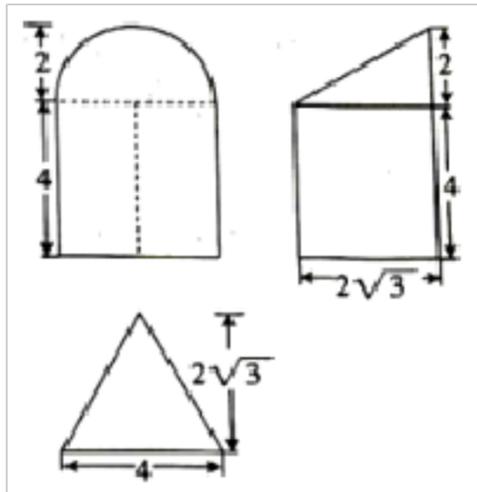
1. 设 i 是虚数单位, 若复数 $a + \frac{5i}{2+i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数, 则 a 的值为 ()

- A. -3 B. 3 C. 1 D. -1

2. 已知点 $(m, 8)$ 在幂函数 $f(x) = (m-1)x^n$ 的图象上, 设 $a = f\left(\frac{m}{n}\right)$, $b = f(\ln \pi)$, $c = f(n)$, 则 ()

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

3. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()



- A. $16\sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ B. $16\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}$ C. $\frac{16\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\pi}{3}$ D. $16\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + x^2$ ($a > 0$). 若存在实数 $x_0 \in (-1, 0)$, 且 $x_0 \neq -\frac{1}{2}$, 使得 $f(x_0) = f(-\frac{1}{2})$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{2}{3}, 5)$ B. $(\frac{2}{3}, 3) \cup (3, 5)$ C. $(\frac{18}{7}, 6)$ D. $(\frac{18}{7}, 4) \cup (4, 6)$

5. 下列不等式成立的是 ()

- A. $\sin \frac{1}{2} > \cos \frac{1}{2}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ C. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

6. 若 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^6 的系数为 **150**, 则 $a^2 =$ ()

- A. 20 B. 15 C. 10 D. 25

7. 复数 $z_1 = 2 + i$, 若复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于虚轴对称, 则 $\frac{z_1}{z_2}$ 等于 ()

- A. $-\frac{3+4i}{5}$ B. $\frac{3+4i}{5}$ C. $-3+4i$ D. $\frac{-3+4i}{5}$

8. 甲在微信群中发了一个 6 元“拼手气”红包,被乙、丙、丁三人抢完,若三人均领到整数元,且每人至少领到 1 元,则乙获得“最佳手气”(即乙领到的钱数多于其他任何人)的概率是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

9. 已知实数 $a > 0$, $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} ax, x < 1 \\ x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x, x \geq 1 \end{cases}$ 在 R 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $1 < a \leq 2$ B. $a < 5$ C. $3 < a < 5$ D. $2 \leq a \leq 5$

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为双曲线 C 上一点, Q 为双曲线 C 渐

近线上一点, P, Q 均位于第一象限, 且 $2\overline{QP} = \overline{PF_2}$, $\overline{QF_1} \cdot \overline{QF_2} = 0$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{3}+1$ C. $\sqrt{13}+2$ D. $\sqrt{13}-2$

11. 《聊斋志异》中有这样一首诗:“挑水砍柴不堪苦,请归但求穿墙术.得诀自诩无所阻,额上坟起终不悟.”在这里,

我们称形如以下形式的等式具有“穿墙术”: $2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2\frac{2}{3}}$, $3\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{3\frac{3}{8}}$, $4\sqrt{\frac{4}{15}} = \sqrt{4\frac{4}{15}}$, $5\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{5\frac{5}{24}}$, 则按照

以上规律, 若 $10\sqrt{\frac{10}{n}} = \sqrt{10\frac{10}{n}}$ 具有“穿墙术”, 则 $n =$ ()

- A. 48 B. 63 C. 99 D. 120

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AB} - \overline{AC}|$, $AB = 4$, $AC = 3$, 则 \overline{BC} 在 \overline{CA} 方向上的投影是 ()

- A. 4 B. 3 C. -4 D. -3

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. A, B, C 三所学校举行高三联考, 三所学校参加联考的人数分别为 160, 240, 400, 为调查联考数学学科的成绩, 现采用分层抽样的方法在这三所学校中抽取样本, 若在 B 学校抽取的数学成绩的份数为 30, 则抽取的样本容量为

_____.

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \leq x \\ x - 4y - 3 \leq 0 \\ 2x + y - 6 \leq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z = x + 2y - 1$ 的最小值为_____.

15. 现有 5 人要排成一排照相, 其中甲与乙两人不相邻, 且甲不站在两端, 则不同的排法有_____种. (用数字作答)

16. 在 $(2-x)^5$ 的展开式中, x^3 项的系数是_____ (用数字作答).

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 某公司欲投资一新型产品的批量生产, 预计该产品的每日生产总成本(价格) y (单位: 万元) 是每日产量 x (单位: 吨) 的函数: $y = \frac{32x^2}{x^2 - 1} \ln x (x > 1)$.

(1) 求当日产量为 3 吨时的边际成本(即生产过程中一段时间的总成本对该段时间产量的导数);

(2) 记每日生产平均成本 $\frac{y}{x} = m$, 求证: $m < 16$;

(3) 若财团每日注入资金可按数列 $a_n = \frac{2n}{4n^2 - 1}$ (单位: 亿元) 递减, 连续注入 60 天, 求证: 这 60 天的总投入资金大于 $\ln 11$ 亿元.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 若 $m > n > 0$, 且 $m^n = n^m$, 求证: $mn > e^2$.

19. (12 分) 某中学的甲、乙、丙三名同学参加高校自主招生考试, 每位同学彼此独立的从 A, B, C, D, E 五所高校中任选 2 所.

(1) 求甲、乙、丙三名同学都选 D 高校的概率;

(2) 若已知甲同学特别喜欢 A 高校, 他必选 A 校, 另在 B, C, D, E 四校中再随机选 1 所; 而同学乙和丙对五所高校没有偏爱, 因此他们每人在五所高校中随机选 2 所.

(i) 求甲同学选 D 高校且乙、丙都未选 D 高校的概率;

(ii) 记 X 为甲、乙、丙三名同学中选 D 高校的人数, 求随机变量 X 的分布列及数学期望.

20. (12 分) 设函数 $f(x) = 2\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 如果对所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \leq ax$, 求 a 的最小值;

(III) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 $(1 - a_{n+1})(1 + a_n) = 1$, 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证:

$$S_n > \frac{a}{2a_n} - \ln a_{n+1}.$$

21. (12分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 5$, $a_5 = 14$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2b_n - 1$.

(1) 求 a_n, b_n ;

(2) 若 $c_n = (-1)^n a_n + b_n$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

22. (10分) 已知函数 $f(x) = |x+1| - |4-2x|$.

(1) 求不等式 $f(x) \geq \frac{1}{3}(x-1)$ 的解集;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最大值为 m , 且 $2a+b=m(a>0, b>0)$, 求 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. D

【解析】

整理复数为 $b+ci$ 的形式, 由复数为纯虚数可知实部为 0 , 虚部不为 0 , 即可求解.

【详解】

$$\text{由题, } a + \frac{5i}{2+i} = a + \frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = a + 2i + 1 = (a+1) + 2i,$$

因为纯虚数, 所以 $a+1=0$, 则 $a=-1$,

故选: D

【点睛】

本题考查已知复数的类型求参数范围, 考查复数的除法运算.

2. B

【解析】

先利用幂函数的定义求出 m 的值, 得到幂函数解析式为 $f(x) = x^3$, 在 \mathbf{R} 上单调递增, 再利用幂函数 $f(x)$ 的单调性,

即可得到 a, b, c 的大小关系.

【详解】

由幂函数的定义可知, $m - 1 = 1$, $\therefore m = 2$,

\therefore 点 $(2, 8)$ 在幂函数 $f(x) = x^n$ 上,

$\therefore 2^n = 8$, $\therefore n = 3$,

\therefore 幂函数解析式为 $f(x) = x^3$, 在 \mathbf{R} 上单调递增,

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$, $1 < \ln \pi < 3$, $n = 3$,

$\therefore \frac{m}{n} < \ln \pi < n$,

$\therefore a < b < c$,

故选: **B**.

【点睛】

本题主要考查了幂函数的性质, 以及利用函数的单调性比较函数值大小, 属于中档题.

3. **D**

【解析】

结合三视图可知, 该几何体的上半部分是半个圆锥, 下半部分是一个底面边长为 **4**, 高为 **4** 的正三棱柱, 分别求出体积即可.

【详解】

由三视图可知该几何体的上半部分是半个圆锥, 下半部分是一个底面边长为 **4**, 高为 **4** 的正三棱柱, 则上半部分的半个圆

锥的体积 $V_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 4\pi \times 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$, 下半部分的正三棱柱的体积 $V_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 4 = 16\sqrt{3}$, 故该几何体的体积

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3} + 16\sqrt{3}.$$

故选: **D**.

【点睛】

本题考查三视图, 考查空间几何体的体积, 考查空间想象能力与运算求解能力, 属于中档题.

4. **D**

【解析】

首先对函数求导, 利用导数的符号分析函数的单调性和函数的极值, 根据题意, 列出参数所满足的不等关系, 求得结果.

【详解】

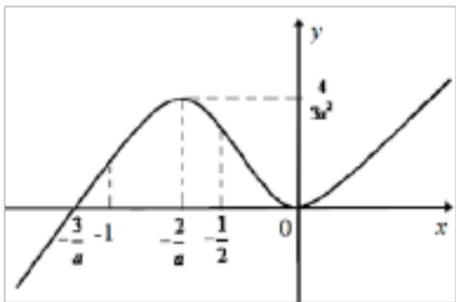
$$f'(x) = ax^2 + 2x, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = 0, x_2 = -\frac{2}{a}.$$

其单调性及极值情况如下:

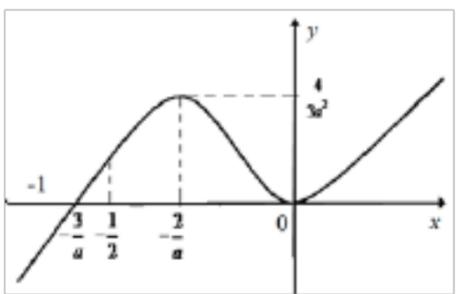
x	$\left(-\infty, -\frac{2}{a}\right)$	$-\frac{2}{a}$	$\left(-\frac{2}{a}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	极大值	\searrow	极小值	\nearrow

若存在 $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 使得 $f(x_0) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{2}{a} < -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{a} > -1 \\ f(-1) < f\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad \left(\text{如图1}\right) \text{ 或 } -\frac{3}{a} < -\frac{1}{2} < -\frac{2}{a} \quad \left(\text{如图2}\right).$$



(图1)



(图2)

于是可得 $a \in \left(\frac{18}{7}, 4\right) \cup (4, 6)$,

故选: **D**.

【点睛】

该题考查的是有关根据函数值的关系求参数的取值范围的问题, 涉及到的知识点有利用导数研究函数的单调性与极值, 画出图象数形结合, 属于较难题目.

5. **D**

【解析】

根据指数函数、对数函数、幂函数的单调性和正余弦函数的图象可确定各个选项的正误.

【详解】

对于 A , $\because 0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$, $\therefore \sin \frac{1}{2} < \cos \frac{1}{2}$, A 错误;

对于 B , $\because y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 R 上单调递减, $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$, B 错误;

对于 C , $\because \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > 1$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_3 2 < 1$, $\therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, C 错误;

对于 D , $\because y = x^{\frac{1}{3}}$ 在 R 上单调递增, $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, D 正确.

故选: D .

【点睛】

本题考查根据初等函数的单调性比较大小的问题; 关键是熟练掌握正余弦函数图象、指数函数、对数函数和幂函数的单调性.

6. C

【解析】

通过二项式展开式的通项分析得到 $C_6^2 a^2 x^6 = 150x^6$, 即得解.

【详解】

由已知得 $T_{r+1} = C_6^r (x^2)^{6-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r = C_6^r (a)^r x^{12-3r}$,

故当 $r = 2$ 时, $12 - 3r = 6$,

于是有 $T_3 = C_6^2 a^2 x^6 = 150x^6$,

则 $a^2 = 10$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查二项式展开式的通项和系数问题, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7. A

【解析】

先通过复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于虚轴对称, 得到 $z_2 = -2 + i$, 再利用复数的除法求解 $\frac{z_1}{z_2}$.

【详解】

因为复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于虚轴对称, 且复数 $z_1 = 2 + i$,

所以 $z_2 = -2 + i$

$$\text{所以 } \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{-2+i} = \frac{2+i(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

故选: **A**

【点睛】

本题主要考查复数的基本运算和几何意义, 属于基础题.

8. **B**

【解析】

将所有可能的情况全部枚举出来, 再根据古典概型的方法求解即可.

【详解】

设乙, 丙, 丁分别领到 x 元, y 元, z 元, 记为 (x, y, z) , 则基本事件有

$(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$, 共 **10** 个, 其中符合乙获得“最佳手

气”的有 **3** 个, 故所求概率为 $\frac{3}{10}$,

故选: **B**.

【点睛】

本题主要考查了枚举法求古典概型的方法, 属于基础题型.

9. **D**

【解析】

根据题意, 对于函数分 **2** 段分析: 当 $x < 1$, $f(x) = a^x$, 由指数函数的性质分析可得 $a > 1$ ①, 当

$x \geq 1$, $f(x) = x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x$, 由导数与函数单调性的关系可得 $f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2} + \frac{a}{x} \geq 0$, 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 变形

可得 $a \geq 2$ ②, 再结合函数的单调性, 分析可得 $a \leq 1 + 4$ ③, 联立三个式子, 分析可得答案.

【详解】

解: 根据题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 1 \\ x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 R 上单调递增,

当 $x < 1$, $f(x) = a^x$, 若 $f(x)$ 为增函数, 则 $a > 1$ ①,

当 $x \geq 1$, $f(x) = x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x$,

若 $f(x)$ 为增函数, 必有 $f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2} + \frac{a}{x} \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

变形可得: $a \geq \frac{4}{x} - 2x^2$,

又由 $x \geq 1$, 可得 $g(x) = \frac{4}{x} - 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $\frac{4}{x} - 2x^2 \leq \frac{4}{1} - 2 = 2$,

若 $a \geq \frac{4}{x} - 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 则有 $a \geq 2$ ②,

若函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 左边一段函数的最大值不能大于右边一段函数的最小值,

则需有 $a \leq 1 + 4 = 5$, ③

联立①②③可得: $2 \leq a \leq 5$.

故选: **D**.

【点睛】

本题考查函数单调性的性质以及应用, 注意分段函数单调性的性质.

10. **D**

【解析】

由双曲线的方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为双曲线 C 上的一点, Q 为双曲线 C 的渐近线上的一点,

且 P, Q 都位于第一象限, 且 $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PF_2}, \overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$,

可知 P 为 QF_2 的三等分点, 且 $\overrightarrow{QF_1} \perp \overrightarrow{QF_2}$,

点 Q 在直线 $bx - ay = 0$ 上, 并且 $|OQ| = c$, 则 $Q(a, b), F_2(c, 0)$,

设 $P(x_1, y_1)$, 则 $2(x_1 - a, y_1 - b) = (c - x_1, -y_1)$,

解得 $x_1 = \frac{2a + c}{3}, y_1 = \frac{2b}{3}$, 即 $P(\frac{2a + c}{3}, \frac{2b}{3})$,

代入双曲线的方程可得 $\frac{(2a + c)^2}{4a^2} - \frac{1}{4} = 1$, 解得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{13} - 2$, 故选 **D**.

点睛: 本题考查了双曲线的几何性质, 离心率的求法, 考查了转化思想以及运算能力, 双曲线的离心率是双曲线最重要的几何性质, 求双曲线的离心率(或离心率的取值范围), 常见有两种方法: ①求出 a, c , 代入公式 $e = \frac{c}{a}$; ②只需要

根据一个条件得到关于 a, b, c 的齐次式, 转化为 a, c 的齐次式, 然后转化为关于 e 的方程(不等式), 解方程(不等式),

即可得 e (e 的取值范围).

11. **C**

【解析】

观察规律得根号内分母为分子的平方减 1，从而求出 n .

【详解】

解：观察各式发现规律，根号内分母为分子的平方减 1

所以 $n = 10^2 - 1 = 99$

故选：C.

【点睛】

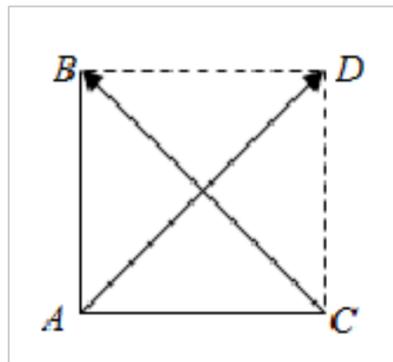
本题考查了归纳推理，发现总结各式规律是关键，属于基础题.

12. D

【解析】

分析：根据平面向量的数量积可得 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ，再结合图形求出 \overrightarrow{BC} 与 \overrightarrow{CA} 方向上的投影即可.

详解：如图所示：



$$\because |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC},$$

又 $AB = 4$ ， $AC = 3$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BC} \text{ 在 } \overrightarrow{CA} \text{ 方向上的投影是：} |\overrightarrow{BC}| \cos \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{BC}| \cos (\pi - \angle ACB) = -|\overrightarrow{BC}| \cos \angle ACB = -3,$$

故选 D.

点睛：本题考查了平面向量的数量积以及投影的应用问题，也考查了数形结合思想的应用问题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 100

【解析】

某层抽取的人数等于该层的总人数乘以抽样比.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/546150153052010053>