安徽省部分学校2024届高三上学期期末质量检测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\left\{x\left|2^x>\frac{1}{2}\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$(-2,-1)$　　B．$(-1,4)$

C．$(-2,1)$　　D．$(1,4)$

2．已知复数 z 满足 $\frac{3z-4}{4z-2}=\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）

A．$\frac{2}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{6}{5}$

3．已知点 $A\left(-4,-2\sqrt{3}\right)$，$B(-2,0)$，$C\left(\sqrt{3},m\right)$，$O$ 为坐标原点，若 $\overline{OA}+\overline{OB}$ 与 $\overline{OC}$ 共线，则 $m=$（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

4．若 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{4}{5}$，则 $\cos(2\alpha+\pi)=$（　）

A．$-\frac{7}{15}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$-\frac{3}{5}$　　D．$\frac{7}{25}$

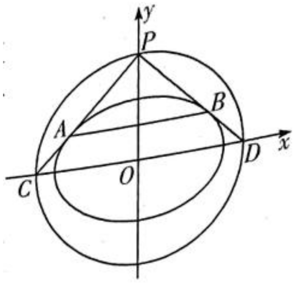
5．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(2)=4$，则 $f(20)=$（　）

A．4　　B．2　　C．-4　　D．-20

6．已知 AB 是圆锥 PO 底面的直径，O 为底面圆心，C 为半圆弧 AB 的中点，D，E 分别为线段 PA，BC 的中点，$PA=2\sqrt{5}$，$AB=4$，则异面直线 CD 与 PE 所成角的余弦值为（　）

A．$\frac{\sqrt{26}}{26}$　　B．$\frac{11\sqrt{2}}{18}$　　C．$\frac{5\sqrt{26}}{26}$　　D．$\frac{3\sqrt{39}}{26}$

7．法国数学家蒙日发现椭圆两条相互垂直的切线的交点的轨迹是圆，这个圆被称为“蒙日圆”，它的圆心与椭圆中心重合，半径的平方等于椭圆长半轴和短半轴的平方和．如图所示为稀圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 及其蒙日圆 O，点 P,C,D 均为蒙日圆与坐标轴的交点，PC,PD 分别与 E 相切于点 A,B，若 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的面积比为 $4:9$，则 E 的离心率为（　）



A．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

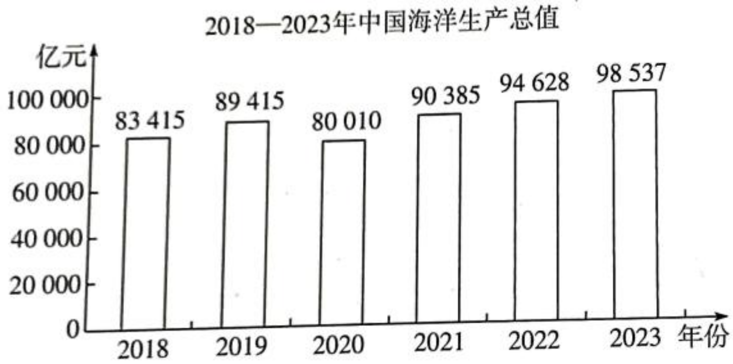
8．已知$\log_6 a=\dfrac{1}{4}$，$\log_4 b=\dfrac{1}{3}$，$c=\left(1+\mathrm{e}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$

C．$b<a<c$　　D．$a<c<b$

二、多选题

9．党的二十大作出“发展海洋经济，保护海洋生态环境，加快建设海洋强国”的战略部署．如图是2018—2023年中国海洋生产总值的条形统计图，根据图中数据可知下列结论正确的是（　　）



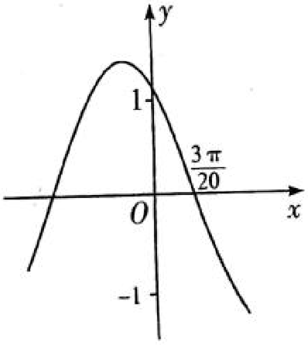
A．从2018年开始，中国海洋生产总值逐年增大

B．从2019年开始，中国海洋生产总值的年增长率最大的是2021年

C．这6年中国海洋生产总值的极差为15122

D．这6年中国海洋生产总值的80%分位数是94628

10．已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\varphi\right)\left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则（　　）



A． $\varphi=\frac{\pi}{5}$

B． $f\left(x\right)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递增

C． $f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{2\pi}{5}$对称

D． $f\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)$为偶函数

11．已知直线$y=x+m$与抛物线$C:y^2=8x$相切于点P，过P作两条斜率互为相反数的直线，这两条直线与C的另一个交点分别为A，B，直线$y=2x-4$与C交于M，N两点，则（　）

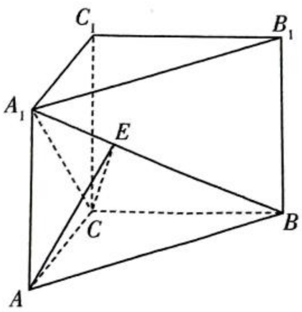
A． $m=4$

B．线段AB中点的纵坐标为-4

C．直线AB的斜率为-1

D．直线PM，PN的斜率之积为4

12．如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，$AA_1=AC=CB=2$，E在线段A_1B上且$AE\perp A_1B$，则（　）



A． $AE\perp A_1C$

B．四棱锥$A_1-BB_1C_1C$的外接球的一条直径为A_1B

C．三棱锥$E-AA_1C$的外接球表面积为12π

D．三棱锥$E-ABC$的外接球体积为$4\sqrt{3}\pi$

三、填空题

13．若圆$C:x^2+y^2+mx+4y-1=0$关于直线$y=3x+1$对称，则$m=$______.

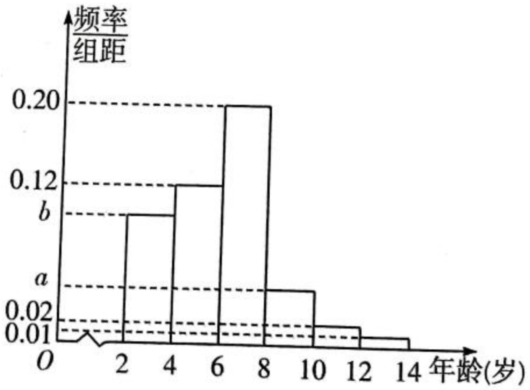
14．$(x+y)(2x-y)^6$的展开式中x^3y^4的系数为______.（用数字作答）

15．已知函数$f(x)=\begin{cases} e^{2+x}-1, x\le 0 \\ \dfrac{2}{3}(x-1)-\log_2 x, x>0 \end{cases}$，则不等式$f(x)<0$的解集为______.

16．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{n+3}, S_n=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}$，若对任意$n\in \mathrm{N}^*$，不等式$4\lambda(n+3)S_n<n+2$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围是______.

四、解答题

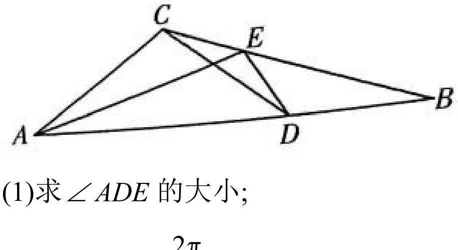
17．在当今信息泛滥的时代，很多因素容易分散孩子们的注意力．某儿童注意力训练机构从2~14岁的学员中随机抽取了50名学员，得到相关数据如图所示：



(1)若抽取的这50名学员的平均年龄为6.2岁（每组数据以所在区间的中点值为代表），求图中a，b的值．

(2)从所抽取的年龄在$[2,4)$，$[6,8)$，$[8,10)$内的学员中，按照人数比例用分层随机抽样的方法抽取7人，再从这7人中任选3人，记这3人中年龄在$[6,8)$内的学员人数为X，求X的分布列和数学期望．

18．如图,在$\triangle ABC$中,$\angle CAB$的平分线交BC边于点E,点D在AB边上,$AE=7$,$AD=3\sqrt{7}$,$\cos\angle CAE=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

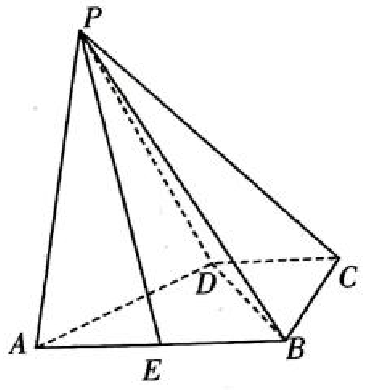


(1)求$\angle ADE$的大小;

(2)若$\angle ACB=\dfrac{2\pi}{3}$,求$\triangle CDE$的面积.

19．如图，四棱锥$P-ABCD$的体积为1，平面$PDC\perp$平面$ABCD$，$AB\perp BC$，$AB\,//\,CD$，

$AB = 2BC = 2CD = 2$， $PD = \sqrt{5}$， $\angle PDC$ 为钝角.



(1)证明： $PA = PD$；

(2)若点 E 在棱 AB 上，且 $AD \perp PE$，求直线 PE 与平面 PBD 所成角的正弦值.

20．在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = \dfrac{1}{3}$， $a_2 = 2a_3$，且数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是等比数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n = (n+1)a_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明： $T_n < \dfrac{9}{4}$.

21．已知双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a>0, b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，且 C 过点 $P(5,4)$.

(1)求 C 的方程；

(2)设点 $Q\left(\dfrac{5}{3}, y_Q\right)(y_Q \neq 0)$， O 为坐标原点，直线 QF 与 C 的右支交于 A, B 两点，过点 Q 作直线 OA 的平行线 l， l 与 x 轴交于点 R，与直线 OB 交于点 G，证明： G 为线段 QR 的中点.

22．已知函数 $f(x) = ax + \ln x$， $a \in \mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若函数 $g(x) = ax^2 + 2x - f(x)$ 有两个不同的零点，求实数 a 的取值范围.

参考答案：

1．B

【分析】计算出集合B后，由交集的性质计算即可得.

【详解】由$2^x > \frac{1}{2}$，可得$x > -1$，即$B = \{x | x > -1\}$，

故$A \cap B = (-1, 4)$.

故选：B.

2．C

【分析】借助复数的性质与模的定义计算即可得.

【详解】由$\frac{3z-4}{4z-2} = \mathrm{i}$，则有$3z - 4 = \mathrm{i}(4z-2) = 4z\mathrm{i} - 2\mathrm{i}$，

即$z = \frac{4-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} = \frac{(4-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \frac{12+8-6\mathrm{i}+16\mathrm{i}}{25} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}$，

故$|z| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：C.

3．B

【分析】结合平面向量共线定理计算即可得.

【详解】$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-6, -2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OC} = (\sqrt{3}, m)$，

由$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$共线，故有$-6m - (-2\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 0$，

解得$m = 1$.

故选：B.

4．D

【分析】根据条件，利用诱导公式和余弦的二倍角公式即可求出结果.

【详解】因为$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha = -\frac{4}{5}$，得到$\sin\alpha = \frac{4}{5}$，

所以$\cos(2\alpha + \pi) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2\sin^2\alpha) = -1 + 2(\frac{4}{5})^2 = \frac{7}{25}$，

故选：D.

5．C

【分析】根据条件得出函数$f(x)$的周期为$T = 4$，再利用$f(2)=4$，即可求出结果.

【详解】因为$f\left(x+1\right)$为奇函数，所以$f\left(-x+1\right)=-f\left(x+1\right)$，又$f\left(x+2\right)$为偶函数，得到

$f\left(-x+2\right)=f\left(x+2\right)$，

由$f\left(-x+1\right)=-f\left(x+1\right)$，得到$f(x+2)=-f(-x)$，所以$-f(-x)=f(-x+2)$，

即有$-f(x)=f(x+2)$，所以$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故函数$f\left(x\right)$的周期为$T=4$，

又$f(2)=4$，所以$f\left(20\right)=f(0)=-f(2)=-4$，

故选：C.

6．B

【分析】根据条件，建立空间直角坐标系，求出$\overrightarrow{CD}=(1,-2,2),\overrightarrow{PE}=(-1,1,-4)$，再利用线线角的向量法，即可求出结果.

【详解】因为C为半圆弧AB的中点，则$CO\perp AB$，如图，建立空间直角坐标系，

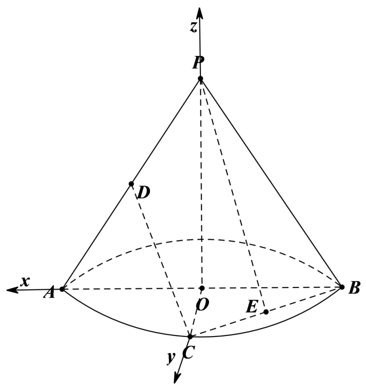
因为$PA=2\sqrt{5}$，$AB=4$，C为半圆弧AB的中点，D，E分别为线段PA，BC的中点，

则$A(2,0,0),P(0,0,4),C(0,2,0),B(-2,0,0)$, $D(1,0,2),E(-1,1,0)$，

所以$\overrightarrow{CD}=(1,-2,2),\overrightarrow{PE}=(-1,1,-4)$，

设异面直线CD与PE所成角的角为θ，

则$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{CD},\overrightarrow{PE}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PE}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PE}\right|}=\dfrac{11}{3\sqrt{18}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{18}$，



故选：B.

7．C

【分析】由蒙日圆O的方程求得P,D的坐标，可得直线PD的方程$y=-x+\sqrt{a^2+b^2}$，联立椭圆的方程，求出B的横坐标，再结合条件，即可得到$a^2=2b^2$，从而求出结果.

【详解】由题知，蒙日圆O为$x^2+y^2=a^2+b^2$，设$P(0,\sqrt{a^2+b^2}),D(\sqrt{a^2+b^2},0)$，

则直线PD的方程为$y=-x+\sqrt{a^2+b^2}$，

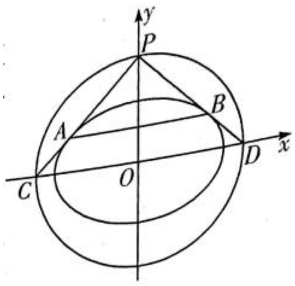
由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=-x+\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$，消$y$得到$(a^2+b^2)x^2-2a^2\sqrt{a^2+b^2}x+a^4=0$，

显然有$\Delta=(2a^2\sqrt{a^2+b^2})^2-4(a^2+b^2)a^4=0$，解得$x_B=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

又$\triangle PAB$与$\triangle PCD$的面积比为$4:9$，所以$\dfrac{|AB|}{|CD|}=\dfrac{2}{3}$，

又$|CD|=2\sqrt{a^2+b^2}$，$|AB|=2x_B=\dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$，所以$\dfrac{\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{2}{3}$，

得到$a^2=2b^2$，所以$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，



故选：C.

8．A

【分析】由条件得到$a=6^{\frac{1}{4}}$，$b=4^{\frac{1}{3}}$，从而得到$a^{12}=216$，$b^{12}=256$，即可得出$b>a$，构造函数$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>1)$，利用函数的单调性，即可判断出$c>b$，从而得出结果.

【详解】由$\log_6 a=\dfrac{1}{4}$，得到$a=6^{\frac{1}{4}}$，又$\log_4 b=\dfrac{1}{3}$，所以$b=4^{\frac{1}{3}}$，

所以$a^{12}=(6^{\frac{1}{4}})^{12}=216$，$b^{12}=(4^{\frac{1}{3}})^{12}=256$，又$256>216$，

所以$b^{12}>a^{12}$，又$a>0,b>0$，得到$b>a$，

令$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>1)$，则$\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$，所以$\dfrac{1}{y}y'=-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)+\dfrac{1}{x(1+x)}$，

得到 $y'=[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}](1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+x)}[x-(1+x)\ln(1+x)]$，

令 $h(x)=x-(1+x)\ln(1+x)$，则 $h'(x)=1-\ln(1+x)-1=-\ln(1+x)<0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $h(x)=x-(1+x)\ln(1+x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $h(1)=1-(1+1)\ln(1+1)=1-2\ln2=1-\ln4<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+x)}>0$，

得到 $y'=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+x)}[x-(1+x)\ln(1+x)]<0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $\mathrm{e}<3$，所以 $c=\left(1+\mathrm{e}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}>(1+3)^{\frac{1}{3}}=b$，得到 $c>b>a$，

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于判断 b,c 的大小，通过构造函数 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>1)$，利用导数与函数的单调性间的关系，得函数 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>1)$ 的单调性，即可求出结果.

9．BD

【分析】对 A，根据条形图数据可判断；对 B，根据数据计算年增长率可判断；对 C，计算极差可判断；对 D，根据 80%分位数概念计算可判断.

【详解】对于 A，根据条形图数据可以看到 2020 年较 2019 年海洋生产总值是下降的，故 A 错误；

对于 B，2019 年海洋生产总值年增长率是 $\frac{89415}{83415}-1=0.072$，

2020 年海洋生产总值年增长率是 $\frac{80010}{89415}-1=-0.105$，2021 年海洋生产总值年增长率是 $\frac{90385}{80010}-1=0.130$，

2022 年海洋生产总值年增长率是 $\frac{94628}{90385}-1=0.047$，2023 年海洋生产总值年增长率是 $\frac{98537}{94628}-1=0.041$，

故年增长率最大的是 2021 年，故 B 正确；

对于 C，这 6 年中国海洋生产总值的极差为 $98537-80010=18527$，故 C 错误；

对于 D，将这 6 年的海洋生产总值按照从小到大排列 80010，83415，89415，90385，94628，98537，又 $6\times80\%=4.8$，

所以这 6 年中国海洋生产总值的 80%分位数是 94628，故 D 正确.

故选：BD.

10．AC

【分析】利用图象求出函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，可判断 A 选项；利用余弦型函数的单调性可判断 B 选项；利用余弦型函数的对称性可判断 C 选项；利用余弦型函数的奇偶性可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，由图可知，$f\left(\frac{3\pi}{20}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\varphi\right)=0$，

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则 $-\frac{\pi}{5}<\varphi+\frac{3\pi}{10}<\frac{4\pi}{5}$，所以，$\varphi+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{5}$，A 对；

对于 B 选项，由 A 选项可知，$f\left(x\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$，

当 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ 时，$\frac{6\pi}{5}\le 2x+\frac{\pi}{5}\le\frac{11\pi}{5}$，所以，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上不单调，B 错；

对于 C 选项，因为 $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{2}\cos\pi=-\sqrt{2}=f\left(x\right)_{\min}$，

所以，$f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{5}$ 对称，C 对；

对于 D 选项，$f\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)=\sqrt{2}\cos\left[2\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)+\frac{\pi}{5}\right]=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{9\pi}{5}\right)$，

所以，$f\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)$ 是非奇非偶函数，D 错.

故选：AC.

11．BCD

【分析】对 A：联立后得到一元二次方程，令 $\Delta=0$ 计算即可得；对 B：设出直线后联立可得 $y_A=\frac{8}{k}-4$，$y_B=\frac{8}{-k}-4$，即可得其中点纵坐标；对 C：由斜率公式计算即可得；对 D：联立 l_{MN} 与抛物线可得与 M 、N 纵坐标有关韦达定理，结合斜率公式计算即可得其斜率之积.

【详解】对 A：联立可得 $\begin{cases}y=x+m\\y^2=8x\end{cases}$，即有 $x^2+\left(2m-8\right)x+m^2=0$，

$\Delta=\left(2m-8\right)^2-4m^2=0$，解得 $m=2$，故 A 错误；

对 B：由 $m=2$，故有 $x^2-4x+4=0$，故 $x=2$，$y=2+2=4$，故 $P\left(2,4\right)$，

设 $l_{PA}:y=k\left(x-2\right)+4$，则 $l_{PB}:y=-k\left(x-2\right)+4$，$k\neq0$，