甘肃省张掖市某校2024届高三下学期模拟考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$P=\{0,1,2,4\},Q=\{x|\ a<x<a+3,a\in\mathbf{Z}\}$，若$P\cap Q$中恰有两个元素，则$a$的取值集合为（　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{-1,0\}$　　D．$\{-1,0,1\}$

2．命题“存在一个无理数，它的平方是有理数”的否定是

A．任意一个有理数，它的平方是有理数　B．任意一个无理数，它的平方不是有理数

C．存在一个有理数，它的平方是有理数　D．存在一个无理数，它的平方不是有理数

3．已知正项等差数列$\{a_n\}$满足$a_1a_2=3,a_2a_3=15$，则$a_4a_5=$（　）

A．39　　B．63　　C．75　　D．99

4．牛顿冷却定律描述物体在常温环境下的温度变化：如果物体的初始温度为T_0，则经过一定时间t分钟后的温度T满足$T-T_a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}\left(T_0-T_a\right)$，$h$称为半衰期，其中$T_a$是环境温度．若$T_a=25$℃，现有一杯80℃的热水降至75℃大约用时1分钟，那么水温从75℃降至45℃大约还需要（　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 11\approx 1.04$）

A．8分钟　　B．9分钟　　C．10分钟　　D．11分钟

5．已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F,M（不同于原点）是直线$y=x$与C的一个公共点.若$|MF|=10$，则C的准线方程为（　）

A．$x=-3$　　B．$x=-2$

C．$x=-1$　　D．$x=-\frac{1}{3}$

6．已知a，b是不同的直线，α,β是不同的平面，且$a\perp\alpha,b\perp\beta$，则“$a\parallel b$”是“$\alpha//\beta$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分又不必要

7．已知$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right),\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=1$，则$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$（　）

A．-2　　　　B．$-\frac{1}{2}$　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．2

8．已知圆柱的母线长与底面的半径之比为$\sqrt{3}:1$，四边形$ABCD$为其轴截面，若点E为上底面圆弧$\overset{\frown}{AB}$的靠近B点的三等分点，则异面直线DE与AB所成角的余弦值为（　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　　　D．$\frac{\sqrt{10}}{4}$

9．将函数$f\left(x\right)=\sin 2x$的图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位后，得到函数$g\left(x\right)$的图像，设A,B,C为以上两个函数图像不共线的三个交点，则$\triangle ABC$的面积不可能为（　）

A．$2\sqrt{2}\pi$　　　　B．$\sqrt{2}\pi$　　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$　　　　D．$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

10．已知函数$f(x-1)(x\in \mathrm{R})$是偶函数，且函数$f(x)$的图像关于点$(1,0)$对称，当$x\in[-1,1]$时，$f(x)=ax-1$，则$f(2022)=$（　）

A．-1　　　　B．-2　　　　C．0　　　　D．2

11．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为$2c(b>c),P$是$C$上的任意一点，过点$P$作两条直线与圆$x^2+y^2=c^2$相切，切点分别为$A,B$.若当$\angle APB$最大时，$|AB|=c$，则$C$的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{21}}{7}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　D．$\frac{\sqrt{7}}{7}$

12．已知实数x,y满足$\mathrm{e}\left(x+\mathrm{e}^x\right)=2\left(1+y\right)\mathrm{e}^y=2\mathrm{e}$，则$x+y=$（　）

A．1　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．$\frac{1}{\mathrm{e}}$　　　　D．$\frac{1}{3}$

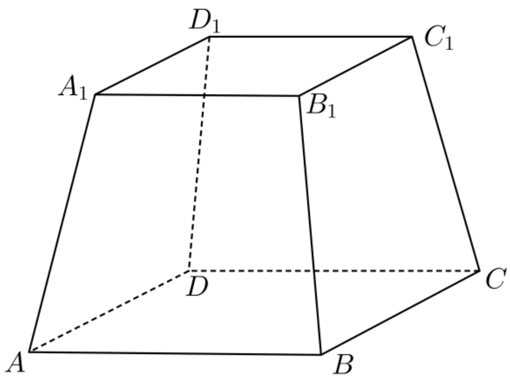
二、填空题

13．已知向量$\vec{a}=\left(3,-\lambda\right),\vec{b}=\left(\lambda-1,-2\right)$，且$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|-\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|$，则实数$\lambda=$_________.

14．某外商计划在4个候选城市中投资3个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过2个，则该外商不同的投资方案有___种．

15．对给定的实数b，总存在两个实数a，使直线$y=ax-b$与曲线$y=\ln\left(x-b\right)$相切，则b的取值范围为_____.

16．如图，在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2A_1B_1$，且存在一个半径为r的球，与该正四棱台的各个面均相切．设该正四棱台的外接球半径为R，则$\frac{R}{r}=$________.



三、解答题

17．已知数列$\{an\}$对任意的$n\in N^*$都满足$\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots+\frac{a_n}{3^n}=n$．

(1)求数列$\{an\}$的通项公式；

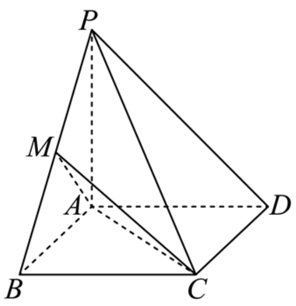
(2)令$bn=\frac{1}{\log_3 a_{4n-1}\log_3 a_{4n+3}}$，求数列$\{bn\}$的前$n$项和为$Tn$.

18．在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，$2b\sin^2\frac{A}{2}+a\cos B=c$．

(1)求A；

(2)D为线段BC上一点，AD平分$\angle BAC$，若$AD=2$，求a的最小值.

19．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，平面$PCD\perp$平面PAD，



(1)证明：平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

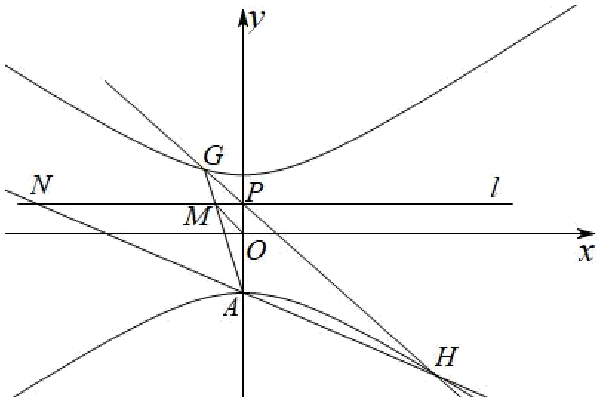
(2)若$PA\perp AD,M$是PB的中点，平面MAC与平面PCD所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，求直线PC与平面PAB所成角的余弦值.

20．自2017年起，上海市开展中小河道综合整治，全面推进“人水相依，延续风貌，丰富设施，精彩活动”的整治目标．某科学研究所针对河道整治问题研发了一种生物复合剂．这种生物复合剂入水后每1个单位的活性随时间x（单位：小时）变化的函数为$u=\begin{cases}-\frac{256}{x+4}-x+64, & 0\le x<4\\ a(12-x), & 4\le x\le 12\end{cases}$，已知当$x=4$时，$u$的值为28，且只有在活性不低于3.5时才能产生有效作用．

(1)试计算每 1 个单位生物复合剂入水后产生有效作用的时间；（结果精确到 0.1 小时）

(2)由于环境影响，每 1 个单位生物复合剂入水后会产生损耗，设损耗剩余量 v 关于时间 x 的函数为 $v=\dfrac{1}{x+1},0\le x\le 12$，记 $u\cdot v$ 为每 1 个单位生物复合剂的实际活性，求出 $u\cdot v$ 的最大值.（结果精确到 0.1）

21．在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，实轴长为 4.



(1)求 C 的方程；

(2)如图，点 A 为双曲线的下顶点，直线 l 过点 $P\left(0,t\right)$ 且垂直于 y 轴（P 位于原点与上顶点之间），过 P 的直线交 C 于 G，H 两点，直线 AG，AH 分别与 l 交于 M，N 两点，若 O，A，N，M 四点共圆，求点 P 的坐标.

22．已知函数 $f\left(x\right)=x\left(ax+\ln x-2\right),g\left(x\right)=x\ln x-x-a$，

(1)若 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 有相同的单调区间，求实数 a 的值；

(2)若方程 $f\left(x\right)=3g\left(x\right)+x+3a-1$ 有两个不同的实根 x_1,x_2，证明：$x_1x_2>\mathrm{e}^a$.

参考答案：

1．C

【分析】

分 $a=-1$，$a=0$，$a=1$，$a=2$ 分别说明即可.

【详解】因为 $a\in\mathbf{Z}$，所以当 $a=-1$ 时，$P\cap Q=\{0,1\}$，符合题意，

当 $a=0$ 时，$P\cap Q=\{1,2\}$，符合题意，

当 $a=1$ 时，$P\cap Q=\{2\}$，不符合题意，

当 $a=2$ 时，$P\cap Q=\{4\}$，不符合题意，

故 a 的取值集合为 $\{-1,0\}$.

故选：C.

2．B

【详解】试题分析：由命题的否定的定义知，“存在一个无理数，它的平方是有理数”的否定是任意一个无理数，它的平方不是有理数.

考点：命题的否定.

3．B

【分析】

利用等差数列的通项公式列方程组求解.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 $\begin{cases}a_1a_2=3\\a_2a_3=15\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a_1\left(a_1+d\right)=3\\\left(a_1+d\right)\left(a_1+2d\right)=15\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-1\\d=-2\end{cases}$（舍去），

所以 $a_4a_5=\left(1+3\times2\right)\times\left(1+4\times2\right)=63$.

故选：B.

4．C

【分析】由题意可得 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{h}}=\frac{10}{11}$，代入 $45-25=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{h}}(75-25)$，得 $\left(\frac{10}{11}\right)^t=\frac{2}{5}$，两边取常用对数得：

$t\lg\frac{10}{11}=\lg\frac{2}{5}$，再利用对数的运算性质即可求出$t$的值．

【详解】解：根据题意得：$75-25=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{h}}(80-25)$，

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{h}}=\frac{10}{11}$，

$\therefore 45-25=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{h}}\left(75-25\right)$，

$\therefore 20=50\times\left[(\frac{1}{2})^{\frac{1}{h}}\right]^{t}$，

$\therefore \left(\frac{10}{11}\right)^{t}=\frac{2}{5}$，

两边取常用对数得：$t\lg\frac{10}{11}=\lg\frac{2}{5}$，

$\therefore t=\dfrac{\lg\frac{2}{5}}{\lg\frac{10}{11}}=\frac{\lg 2-\lg 5}{1-\lg 11}=\frac{2\lg 2-1}{1-\lg 11}\approx\frac{2\times 0.3-1}{1-1.04}=10$，

∴水温从 75℃降至 45℃大约还需要 10 分钟，

故选：C．

5．B

【分析】

联立直线与抛物线方程求得点M的坐标，然后根据焦半径公式求得，从而求出抛物线方程，直接求出准线方程即可.

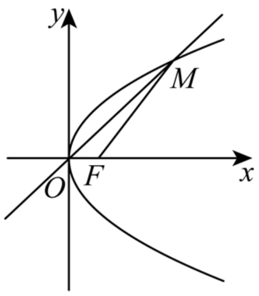
【详解】

联立$\begin{cases}y=x\\y^2=2px\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2p\\y=2p\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$（舍去），所以$M\left(2p,2p\right)$.

因为$|MF|=10$，所以$2p+\frac{p}{2}=10$，解得$p=4$，

所以C的方程为$y^2=8x$，准线方程为$x=-2$.

故选：B



6．C

【分析】根据线面、面面的垂直、平行关系和充分必要条件的定义即可判断.

【详解】解：充分性：若$a\perp\alpha, a\parallel b$，则$b\perp\alpha$，又$b\perp\beta$，所以$\alpha\parallel\beta$，所以“$a\parallel b$”是“$\alpha\parallel\beta$”的充分条件；

必要性：若$\alpha\parallel\beta, a\perp\alpha$，则$a\perp\beta$，又$b\perp\beta$，所以$a\parallel b$，所以“$a\parallel b$”是“$\alpha\parallel\beta$”的必要条件，

所以“$a\parallel b$”是“$\alpha\parallel\beta$”的充要条件，

故选：C.

7．A

【分析】

利用三角函数的倍角公式，结合正切函数的和差公式，逆用正余弦的和差公式即可得解.

【详解】因为$\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=1$，

所以$-2\cos 2\alpha=1-\sin 2\alpha$，则$-2\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)=\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)^2$，

因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以$\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0, \cos\alpha+\sin\alpha\neq 0$，

则$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=-2$.

故选：A.

8．A

【分析】设圆柱的底面圆的半径为r，由$AB\parallel CD$，可得$\angle CDE$即为异面直线DE与AB所成角的平面角，求出CE, DE，再利用余弦定理即可得解.

【详解】解：设圆柱的底面圆的半径为r，则$AD=BC=\sqrt{3}r$,

因为$AB\parallel CD$,

所以$\angle CDE$即为异面直线DE与AB所成角的平面角，

因为点E为上底面圆弧$\overset{\frown}{AB}$的靠近B点的三等分点，

所以$\angle BOE=\frac{\pi}{3}$，故$\triangle OBE$为等边三角形，

所以$BE=r$，

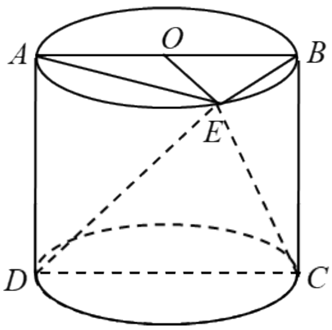
故$AE=\sqrt{3}r$，

则$CE=2r$，$DE=\sqrt{6}r$，

所以$\cos\angle EDC=\frac{\left(\sqrt{6}r\right)^2+\left(2r\right)^2-\left(2r\right)^2}{2\times\sqrt{6}r\times 2r}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

即异面直线DE与AB所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

故选：A.

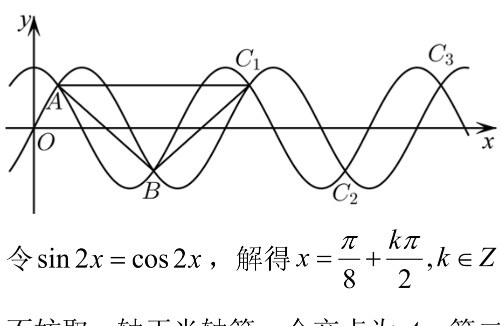


9．D

【分析】先求得$g(x)$的解析式，在同一坐标系内作出$f(x)$、$g(x)$图像，不妨取x轴正半轴第一个交点为A，第二个交点为B，分别求得当C位于不同位置时，$\triangle ABC$的面积，根据规律，分析即可得答案.

【详解】由题意得$g\left(x\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$，

在同一坐标系内作出$f(x)$、$g(x)$图像，如下图所示



令$\sin 2x=\cos 2x$，解得$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，

不妨取x轴正半轴第一个交点为A，第二个交点为B，

所以$A\left(\frac{\pi}{8},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B\left(\frac{5\pi}{8},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

若 C 点位于 $C_1\left(\dfrac{9\pi}{8},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{9\pi}{8}-\dfrac{\pi}{8}\right)\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$，故 C 正确

当 C 点位于 $C_2\left(\dfrac{13\pi}{8},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{13\pi}{8}-\dfrac{5\pi}{8}\right)\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$，

当 C 点位于 $C_3\left(\dfrac{17\pi}{8},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{17\pi}{8}-\dfrac{\pi}{8}\right)\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$，故 B 正确，

因为 $|AC_3|=2|AC_1|$，此时 $\triangle ABC_3$ 为 $\triangle ABC_1$ 面积的 2 倍，

以此类推，当 C 位于不同位置时，$\triangle ABC$ 的面积应为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$ 的整数倍，故 A 正确，D 错误，

故选：D

10．A

【分析】先由题给条件求得函数 $f(x)$ 的最小正周期为 8，再利用周期、对称轴的性质即可求得 $f(2022)$ 的值.

【详解】根据题意，函数 $f(x-1)(x\in\mathrm{R})$ 是偶函数，则函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-1$，

则有 $f(x)=f(-2-x)$，又由函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 成中心对称，

则 $f(x)=-f(2-x)$，则有 $f(-2-x)=-f(2-x)$，则 $f(x+4)=-f(x)$，

则有 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数，

则 $f(2022)=f(-2+253\times 8)=f(-2)=f(0)=-1$

故选：A.

11．A

【分析】

根据切线性质可得垂直关系，进而根据锐角三角函数得 $\sin\angle APO=\dfrac{c}{|OP|}$，即可求解 P 为短轴端点时，$|OP|$ 最小，根据三角形边角关系即可求解 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{c}{b}$，进而根据齐次式即可求解离心率.

【详解】设坐标原点为 O，由题意知 $OA\perp PA$，$OB\perp PB$，故 $\sin\angle APO=\dfrac{|OA|}{|OP|}=\dfrac{c}{|OP|}$.

因为 $\angle APB=2\angle APO$，当 $\angle APB$ 最大时，$\angle APO$ 最大，

即 $\sin\angle APO$ 最大，故只需 $|OP|$ 最小，

当 P 为短轴端点时，$|OP|$ 最小，此时 $|AB|=|OA|=|OB|=c$，$\angle AOP=\dfrac{\pi}{6}$，