第三节　二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

预　习　知识排查·双基落实　　抓牢基础·赢得良好开端

【知识重温】

一、必记 6 个知识点

1．二元一次不等式表示平面区域

在平面直角坐标系中，平面内所有的点被直线 $Ax+By+C=0$ 分成三类：

(1)满足 $Ax+By+C=0$ 的点．

(2)满足 $Ax+By+C>0$ 的点．

(3)满足 $Ax+By+C<0$ 的点．

2．二元一次不等式表示平面区域的判断方法

直线 $l:Ax+By+C=0$ 把坐标平面内不在直线 l 上的点分为两部分，当点在直线 l 的同一侧时，点的坐标使式子 $Ax+By+C$ 的值具有相同的符号，当点在直线 l 的两侧时，点的坐标使 $Ax+By+C$ 的值具有相反的符号．

3．线性规划中的基本概念

名称	意义
约束条件	由变量 x，y 组成的不等式(组)
线性约束条件	由 x，y 的一次不等式(或方程)组成的不等式(组)
目标函数	关于 x，y 的函数解析式，如 $z=x+2y$
线性目标函数	关于 x，y 的一次解析式
可行解	满足线性约束条件的解(x，y)

可行域	所有可行解组成的集合
最优解	使目标函数取得最大值或最小值的可行解
线性规划问题	在线性约束条件下求线性目标函数的最大值或最小值问题

4.画二元一次不等式表示的平面区域的直线定界，特殊点定域

(1)直线定界：不等式中无等号时直线画成虚线，有等号时直线画成实线．

(2)特殊点定域：若直线不过原点，特殊点常选原点；若直线过原点，则特殊点常选取(0,1)或(1,0)来验证．

5．利用“同号上，异号下”判断二元一次不等式表示的平面区域

对于 $Ax+By+C>0$ 或 $Ax+By+C<0$，则有

(1)当 $B(Ax+By+C)>0$ 时，区域为直线 $Ax+By+C=0$ 的上方．

(2)当 $B(Ax+By+C)<0$ 时，区域为直线 $Ax+By+C=0$ 的下方．

6．最优解和可行解的关系

最优解必定是可行解，但可行解不一定是最优解，最优解不一定唯一，有时唯一，有时有多个．

二、必明 2 个易误点

1．画出平面区域．避免失误的重要方法就是首先使二元一次不等式化为 $ax+by+c>0(a>0)$．

2．线性规划问题中的最优解不一定是唯一的，即可行域内使目标函数取得最值的点不一定只有一个，也可能有无数多个，也可能没有．

【小题热身】

一、判断正误

1．判断下列说法是否正确(请在括号中打“√”或“×”)．

(1)不等式 $Ax+By+C>0$ 表示的平面区域一定在直线 $Ax+By+C=0$ 的上方．(　　)

(2)任何一个二元一次不等式组都表示平面上的一个区域．(　　)

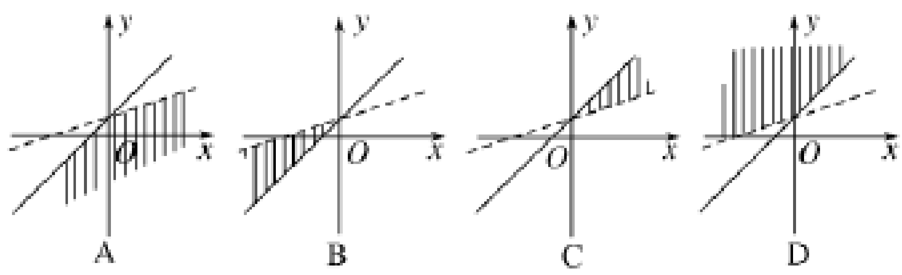
(3)线性目标函数的最优解可能是不唯一的．(　　)

(4)线性目标函数取得最值的点一定在可行域的顶点或边界上．(　　)

(5)目标函数 $z=ax+by(b\neq0)$中，z 的几何意义是直线 $ax+by-z=0$ 在 y 轴上的截距．(　　)

二、教材改编

2．不等式组$\begin{cases}x-3y+6<0,\\x-y+2\geq0\end{cases}$表示的平面区域是(　　)



3．下面给出的四个点中，位于$\begin{cases}x+y-1<0,\\x-y+1>0\end{cases}$表示的平面区域内的点是(　　)

A．(0,2)　B．(－2,0)

C．(0，－2)　D．(2,0)

三、易错易混

4．[2021·某某省名校高三教学质量检测]若实数 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y+4\geq0\\3x+5y+4\geq0\\5x+3y-4\leq0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为________．

5．[2021·某某市高三年级调研检测]已知实数 x，y 满足$\begin{cases}2x+y-2\geq0\\3x-y-3\leq0\\x-2y+4\geq0\end{cases}$，则 $z=x-3y$

的最小值为(　　)

A．-7　B．-6　C．1　D．6

四、走进高考

6．[2020·全国卷Ⅰ，13]若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}2x+y-2\le 0,\\ x-y-1\ge 0,\\ y+1\ge 0,\end{cases}$则 $z=x+7y$ 的最大值为________．

课　堂 ⊙考点突破·分层探究　研习考点·掌握类题通法

$\boxed{\text{考点一}}$二元一次不等式(组)表示的平面区域

[互动讲练型]

[例 1]　[2019·全国卷Ⅲ]记不等式组$\begin{cases}x+y\ge 6,\\ 2x-y\ge 0\end{cases}$表示的平面区域为 D．命题 p：∃ (x，y)∈D，$2x+y\ge 9$；命题 q：∀ (x，y)∈D,$2x+y\le 12$．下面给出了四个命题

①p∨q②(綈 p)∨q③p∧(綈 q)　④(綈 p)∧(綈 q)

这四个命题中，所有真命题的编号是(　　)

A．①③　　B．①②　　C．②③　　D．③④

悟·技法

平面区域面积问题的解题思路

(1)求平面区域的面积：

①首先画出不等式组表示的平面区域，若不能直接画出，应利用题目的已知条件转化为不等式组问题，从而再作出平面区域；

②对平面区域进行分析，若为三角形应确定底与高，若为规则的四边形(如平行四边形或梯形)，可利用面积公式直接求解．若为不规则四边形，可分割成几个三角形分别求解再求和即可．

(2)利用几何意义求解的平面区域问题，也应作出平面图形，利用数形结合的方法去求解.

[变式练]——(着眼于举一反三)

1．[2021·某某模拟]设不等式组$\begin{cases} x+y-1\geq 0, \\ x-y+1\geq 0, \\ 2x-y-2\leq 0 \end{cases}$表示的平面区域为 M，若直线 $kx-y+1=0(k\in \mathbf{R})$将区域 M 的面积分为相等的两部分，则实数 k 的值为(　　)

A.$\frac{1}{3}$　B.$\frac{1}{2}$　C．$-\frac{1}{2}$　D．$-\frac{1}{3}$

2．已知约束条件$\begin{cases} x\geq 1, \\ x+y-4\leq 0, \\ kx-y\leq 0 \end{cases}$表示面积为 1 的直角三角形区域，则实数 k 的值为(　　)

A．1　B．-1　C．0　D．-2

考点二　求目标函数的最值[分层深化型]

考向一：形如 $z=ax+by$

[例 2]　[2020·全国卷Ⅲ，13]若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geq 0,\\ 2x-y\geq 0,\\ x\leq 1,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为________．

考向二：形如 $z=(x-a)_2+(y-b)_2$

[例 3]　[2021·某某省六校高三阶段性测试]将满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2<0,\\ 2x-y+2\geq 0,\\ x-2y-2\leq 0\end{cases}$ 的实数对(x，y)所组成的集合记作 D，设 $z=(x-1)_2+(y-2)_2$，则 z 的取值 X 围是________．

考向三：形如 $z=\dfrac{y-b}{x-a}$

[例 4]　[2021·某某省某某市高三调研试题]设实数 x ,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+4\geq 0\\ x+2y-6\geq 0\\ x\leq 2\end{cases}$，则 $z=\dfrac{y}{x+1}$的取值 X 围为(　　)

A. $\left[\dfrac{8}{3},\dfrac{16}{3}\right]$　B. $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{6}\right]$

C. $\left[\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right]$　D. $\left[\frac{2}{3},\frac{16}{3}\right]$

听课笔记：

悟·技法

1.求目标函数的最值 3 步骤

(1)作图——画出约束条件所确定的平面区域和目标函数所表示的平行直线系中过原点的那一条直线；

(2)平移——将 l 平行移动，以确定最优解的对应点的位置；

(3)求值——解方程组求出对应点坐标(即最优解)，代入目标函数，即可求出最值．

2．常见的 3 类目标函数

(1)截距型：形如 $z=ax+by$.

求这类目标函数的最值常将函数 $z=ax+by$ 转化为直线的斜截式：$y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$，通过求直线的截距$\frac{z}{b}$的最值间接求出 z 的最值．

(2)距离型：形如 $z=(x-a)_2+(y-b)_2$.

(3)斜率型：形如 $z=\frac{y-b}{x-a}$.

[提醒]　注意转化的等价性及几何意义.

[同类练]——(着眼于触类旁通)

3．[2021·某某省部分重点中学高三起点考试]已知实数 x，y 满足 $\begin{cases} x-2y+1\geq 0 \\ x+y-1\geq 0 \\ x<2 \end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的取值 X 围是________．

4 .[2021·某某省部分重点校高三联考试题]已知变量 x ,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+2\geq 0 \\ x+y-1\geq 0 \\ x\leq 0 \end{cases}$，则 $z=x+3y$ 的最小值为________．

[变式练]——(着眼于举一反三)

5．[2021·某某鹤岗一中月考]设实数 x，y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y\leq 2, \\ y-x\leq 2, \\ y\geq 1, \end{cases}$ 则 x_2+y_2 的取值 X 围是(　　)

A．[1,2]　B．[1,4]

C．$[\sqrt{2}, 3]$　D．[2,4]

6 .[2021·某某市高三年级阶段性训练题]已知实数 x ,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+2\geq 0 \\ 2x+y-5\leq 0 \\ y\geq 1 \end{cases}$，

则 $z=\dfrac{y}{x+3}$的最大值为(　　)

A.$\dfrac{3}{5}$　B.$\dfrac{4}{5}$　C.$\dfrac{3}{4}$　D.$\dfrac{3}{2}$

[拓展练]——(着眼于迁移应用)

7．[2021·某某晋中月考]已知变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases} x-2y+4\le 0, \\ y\ge 2, \\ x-4y+k\ge 0, \end{cases}$且 $z=3x+y$ 的最小值为 -1，则常数 $k=$________.

8．[2021·某某师大附中月考]已知 x，y 满足约束条件$\begin{cases} x-2y-2\le 0, \\ 2x-y+2\ge 0, \\ x+y-2\le 0, \end{cases}$若 $ax+y$ 取得最大值的最优解不唯一，则实数 a 的值为(　　)

A.$\dfrac{1}{2}$或 -1　B．2 或$\dfrac{1}{2}$

C． -2 或 1　D．2 或 -1

考点三　线性规划的实际应用[互动讲练型]

[例 5]　[2016·全国卷Ⅰ]某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品 A 需要甲材料 1.5 kg，乙材料 1 kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5 kg，乙材料 0.3 kg，用 3 个工时．生产一件产品 A 的利润为 2 100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元．该企业现有甲材料 150 kg，乙材料 90 kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为________元．

悟·技法

1.解线性规划应用题 3 步骤

(1)转化——设元，写出约束条件和目标函数，从而将实际问题转化为线性规划问题．

(2)求解——解这个纯数学的线性规划问题．

(3)作答——将数学问题的答案还原为实际问题的答案．

2．求解线性规划应用题的 3 个注意点

(1)明确问题中的所有约束条件，并根据题意判断约束条件是否能够取到等号．

(2)注意结合实际问题的实际意义，判断所设未知数 x，y 的取值 X 围，特别注意分析 x，y 是否是整数、是否是非负数等．

(3)正确地写出目标函数，一般地，目标函数是等式的形式.

[变式练]——(着眼于举一反三)

9．[2021·某某省“五个一名校联盟”考试]某企业生产甲、乙两种产品均需用 A，B 两种原料，已知生产 1 吨每种产品所需原料及每天原料的可用限额如表所示．如果生产 1 吨甲、乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元，则该企业每天可获得的最大利润为(　　)

	甲	乙	原料限额