2022-2023 学年湖北省襄阳市第四中学高二上学期周考数学试卷（一）

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 直线$\frac{x}{3}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1$的倾斜角为(　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 已知$m,\ n$为空间两条不同的直线，$\alpha,\ \beta$为两个不同的平面，则下列命题正确的是(　)

A. 若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$

B. 若$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则$m//n$

C. 若$m//\alpha$，$m//\beta$，则$\alpha//\beta$

D. 若$\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则$m//n$

3. 敏感性问题多属个人隐私.对敏感性问题的调查方案，关键是要使被调查者愿意作出真实回答又能保守个人秘密.例如对学生在大型考试中有过抄袭，现有如下调查方案：在某校某年级，被调查者在没有旁人的情况下，独自一人回答问题.被调查者从一个罐子中随机抽一只球，看过颜色后即放回，若抽到白球，则回答问题 *A*；若抽到红球，则回答问题 *B*，且罐中只有白球和红球.

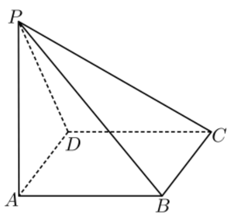
问题 *A*：你的生日是否在 7 月 1 日之前？(本次调查中假设生日在 7 月 1 日之前的概率为$\frac{1}{2}$)

问题 *B*：你是否在大型考试中有过抄袭？

已知一次实际调查中，罐中放有红球 30 个，白球 20 个，调查结束后共收到 1583 张有效答卷，其中有 389 张回答“是”，如果以频率替代概率，问该校该年级学生有过抄袭的概率是(四舍五入精确到0.01)(　)

A. 0.06　　B. 0.07　　C. 0.08　　D. 0.09

4. 如图，已知$PA\perp$平面 *ABCD*，四边形 *ABCD* 是矩形，则互相垂直的表面共有(　)



A. 2 对　　B. 3 对　　C. 4 对　　D. 5 对

5. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，*E* 是棱 *BC* 的中点，*F* 在棱C_1D_1上，且$D_1F=3C_1F$，*O* 是正方形 *ABCD* 的中心，则异面直线A_1O与 *EF* 所成角的余弦值是(　)

A. $\frac{\sqrt{14}}{6}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{22}}{6}$

6. 若连续抛掷两次质地均匀的骰子，得到的点数分别为 m，n，则满足 $m^2+n^2<25$ 的概率是(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{13}{36}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{5}{12}$

7. 底面是等边三角形的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，且 $AA_1=AB=2$，O，O_1 分别为底面 ABC 与底面 $A_1B_1C_1$ 的中心，P 是 OO_1 上一动点，记 $V_{P-ABC}=V_1$，$V_{P-A_1B_1C_1}=V_2$，当 $V_1\cdot V_2$ 取得最大值时 $\frac{OP}{O_1P}=$(　)

A. 1　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

8. 在平面内，定点 A,B,C,D 满足 $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=-2$，动点 P，M 满足 $|\overrightarrow{AP}|=1$，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，则 $|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值是(　)

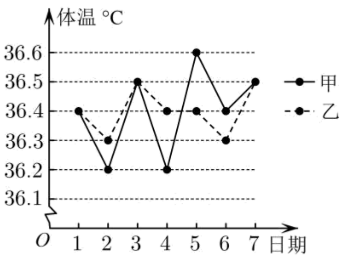
A. $\frac{43}{4}$　　B. $\frac{49}{4}$　　C. $\frac{47+6\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{37+2\sqrt{33}}{4}$

二、多选题：本题共 4 小题，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 在 10 名学生中，男生有 x 人．现从这 10 名学生中任选 6 人去参加某项活动，有下列事件：①至少有一个女生；②5 个男生，1 个女生；③3 个男生，3 个女生．若要使①为必然事件，②为不可能事件，③为随机事件，则 x 的值可能为(　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

10. 新冠肺炎疫情防控期间，进出小区　超市　学校等场所，我们都需要先进行体温检测.某班级体温检测员对一周内甲　乙两名同学的体温进行了统计，其结果如图所示，则下列结论正确的是(　)



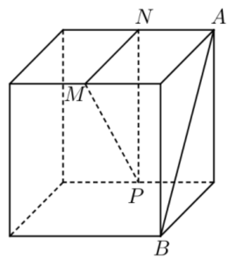
A. 甲同学体温的极差为 $0.4℃$

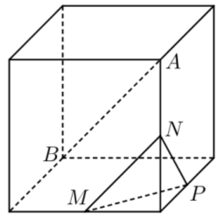
B. 乙同学体温的众数为 $36.4℃$，中位数与平均数不相等

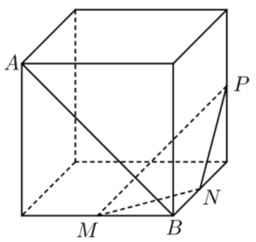
C. 乙同学的体温比甲同学的体温稳定

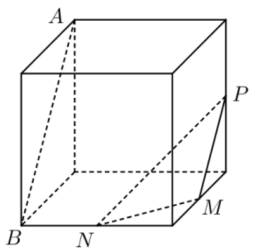
D. 甲同学体温的第 80 百分位数为 $36.5℃$

11. 有下列四个正方体，A，B 是正方体的两个顶点，M，N，P 分别为其所在棱的中点，其中能得出 $AB//$ 平面 MNP 的有(　)

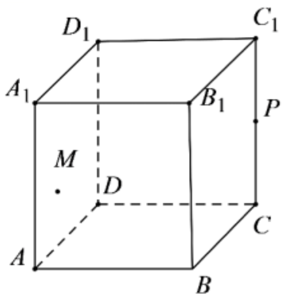
A. 

B. 

C. 

D. 

12. 如图，若正方体的棱长为 1，点 M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面 ADD_1A_1 上的一个动点(含边界)，点 P 是棱 CC_1 的中点，则下列结论正确的是(　)



A. 沿正方体的表面从点 A 到点 P 的最短路程为 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

B. 若保持 $|PM|=\sqrt{2}$，则点 M 在侧面内运动路径的长度为 $\dfrac{\pi}{3}$

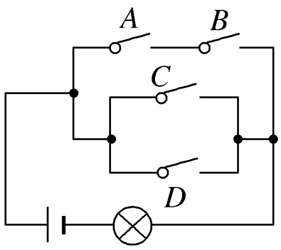
C. 三棱锥 $B-C_1MD$ 的体积最大值为 $\dfrac{1}{6}$

D. 若点 M 在平面 ADD_1A_1 内运动，且 $\angle MD_1B=\angle B_1D_1B$，点 M 的轨迹为线段

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 若直线 l 经过点 $(a-2,-1)$ 和 $(-a-2,1)$ 且与经过点 $(-2,1)$，斜率为 $-\dfrac{2}{3}$ 的直线垂直，则实数 a 的值为__________.

14. 如图，已知电路中 4 个开关闭合的概率都是$\frac{1}{2}$，且是互相独立的，则灯亮的概率为__________.



15. 已知任意平面向量$\overrightarrow{AB}=(x,y)$，把$\overrightarrow{AB}$绕其起点沿逆时针方向旋转$\theta$角得到向量$\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$，叫做把点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转θ角得到点P. 已知平面内点$A(-1,1)$，点$B\left(-1+\sqrt{3},0\right)$，把点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转$\frac{5\pi}{3}$得到点 P，则向量$\overrightarrow{AB}$在向量$\overrightarrow{AP}$上的投影向量为__________.（用坐标作答）

16. 某登山队在山脚 A 处测得山顶 B 处的仰角为45°，沿倾斜角为30°的斜坡前进 1000m 后到达 D 处，又测得山顶 B 处的仰角为75°，则山的高度$BC=$__________m.

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

已知向量$\overrightarrow{OA}=(3,-4)$，$\overrightarrow{OB}=(6,-3)$，$\overrightarrow{OC}=(5-m,-3-m)$.

(1) 若 A，B，C 三点共线，求实数 m 的值；

(2) 若$\angle ABC$为锐角，求实数 m 的取值范围.

18.（本小题 12 分）

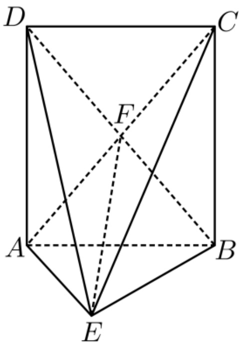
在$\triangle ABC$中，点$A(2,-1)$，AB 边上中线所在的直线方程为$x+3y-6=0$，$\angle ABC$的内角平分线所在的直线方程为$x-y+1=0$.

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 求$\triangle ABC$的边 BC 所在直线的方程.

19.（本小题 12 分）

在如图所示的几何体中，$AD\perp$ 平面 ABE，四边形 $ABCD$ 为正方形，$\triangle ABE$为等腰直角三角形，$AE=BE$.



(1) 求证：$BE \perp DE$;

(2) 若 AC 与 BD 交于点 F，求锐二面角 $A-EF-D$ 的余弦值.

20.（本小题 12 分）

已知 z 为虚数，$m=z+\frac{1}{z}$ 为实数，且 $-1<m<2$.

(1) 求 $|z|$ 及 z 的实部的取值范围.

(2) 设 $u=\frac{1-z}{1+z}$，那么 u 是不是纯虚数？请说明理由.

(3) 对于 (2) 中的 u，求 $m-u^2$ 的最小值.

21.（本小题 12 分）

在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，过点 $P(3,1)$ 作直线 l 分别与 x 轴正半轴、y 轴正半轴交于点 A，B.

(1) 求 $\triangle AOB$ 面积的最小值及此时直线 l 的方程；

(2) 求当 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值时直线 l 的方程.

22.（本小题 12 分）

甲、乙、丙三人进行摔跤比赛，比赛规则如下：①每场比赛有两人参加，另一人当裁判，没有平局；②每场比赛结束时，负的一方在下一场当裁判；③累计负两场者被淘汰；④当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人累计负两场被淘汰，另一人最终获得冠军，比赛结束．已知在每场比赛中，甲胜乙和甲胜丙的概率均为$\frac{2}{3}$，乙胜丙的概率为$\frac{1}{2}$，各局比赛的结果相互独立．经抽签，第一场比赛甲当裁判.

(1) 求前三场比赛结束后，丙被淘汰的概率；

(2) 求只需四场比赛就决出冠军的概率；

(3) 求甲最终获胜的概率.

答案和解析

1.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查了求直线的倾斜角问题，是一道基础题.

求出直线的斜率，从而求出直线的倾斜角即可.

【解答】

解：直线$\frac{x}{3}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1$，即$x+\sqrt{3}y=3$，

故直线的斜率是$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故倾斜角是：$\frac{5\pi}{6}$.

故选D.

2.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查了线面、面面平行的性质定理和判定定理，熟练的掌握定理是关键.

利用面面平行和线面垂直、线面平行的性质定理对四个选项分别分析解答.

【解答】

解：对于A，若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$或m，n异面或m，n相交，故A错误；

对于B，若$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则$m//n$，故B正确；

对于C，若$m//\alpha$，$m//\beta$，则α，β不一定平行，故C错误；

对于D，若$\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则$m//n$或异面，故D错误.

故选：B.

3.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查了古典概率的计算，先根据古典概型分别求出抽到红球的概率和抽到白球的概率，并且计算出回答问题A、B的人数，从而可分别计算出回答问题A、B的人中答“是”的人数以及比例.

【解答】

解：从袋子中随机抽一个球抽到红球的概率为$\frac{30}{30+20}=\frac{3}{5}$，

抽到白球的概率为$\frac{20}{30+20}=\frac{2}{5}$，所以回答问题 A 的人数是$1583\times\frac{2}{5}=633.2\approx633($人$)$

回答问题 B 的人数是$1583\times\frac{3}{5}=949.8\approx950($人$)$，

回答问题 A 的人中答“是”的人数是$633\times\frac{1}{2}=316.5\approx317$，

所以回答问题 B 的人中答“是”的人数是$389-317=72$，

所以估计该校该年级学生有过抄袭的比例为$\frac{72}{950}\approx0.075789\approx0.08.($四舍五入精确到$0.01)$.

故选C.

4.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查了线面垂直的判定和面面垂直的判定，属于基础题.

利用线面垂直的判定与面面垂直的判定寻找互相垂直的平面得出结论.

【解答】解：$\because PA\perp$平面 ABCD，$PA\subset$平面 PAB，$PA\subset$平面 PAD，

$\therefore$平面$PAB\perp$平面 ABCD，平面$PAD\perp$平面$ABCD$.

$\because AB\perp AD$，$PA\perp AB$，$AD\cap PA=A$，AD、$PA\subset$平面 PAD，

$\therefore AB\perp$平面 PAD，

又因为$AB\subset$平面 PAB，

$\therefore$平面$PAB\perp$平面PAD.

同理，平面$PCD\perp$平面 PAD，平面$PAB\perp$平面PBC.

综上，共有 5 对平面互相垂直.

故选D.

5.【答案】A

【解析】【分析】

先建立空间直角坐标系，然后标出对应点的坐标，然后结合空间向量数量积运算求解即可.

本题考查了空间向量的应用，重点考查了异面直线所成角的求法，属基础题.

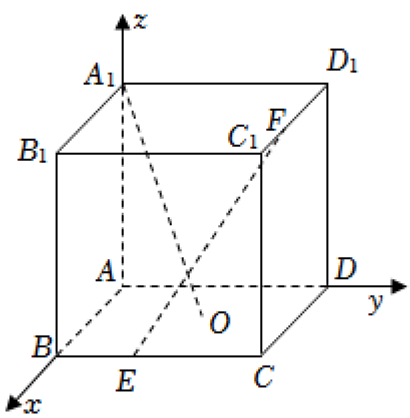
【解答】

解：建立如图所示的空间直角坐标系，

设$AB=4$，

则$E(4,2,0)$，$F(3,4,4)$，$A_1(0,0,4)$，

$O(2,2,0)$，



则 $\overrightarrow{OA_1}=(-2,-2,4)$， $\overrightarrow{EF}=(-1,2,4)$，

则异面直线 A_1O 与 EF 所成角的余弦值是

$|\frac{\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{OA_1}||\overrightarrow{EF}|}|=\frac{14}{2\sqrt{6}\times\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{14}}{6}$，

故选： A.

6.【答案】B

【解析】【分析】

本题主要考查的是古典概型及其概率计算公式，属于基础题.

先求得掷两次骰子得到的点数所包含的基本事件的总数，再列举出满足 $m^2+n^2<25$ 的情况所包含的基本事件的个数，结合古典概型的概率计算公式，即可求解.

【解答】

解：由题意，连续掷两次骰子分别得到的点数为 m，n，共可得到 $6\times6=36$ 种情形，

其中满足 $m^2+n^2<25$ 的情况有 $(1,1)$， $(1,2)$， $(1,3)$， $(1,4)$， $(2,1)$， $(2,2)$， $(2,3)$， $(2,4)$， $(3,1)$， $(3,2)$， $(3,3)$， $(4,1)$， $(4,2)$ 共 13 种，

故满足 $m^2+n^2<25$ 的概率为 $\frac{13}{36}$.

故选 B.

7.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查棱锥的体积公式，考查利用基本不等式求最值.

由题意得到 $2\sqrt{V_1\cdot V_2}\leqslant V_1+V_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，得 $V_1\cdot V_2\leqslant\frac{1}{3}$，得到点 P 为 OO_1 的中点时 $V_1\cdot V_2$ 取得最大值，可得 $\frac{OP}{O_1P}=1$，可得答案.

【解答】

解：$\because$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，且棱长均为 2，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin60^\circ=\sqrt{3}$，

且 $OO_1=2$，

$\therefore V_1+V_2=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OP+\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot O_1P$

$=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot(OP+O_1P)=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

由 $2\sqrt{V_1 \cdot V_2} \leqslant V_1 + V_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，得 $V_1 \cdot V_2 \leqslant \frac{1}{3}$，

当且仅当 $V_1 = V_2$ 即点 P 为 OO_1 的中点时等号成立，

即点 P 为 OO_1 的中点时 $V_1 \cdot V_2$ 取得最大值 $\frac{1}{3}$，

此时 $\frac{OP}{O_1P} = 1$，

故本题选 A.

8.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查向量的定义和性质，以及模的最值的求法，注意运用坐标法，转化为三角函数的最值的求法，考查化简整理的运算能力，属于较难题.

得到 $\triangle ABC$ 为正三角形．运用向量的数量积定义可得 $\triangle ABC$ 的边长，建立直角坐标系 xOy， 表示出 $\left|\overrightarrow{BM}\right|$ 的长，运用三角函数的恒等变换公式，结合正弦函数的值域，即可得到最大值.

【解答】

解：由 $|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}|$，可得 D 为 $\triangle ABC$ 的外心，

又 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$，

可得 $\overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) = 0$，$\overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = 0$，

即 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$，

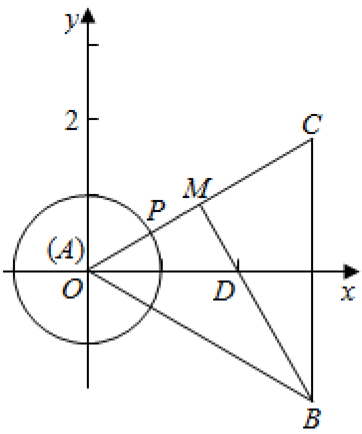
即有 $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$，可得 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心，

则 D 为 $\triangle ABC$ 的中心，即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

由 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = -2$，即有 $|\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DA}| \cos 120^\circ = -2$，

解得 $|\overrightarrow{DA}| = 2$，$\triangle ABC$ 的边长为 $\frac{3}{\cos 30^\circ} = 2\sqrt{3}$，

以 A 为坐标原点，AD 所在直线为 x 轴建立直角坐标系 xOy，



可得$B(3,-\sqrt{3})$，$C(3,\sqrt{3})$，$D(2,0)$，

由$|\overrightarrow{AP}|=1$，可设$P(\cos\theta,\sin\theta)$，$(0\leqslant\theta<2\pi)$，

由$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，可得 M 为 PC 的中点，即有$M(\dfrac{3+\cos\theta}{2},\dfrac{\sqrt{3}+\sin\theta}{2})$，

则$|\overrightarrow{BM}|^2=(3-\dfrac{3+\cos\theta}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{3}+\sin\theta}{2}+\sqrt{3})^2$

$=\dfrac{(3-\cos\theta)^2}{4}+\dfrac{(3\sqrt{3}+\sin\theta)^2}{4}=\dfrac{37-6\cos\theta+6\sqrt{3}\sin\theta}{4}$

$=\dfrac{37+12\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})}{4}$，

当$\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})=1$，即$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$时，$|\overrightarrow{BM}|^2$取得最大值，且为$\dfrac{49}{4}$.

故选：B.

9.【答案】BC

【解析】【分析】

本题考查了事件的应用，属于基础题.

利用必然事件、不可能事件、随机事件的概念求解.

【解答】

解：若②为不可能事件，则男生人数少于 5，则同时可保证①为必然事件;

若③为随机事件，则男生人数不少于3;

$\therefore x=3$或$x=4$，

故选BC.

10.【答案】ACD