专题 05 分类打靶函数应用与函数模型

目 录

题型 01 二次函数与幂模型

1．（2023·河北·校联考模拟预测）劳动实践是大学生学习知识、锻炼才干的有效途径，更是大学生服务社会、回报社会的一种良好形式某大学生去一服装厂参加劳动实践，了解到当该服装厂生产的一种衣服日产量为 x 件时，售价为 s 元/件，且满足 $s=820-2x$，每天的成本合计为 $600+20x$ 元，请你帮他计算日产量为__________件时，获得的日利润最大，最大利润为__________万元.

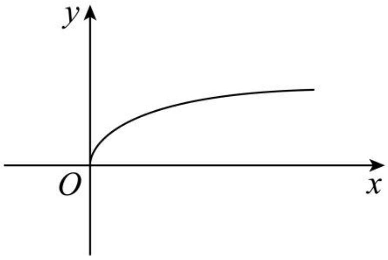
【答案】　200　　7.94

【解析】由题意易得日利润 $y=s\times x-(600+20x)=x(820-2x)-(600+20x)=-2(x-200)^2+79400$，

故当日产量为 200 件时，获得的日利润最大，最大利润为 7.94 万元，

故答案为：200，7.94.

2.（2023·北京海淀·高三校考阶段练习）科学家在研究物体的热辐射能力时定义了一个理想模型叫“黑体”，即一种能完全吸收照在其表面的电磁波（光）的物体．然后，黑体根据其本身特性再向周边辐射电磁波，科学研究发现单位面积的黑体向空间辐射的电磁波的功率B与该黑体的绝对温度T的4次方成正比，即$B=\sigma T^4$，σ为玻尔兹曼常数．而我们在做实验数据处理的过程中，往往不用基础变量作为横纵坐标，以本实验结果为例，B为纵坐标，以T^4为横坐标，则能够近似得到______（曲线形状），那么如果继续研究该实验，若实验结果的曲线如图所示，试写出其可能的横纵坐标的变量形式______．



【答案】　射线　B为纵坐标，以T^8为横坐标.

【解析】(1) 因为$B=\sigma T^4$，σ为玻尔兹曼常数．B为纵坐标，以T^4为横坐标，因为$x=T^4\geq 0$，所以$B=\sigma x(x\geq 0)$，所以曲线是一条射线；

(2) 由于曲线的形状类似$y=\sqrt{x}$，根据曲线可知可能的横纵坐标的变量形式：B为纵坐标，以T^8为横坐标，

故答案为：B为纵坐标，以T^8为横坐标.

故答案为：(1) 射线；(2) B为纵坐标，以T^8为横坐标.

3.（2015•北京）某辆汽车每次加油都把油箱加满，下表记录了该车相邻两次加油时的情况

加油时间	加油量（升）	加油时的累计里程（千米）
2015年5月1日	12	35000
2015年5月15日	48	35600

注：“累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程，在这段时间内，该车每100千米平均耗油量为(　　)

A．6升　　B．8升　　C．10升　　D．12升

【答案】B

【解析】由表格得到从5月1日到15日，该车加了48升的汽油，这段时间行驶的路程为35600千米-35000千米$=600$千米，所以该车每100千米平均耗油量$48\div 6=8$（升）.

故选：B.

4.（2023·河南平顶山·高三校联考阶段练习）折纸是我国民间的一种传统手工艺术，明德小学在课后延时服务中聘请了民间艺术传人给同学们教授折纸．课堂上，老师给每位同学发了一张长为12cm，宽为10cm

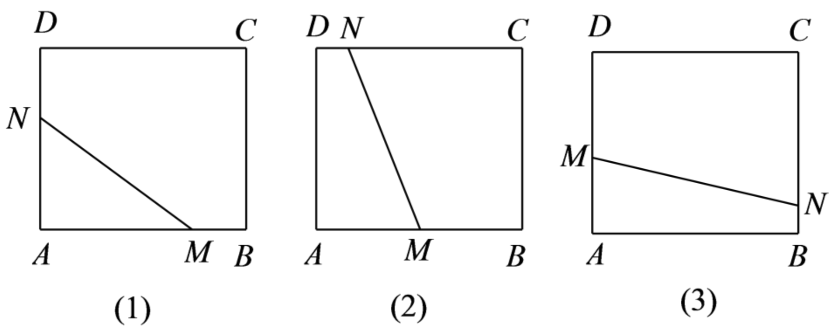
的矩形纸片，要求大家将纸片沿一条直线折叠．若折痕（线段）将纸片分为面积比为 1：3 的两部分，则折痕长度的取值范围是______cm．

【答案】$[10,13]$

【解析】由题意得长方形纸片的面积为$12\times10=120\left(\text{cm}^2\right)$，不妨设折痕将纸片分成两部分的面积分别为$S_1$，$S_2$，且$S_1:S_2=1:3$，则$S_1=30\text{cm}^2$，$S_2=90\text{cm}^2$．

如图，其中$AB=12\text{cm}, AN=10\text{cm}$，

当折痕MN为图（1）所示的三角形一边时，



设$AM=x\text{cm}$，$AN=y\text{cm}$，则$\begin{cases}\dfrac{1}{2}xy=30\\0<x\le12\\0<y\le10\end{cases}$，解得$\begin{cases}xy=60\\6\le x\le12\end{cases}$，

则$MN^2=x^2+y^2=x^2+\dfrac{3600}{x^2}$，

令$t=x^2$，$t\in[36,144]$，则$f(t)=t+\dfrac{3600}{t}$，$f'(t)=1-\dfrac{3600}{t^2}=\dfrac{t^2-3600}{t^2}$，

当$t\in(36,60)$时，$f'(t)<0$，当$t\in(60,144)$时，$f'(t)>0$，

故$f(t)$在$[36,60]$上单调递减，在$[60,144]$上单调递增，

又$f(36)=136$，$f(60)=120$，$f(144)=169$，故$f(t)\in[120,169]$，

故$MN\in\left[2\sqrt{30},13\right]$．

当折痕MN为图（2）所示的梯形一边时，

设 $AM=x\text{cm}$， $DN=y\text{cm}$， 则 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)\times 10=30\\ 0<x\le 12\\ 0<y\le 12\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}x+y=6\\ 0<x<6\end{cases}$，

则 $MN^2=(x-y)^2+100=(2x-6)^2+100$， $0<x<6$，

根据二次函数的性质可知， $MN^2\in[100,136)$， 则 $MN\in\left[10,2\sqrt{34}\right)$.

当折痕 MN 为图（3）所示的梯形一边时，

设 $AM=x\text{cm}$， $BN=y\text{cm}$， 则 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)\times 12=30\\ 0<x\le 10\\ 0<y\le 10\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}x+y=5\\ 0<x<5\end{cases}$，

则 $MN^2=(x-y)^2+144=(2x-5)^2+144$， $0<x<5$，

根据二次函数的性质可知， $MN^2\in[144,169)$， 则 $MN\in[12,13)$.

综上所述，折痕长度的取值范围为 $[10,13]$.

故答案为： $[10,13]$

5.（2023・全国・高三专题练习）某单位计划建一矩形场地，现有总长度为 100 m 的可作为围墙的材料，则场地的面积 S(单位：m^2)与场地的长 x(单位：m)的函数关系式为____________.

【答案】 $S=x(50-x)(0<x<50)$

【解析】由于场地的长为 xm， 则宽为 $(50-x)$m， 由题意得 $S=x(50-x)$． 易知 $x>0$， $50-x>0$，所以自变量 x 的取值范围为 $0<x<50$． 故所求函数的关系式为 $S=x(50-x)(0<x<50)$.

故答案为： $S=x(50-x)(0<x<50)$

题型 02 分段函数模型

6.（2017•上海）根据预测，某地第 $n(n\in N^*)$ 个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n （单位：辆），其中 $a_n=\begin{cases}5n^4+15,1\quad n\quad 3\\ -10n+470,n\quad 4\end{cases}$， $b_n=n+5$，第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差.

（1）求该地区第 4 个月底的共享单车的保有量；

（2）已知该地共享单车停放点第 n 个月底的单车容纳量 $S_n=-4(n-46)^2+8800$（单位：辆）．设在某月底，共享单车保有量达到最大，问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量？

【解析】（1）$\because a_n=\begin{cases}5n^4+15,1\le n\le 3\\-10n+470,n\ge 4\end{cases}$，$b_n=n+5$

$\therefore a_1=5\times 1^4+15=20$

$a_2=5\times 2^4+15=95$

$a_3=5\times 3^4+15=420$

$a_4=-10\times 4+470=430$

$b_1=1+5=6$

$b_2=2+5=7$

$b_3=3+5=8$

$b_4=4+5=9$

$\therefore$ 前 4 个月共投放单车为 $a_1+a_2+a_3+a_4=20+95+420+430=965$，

前 4 个月共损失单车为 $b_1+b_2+b_3+b_4=6+7+8+9=30$，

$\therefore$ 该地区第 4 个月底的共享单车的保有量为 $965-30=935$．

（2）令 $a_n\ge b_n$，显然 $n\le 3$ 时恒成立，

当 $n\ge 4$ 时，有 $-10n+470\ge n+5$，解得 $n\le\dfrac{465}{11}$，

$\therefore$ 第 42 个月底，保有量达到最大．

当 $n\ge 4$，$\{a_n\}$ 为公差为 -10 等差数列，而 $\{b_n\}$ 为等差为 1 的等差数列，

$\therefore$ 到第 42 个月底，单车保有量为 $\dfrac{a_4+a_{42}}{2}\times 39+535-\dfrac{b_1+b_{42}}{2}\times 42=\dfrac{430+50}{2}\times 39+535-\dfrac{6+47}{2}\times 42=8782$．

$S_{42}=-4\times 16+8800=8736$．

$\because 8782>8736$，

$\therefore$ 第 42 个月底单车保有量超过了容纳量．

7.（2018•上海）某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时．某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤．分析显示：当 S 中 $x\%(0<x<100)$ 的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x)=\begin{cases}30,0<x\ \ 30\\2x+\dfrac{1800}{x}-90,30<x<100\end{cases}$$（单位：分钟），而公交群体的人均通勤时间不受x影响，恒为40分钟，试根据上述分析结果回答下列问题：

（1）当x在什么范围内时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间？

（2）求该地上班族S的人均通勤时间$g(x)$的表达式；讨论$g(x)$的单调性，并说明其实际意义．

【解析】解；（1）由题意知，当$30<x<100$时，

$f(x)=2x+\dfrac{1800}{x}-90>40$，

即$x^2-65x+900>0$，

解得$x<20$或$x>45$，

$\therefore x\in(45,100)$时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间；

（2）当$0<x\ \ 30$时，

$g(x)=30\cdot x\%+40(1-x\%)=40-\dfrac{x}{10}$；

当$30<x<100$时，

$g(x)=(2x+\dfrac{1800}{x}-90)\cdot x\%+40(1-x\%)=\dfrac{x^2}{50}-\dfrac{13}{10}x+58$；

$\therefore g(x)=\begin{cases}40-\dfrac{x}{10}\\\dfrac{x^2}{50}-\dfrac{13}{10}x+58\end{cases}$；

当$0<x<32.5$时，$g(x)$单调递减；

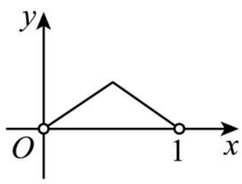
当$32.5<x<100$时，$g(x)$单调递增；

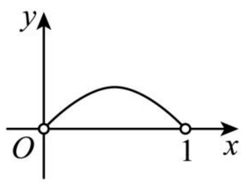
说明该地上班族S中有小于32.5%的人自驾时，人均通勤时间是递减的；

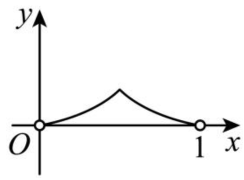
有大于32.5%的人自驾时，人均通勤时间是递增的；

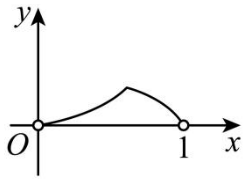
当自驾人数所占比为32.5%时，人均通勤时间最少．

8．（2023·江苏苏州·高三统考期末）已知正四面体$ABCD$的棱长为1，P为棱AB上的动点（端点A、B除外），过点P作平面α垂直于AB，α与正四面体的表面相交．记$AP=x$，将交线围成的图形面积S表示为x的函数$f\left(x\right)$，则$S=f\left(x\right)$的图象大致为（　　）

A．

B．

C. 

D. 

【答案】C

【解析】取线段 AB 的中点 O，连接 OC 、 OD，

因为 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 为等边三角形， O 为 AB 的中点，则 $OC\perp AB$， $OD\perp AB$，

$\because OC\cap OD=O$， OC 、 $OD\subset$平面 OCD， $\therefore AB\perp$平面 OCD，

因为 $AB\perp$平面 α，所以，平面 α 与平面 OCD 平行或重合，

且 $OD=OC=\sqrt{AC^2-OA^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

取 CD 的中点 M， 连接 OM， 则 $OM\perp CD$，

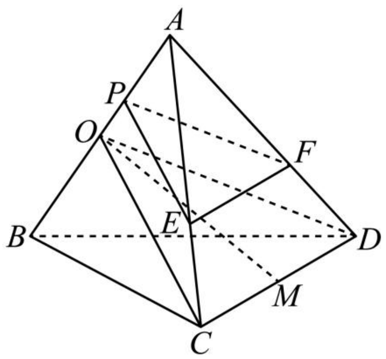
且 $OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 故 $S_{\triangle OCD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot OM=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

①当 $0<x<\dfrac{1}{2}$时， 平面 $\alpha //$平面 OCD， 平面 $\alpha\cap$平面 $ABC=PE$，

平面 $OCD\cap$平面 $ABC=OC$， $\therefore PE//OC$， 同理可知， $PF//OD$， $EF//CD$，

所以， $\dfrac{PE}{OC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{PF}{OD}$， 故 $\triangle PEF\backsim\triangle OCD$，

如下图所示：



则 $\dfrac{S}{S_{\triangle OCD}}=\left(\dfrac{AP}{AO}\right)^2=4x^2$， 则 $S=f(x)=\sqrt{2}x^2$；

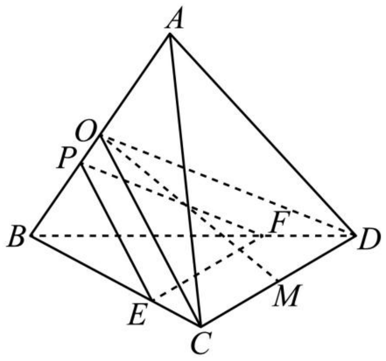
②当 $x=\dfrac{1}{2}$时， $S=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

③当 $\dfrac{1}{2}<x<1$时， 平面 $\alpha //$平面 OCD， 平面 $\alpha\cap$平面 $ABC=PE$，

平面 $OCD\cap$平面 $ABC=OC$， $\therefore PE//OC$， 同理可知， $PF//OD$， $EF//CD$，

所以，$\frac{PE}{OC}=\frac{BE}{BC}=\frac{EF}{CD}=\frac{BF}{BD}=\frac{PF}{OD}$，故$\triangle PEF\backsim\triangle OCD$，

如下图所示：

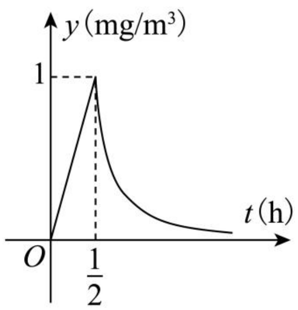


则$\frac{S}{S_{\triangle OCD}}=\left(\frac{BP}{BO}\right)^2=4\left(1-x\right)^2$，则$S=f\left(x\right)=\sqrt{2}\left(1-x\right)^2$.

综上所述，$S=f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{2}x^2,0<x\le\frac{1}{2}\\ \sqrt{2}\left(x-1\right)^2,\frac{1}{2}<x<1\end{cases}$，故函数$f\left(x\right)$的图象如C选项中的图象.

故选：C.

9.（2023·重庆南岸·高三重庆市第十一中学校校考阶段练习）为了抗击新型冠状病毒肺炎保障师生安全，我校决定每天对教室进行消毒工作，已知药物释放过程中，室内空气中的含药量y（mg/m^3）与时间t（h）成正比（$0<t<\frac{1}{2}$）；药物释放完毕后，y与t的函数关系式为$y=(\frac{1}{4})^{t-a}$（a为常数，$t\ge\frac{1}{2}$），据测定，当空气中每立方米的含药量降低到0.5（mg/m^3）以下时，学生方可进教室，则学校应安排工作人员至少提前分钟进行消毒工作



A．30　　B．40　　C．60　　D．90

【答案】C

【解析】计算函数解析式，取$f\left(t\right)=(\frac{1}{4})^{t-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，计算得到答案.根据图像：函数过点$\left(\frac{1}{2},1\right)$，故

$$y=f(t)=\begin{cases}2x,0<t<\dfrac{1}{2}\\(\dfrac{1}{4})^{t-\frac{1}{2}},t\geq\dfrac{1}{2}\end{cases},$$

当 $t\geq\frac{1}{2}$ 时，取 $f(t)=(\frac{1}{4})^{t-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，解得 $t=1$ 小时 $=60$ 分钟.

故选：C.

10.（2023·广东深圳·高三统考期末）某科技企业为抓住“一带一路”带来的发展机遇，开发生产一智能产品，该产品每年的固定成本是25万元，每生产 x 万件该产品，需另投入成本 $\omega(x)$ 万元.其中 $\omega(x)=\begin{cases}x^2+10x,0<x\leq 40\\71x+\dfrac{10000}{x}-945,x>40\end{cases}$，若该公司一年内生产该产品全部售完，每件的售价为70元，则该企业每年利润的最大值为（　）

A．720万元　　B．800万元

C．875万元　　D．900万元

【答案】C

【解析】该企业每年利润为 $f(x)=\begin{cases}70x-\left(x^2+10x+25\right),0<x\leq 40\\70x-\left(71x+\dfrac{10000}{x}-945+25\right),x>40\end{cases}$

当 $0<x\leq 40$ 时，$f(x)=-x^2+60x-25=-(x-30)^2+875$

在 $x=30$ 时，$f(x)$ 取得最大值 875；

当 $x>40$ 时，$f(x)=920-\left(x+\dfrac{10000}{x}\right)\leq 920-2\sqrt{x\cdot\dfrac{10000}{x}}=720$

（当且仅当 $x=100$ 时等号成立），即在 $x=100$ 时，$f(x)$ 取得最大值 720；

由 $875>720$，可得该企业每年利润的最大值为 875.

故选：C

11.（2023·北京西城·高三统考期末）“空气质量指数（AQI）”是定量描述空气质量状况的无量纲指数．当AQI大于200时,表示空气重度污染,不宜开展户外活动．某地某天0~24时的空气质量指数 y 随时间 t 变化的趋势由函数 $y=\begin{cases}-10t+290,0\leq t\leq 12\\56\sqrt{t}-24,12<t\leq 24\end{cases}$ 描述,则该天适宜开展户外活动的时长至多为（　）

A．5小时　　B．6小时　　C．7小时　　D．8小时

【答案】C

【解析】解:由题知,当AQI大于200时,表示空气重度污染,不宜开展户外活动,

即当AQI小于等于200时,适宜开展户外活动,

即 $y \le 200$,

因为 $y=\begin{cases}-10t+290, 0\le t\le 12\\ 56\sqrt{t}-24, 12<t\le 24\end{cases}$,

所以当 $0\le t\le 12$ 时,

只需 $-10t+290\le 200$,

解得:$9\le t\le 12$,

当 $12<t\le 24$ 时,

只需 $56\sqrt{t}-24\le 200$,

解得:$12<t\le 16$,

综上:适宜开展户外活动的时间段为 $9\le t\le 16$,

共计7个小时.

故选:C

12.(2023·山东临沂·高三统考期中)为了保护水资源，提倡节约用水，某城市对居民用水实行“阶梯水价”.计费方法如下表：

每户每月用水量	水价
不超过 12m^3	4 元/m^3
超过 12m^3 但不超过 18m^3	6 元/m^3
超过 18m^3	8 元/m^3

若某户居民上月交纳的水费为66元，则该户居民上月用水量为（　）

A．13m^3　　B．14m^3　　C．15m^3　　D．16m^3

【答案】C

【解析】设用户的用水量为 $x\text{m}^3$，缴纳的水费为 y 元，

当 $0\le x\le 12$ 时，$y=4x\in[0,48]$，

当 $12<x\le 18$ 时，$y=48+6(x-12)=6x-24\in(48,84]$，

当 $x>18$ 时，$y=4\times12+6\times6+8\left(x-18\right)=8x-60>84$.

故若某户居民上月交纳的水费为 66 元，则用水量在 $\left(12,18\right]$ 内，令 $6x-24=66$，解得 $x=15$.

故选：C.

题型 03 对勾函数模型

13．（2014•湖北）某项研究表明：在考虑行车安全的情况下，某路段车流量 F（单位时间内经过测量点的车辆数，单位：辆 / 小时）与车流速度 v（假设车辆以相同速度 v 行驶，单位：米 / 秒）、平均车长 l（单位：米）的值有关，其公式为 $F=\dfrac{76000v}{v^2+18v+20l}$.

（Ⅰ）如果不限定车型，$l=6.05$，则最大车流量为____辆 / 小时；

（Ⅱ）如果限定车型，$l=5$，则最大车流量比（Ⅰ）中的最大车流量增加____辆 / 小时.

【答案】1900，100

【解析】（Ⅰ）$F=\dfrac{76000v}{v^2+18v+20l}=\dfrac{76000}{v+\dfrac{121}{v}+18}$，

$\because v+\dfrac{121}{v}\quad 2\sqrt{121}=22$，当 $v=11$ 时取最小值，

$\therefore F=\dfrac{76000}{v+\dfrac{121}{v}+18}\quad 1900$，

故最大车流量为：1900 辆 / 小时；

（Ⅱ）$F=\dfrac{76000v}{v^2+18v+20l}=\dfrac{76000v}{v^2+18v+100}=\dfrac{76000}{v+\dfrac{100}{v}+18}$，

$\because v+\dfrac{100}{v}\quad 2\sqrt{100}=20$，

$\therefore F\quad 2000$，

$2000-1900=100$（辆 / 小时）

故最大车流量比（Ⅰ）中的最大车流量增加 100 辆 / 小时.

故答案为：1900，100

14．（2023・山东济南・高三山东省济南市莱芜第一中学校考阶段练习）近来汽油价格起伏较大，假设第一周、第二周的汽油价格分别为 m 元/升，n 元/升$(m\neq n)$，甲和乙购买汽油的方式不同，甲每周购买 40 元的汽油，乙每周购买 12 升汽油，甲、乙两次购买平均单价分别记为 a_1，a_2，则下列结论正确的是（　）

A． $a_1=a_2$　　B． $a_1>a_2$　　C． $a_2>a_1$　　D． a_1， a_2的大小无法确定

【答案】C

【解析】由题意得$m>0$， $n>0$， $m\neq n$，

则$a_1=\dfrac{40\times 2}{\dfrac{40}{m}+\dfrac{40}{n}}=\dfrac{2mn}{m+n}<\dfrac{2mn}{2\sqrt{mn}}=\sqrt{mn}$，

$a_2=\dfrac{12m+12n}{12\times 2}=\dfrac{m+n}{2}>\sqrt{mn}$，

所以$a_2>a_1$．

故选：C．

15．（2023•辽宁大连•高一大连八中校考期中）近来猪肉价格起伏较大，假设第一周、第二周的猪肉价格分别为a元/斤、b元/斤，甲和乙购买猪肉的方式不同，甲每周购买20元钱的猪肉，乙每周购买6斤猪肉，甲、乙两次平均单价为分别记为m_1， m_2，则下列结论正确的是（　　）

A． $m_1=m_2$　　B． $m_1>m_2$

C． $m_2>m_1$　　D． m_1,m_2的大小无法确定

【答案】C

【解析】甲购买猪肉的平均单价为： $m_1=\dfrac{2\times 20}{\dfrac{20}{a}+\dfrac{20}{b}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$，

乙购买猪肉的平均单价为： $m_2=\dfrac{6a+6b}{12}=\dfrac{a+b}{2}$，

显然$m_1>0,m_2>0$，

且$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{\dfrac{2ab}{a+b}}{\dfrac{a+b}{2}}=\dfrac{4ab}{(a+b)^2}=\dfrac{4ab}{a^2+2ab+b^2}\leq\dfrac{4ab}{2ab+2ab}=1$，

当且仅当$a=b$时取“=”，

因为两次购买的单价不同，即$a^1\ \ b$，

所以$m_1<m_2$，

即乙的购买方式平均单价较大.

故选：C.

16．（2023•湖南•高三校联考阶段练习）某社区计划在一块空地上种植花卉，已知这块空地是面积为1800