山东省德州市2023届高三上学期11月期中考试数学试卷

第I卷（共60分）

一、选择题（本大题共8个小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.）

1.已知非空集合A、B,$A=\left\{x \mid x^2-5x+4\geqslant 0\right\}$,$B=\{x \mid 2-a<x<2+a\}$,若$A\cap B=\varnothing$,则实数$a$的取值范围为（　　）

A.$(0,2)$　B.$(0,2]$　C.$(0,1)$　D.$(0,1]$

2.已知$a,b\in\mathbf{R}$,则“$a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$”是“$2^a<2^b$”的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

3.已知$\cos\theta+\sin\left(\theta+\frac{\quad}{6}\right)=1$,则$\sin\left(\theta+\frac{\quad}{3}\right)=$（　　）

A.$\frac{1}{2}$　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　C.$\frac{2}{3}$　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

4.意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时,发现有这样一列数:1,1,2,3,5,$\cdots$,从第三项起,每个数等于它前面两个数的和,即$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$,后来人们把这样的一列数组成的数列$\left\{a_n\right\}$称为“斐波那契数列”.记$a_{2023}=m$,则$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}=$（　　）

A.$m-2$　B.$m-1$　C.m　D.$m+1$

5.设D为ΔABC所在平面内一点,$\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{BC}$,则（　　）

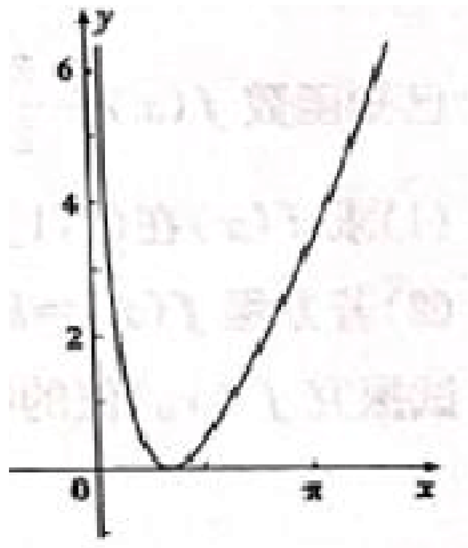
A.$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

B.$\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

C.$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}$

D.$\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}$

6.某函数在$(0,+\infty)$上的部分图象如图,则函数〖解 析〗式可能为（　　）



A. $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$

B. $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ln x$

C. $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

D. $f(x)=\dfrac{x-\ln x-1}{x}$

7．已知某品牌手机电池充满时的电量为4000（单位：毫安时），且在待机状态下有两种不同的耗电模式可供选择．模式A：电量呈线性衰减，每小时耗电400（单位：毫安时）；模式B：电量呈指数衰减,即从当前时刻算起,t小时后的电量为当前电量的$\dfrac{1}{2^{t}}$倍.现使该电子产品处于的电量待机状态时开启A模式，并在x小时后,切换为B模式，若使且在待机10小时后有超过2.5%的电量,则x的可能取值为（　　）

A. 4.6　　B. 5.8　　C. 7.6　　D. 9.9

8. 已知定义在$[-2,2]$上的函数$f(x)=\begin{cases}x^2+x, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ |\ln(x+1)|, & -1<x\leqslant 2,\end{cases}$

若$g(x)=f(x)-a(x+1)$的图象与x轴有4个不同的交点,则实数a的取值范围是（　　）

A. $\left[\dfrac{\ln 3}{3},\dfrac{1}{e}\right)$　B. $\left(\dfrac{\ln 3}{3},\dfrac{1}{e}\right)$　C. $\left[\dfrac{\ln 3}{3},\dfrac{1}{3e}\right)$　D. $\left(\dfrac{\ln 3}{3},\dfrac{1}{3e}\right)$

二、选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.)

9.若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,则下列不等式中正确的是（　　）

A.$a^3<b^3$　　B.$a^2b>ab^2$　　C.$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　D.$a+b<ab$

10.已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$同时满足下列三个条件:

①该函数的最大值为$\sqrt{2}$;

②该函数图象的两条对称轴之间的距离的最小值为π;

③该函数图象关于$\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$对称;

那么下列说法正确的是（　　）

A.φ的值可唯一确定

B.函数$f\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)$是奇函数

C.当$x=2k\pi-\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$时,函数$f(x)$取得最小值

D.函数$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增

11.已知$f(x)=x\ln x-\sqrt{2x-1}$,则（　　）

A.$f(x)$的定义域是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

B.函数$f(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上为减函数

C.若直线$y=m$和$y=f(x)$的图象有交点,则$m\in(-\infty,-1]$

D.$\ln\frac{3}{2}>\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$

12.将n^2个数排成n行n列的数阵,如图所示:该数阵第一列的n个数从上到下构成以m为公差的等差数列,每一行的n个数从左到右构成以m为公比的等比数列(其中$m>0$).已知$a_{11}=3,a_{13}=a_{51}+1$,记这n^2个数的和为S,下面叙述正确的是（　　）

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots\cdots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{array}
$$

A. $m=2$　　B. $a_{78}=15\times 2^8$　　C. $a_{ij}=(2i+1)\cdot 2^{j-1}$　　D. $S=n(n+2)\left(2^n-1\right)$

第 II 卷(共 90 分)

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13.曲线 $y=\ln x+x+1$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为________.

14.已知命题 $p:\exists x\in(0,3), x^2-a-2\ln x\leqslant 0$.若 p 为假命题,则 a 的取值范围为_____.

15.在 ΔABC 中,M 为边 BC 上任意一点,N 为 AM 的中点,且满足 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda^2+\mu^2$ 的最小值为________.

16.定义 $\|x\|(x\in\mathbf{R})$ 为与 x 距离最近的整数(当 x 为两相邻整数算术平均值时,$\|x\|$ 取较大整数),令函数 $G(x)=\|x\|$,如: $G\left(\frac{4}{3}\right)=1, G\left(\frac{5}{3}\right)=2, G(2)=2, G(2.5)=3$.

则 $\frac{1}{G(1)}+\frac{1}{G(\sqrt{2})}+\frac{1}{G(\sqrt{3})}+\frac{1}{G(\sqrt{4})}+\frac{1}{G(\sqrt{5})}+\frac{1}{G(\sqrt{6})}=$__________;

$\frac{1}{G(1)}+\frac{1}{G(\sqrt{2})}+\frac{1}{G(\sqrt{3})}+\cdots+\frac{1}{G(\sqrt{2023})}=$_________.

(本题第一空 2 分,第二空 3 分)

四、解答题

17.(本小题满分 10 分)

设两个向量 a,b 满足 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$.

(1)若 $(2a-b)\cdot(a+b)=-3$,求 a,b 的夹角 θ;

(2)若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$,向量$2t\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$2\boldsymbol{a}+t$的夹角为钝角,求实数$t$的取值范围.

18.(本小题满分 12 分)

在①$\dfrac{\sin A}{\sin B}+\dfrac{\sin B}{\sin A}+1=\dfrac{c^2}{ab}$,②$(a+2b)\cos C+c\cos A=0$,③$\sqrt{3}a\sin\dfrac{A+B}{2}=c\sin A$这三个条件中任选一个,补充在下面的演线上,并解答.

在ΔABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且________.

(1)求角C的大小;

(2)若$c=2\sqrt{3},\sin A+\sin B=4\sin A\sin B$,求$\Delta ABC$的面积.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

19.(本小题满分 12 分)

函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且对任意实数 x,都有 $f(x+2)=f(-x)$ 成立.已知当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)=\log_{a}(2-x)(a>1)$.

(1)当 $x\in[1,2]$ 时,求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2)若函数 $f(x)$ 的最大值为 1,当 $x\in[-2,2]$ 时,求不等式 $f(x)>\dfrac{1}{2}$ 的解集.

20.（本小题满分 12 分）

第二届中国(宁夏)国际葡萄酒文化旅游博览会于 2022 年 9 月 6—12 日在银川市成功举办，某酒庄带来了莆萄酒新品参展,与采购商洽谈,并计划大量销往海内外.已知该新品年固定生产成本 40 万元,每生产一箱需另投人 100 元.若该酒庄一年内生产该猫萄酒 x 万箱且全部唯完,每万箱的销售收人为 $H(x)$ 万元.

$$H(x)=\begin{cases}280-3x,0<x\leqslant 20,\\ 90+\dfrac{3000(x-2)}{x(x+1)},x>20.\end{cases}$$

(1)写出年利润 $M(x)$ (万元)关于年产是 x (万箱)的函数〖解 析〗式(利润＝销售收入一成本)；

(2)年产量为多少万箱时，该酒庄的利润最大？并求出最大利润.

21. (本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且满足$a_1=2,S_n=\frac{3}{2}a_n-n$,数列$\{b_n\}$满足$b_1+2^2b_2+3^2b_3+\cdots+n^2b_n=n$.

(1)求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式;

(2)设数列$\left\{\frac{(n+1)b_{n+2}}{\left[\log_3(a_n+1)\right]^2}\right\}$的前$n$项和为$T_n$,求证:$T_n<\frac{5}{16}$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=\frac{3}{2}ax^2-2\ln x+(2a-3)x$.

(1)求$f(x)$在$(0,1]$的最小值;

(2)若方程$f(x)=k$有两个不同的解x_1,x_2,且x_1,x_0,x_2成等差数列,试探究$f'(x_0)$值的符号.

参 *考 *答 *案

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.D　2.C　3.B　4.B　5.A　6.B　7.C　8.A

二、多项选择题(共 4 小题,每小题至少 2 个以上的答案正确,错选 0 分,漏选 2 分,全对 5 分,共 20 分)

9.BCD　10.AC　11.ABD　12.ACD

三、填空题(共 4 个小题,每小题 5 分,本题满分 20 分)

13.$2x-y=0$　14.$(-\infty,1)$　15.$\frac{1}{8}$　16.4,$\frac{4003}{45}$

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.解:(1)由$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-3$得$2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=-3$, ………………………… 2 分

又$\boldsymbol{a}^2=1$,$\boldsymbol{b}^2=4$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$. ………………………… 3 分

所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}$, ………………………… 4 分

又因为$0°\leqslant\theta\leqslant180°$,

所以$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$. ………………………… 5 分

(2)由已知得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2\times\cos60°=1$, ………………………… 6 分

则$(2t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})=4t\boldsymbol{a}^2+2t^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{b}^2=2t^2-2$. ………………………… 8 分

因为向量$2t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$的夹角为钝角,所以$t^2-1<0$,即$-1<t<1$. ………… 9 分

设$2t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})$,$\lambda<0$,则$\begin{cases}2t=2\lambda\\ \lambda t=-1\\ \lambda<0\end{cases}$,无解,故两个向量的夹角不可能为$180°$,

所以向量$2t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$的夹角为钝角时,$t$的取值范围为$-1<t<1$. ……… 10 分

18.解:(1)选择条件①,

由$\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}+1=\frac{c^2}{ab}$及正弦定理,可得$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{c^2}{ab}$, ………………………… 2 分

即$a^2+b^2-c^2=-ab$, ………………………… 3 分

由余弦定理,得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$, ………………………… 5 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………… 6 分

选择条件②，

由 $(a+2b)\cos C+c\cos A=0$ 及正弦定理，可得 $(\sin A+2\sin B)\cos C+\sin C\cos A=0$，… 2 分

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=-2\sin B\cos C$.

即 $\sin(A+C)=-2\sin B\cos C$. ………………………………………………… 3 分

在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，

所以 $\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$，即 $\sin B=-2\cos C\sin B$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos C=-\frac{1}{2}$. ………………………………… 5 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………… 6 分

若选③，$\sqrt{3}a\sin\frac{A+B}{2}=c\sin A$，则 $\sqrt{3}\sin A\cos\frac{C}{2}=\sin C\sin A$，……………… 2 分

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\cos\frac{C}{2}=\sin C$，……………………………………………… 3 分

所以 $\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $\frac{C}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{3}$，…………………………………………………… 5 分

所以 $C=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 6 分

(2)由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=4$，

所以 $\frac{1}{\sin A}=\frac{4}{a}$，$\frac{1}{\sin B}=\frac{4}{b}$，……………………………………………… 7 分

因为 $\sin A+\sin B=4\sin A\sin B$，所以 $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}=\frac{4}{a}+\frac{4}{b}=4$，所以 $a+b=ab$，… 9 分

若 $c=2\sqrt{3}$，由余弦定理得 $12=a^2+b^2-2ab\times(-\frac{1}{2})$，即 $a^2+b^2+ab-12=0$，

所以 $(a+b)^2-ab-12=(ab)^2-ab-12=0$，

因为 $ab>0$，所以 $ab=4$，……………………………………………………………… 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. ……………………… 12 分

19. 解：(1) 由 $f(x+2)=f(-x)$，可得 $f(x)$ 图象关于 $x=1$ 对称. ………………………… 1 分

因为 $x\in[1,2]$，所以 $-x+2\in[0,1]$，

$f(-x+2)=\log_a x$. ……………………………………………………………………… 3 分

又 $f(-x+2)=f(x)$，

故所求的表达式为 $f(x)=\log_a x, x\in[1,2]$. ………………………………………… 5 分

(2) 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(x+2)=f(x)$，

即函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数. …………………………………………………… 6 分

因为 $a>1$，由函数 $f(x)$ 的最大值为 1，知 $f(x)_{\max}=f(0)=\log_a 2=1$，即 $a=2$. ………

……………………………………………………………………………………… 7 分

若 $x\in[0,1]$，则 $\log_2(2-x)>\dfrac{1}{2}$，所以 $0\leqslant x<2-\sqrt{2}$，

当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，可得 $\sqrt{2}-2<x\leqslant 0$，

所以此时满足不等式的解集为 $(\sqrt{2}-2,2-\sqrt{2})$. ………………………………… 9 分

因为 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，

当 $x\in[-2,-1]$ 时，$f(x)>\dfrac{1}{2}$ 的解集为 $[-2,-\sqrt{2})$，

当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)>\dfrac{1}{2}$ 的解集为 $(\sqrt{2},2]$. ……………………………… 11 分

综上：$f(x)>\dfrac{1}{2}$ 的解集为 $(\sqrt{2}-2,2-\sqrt{2})\cup[-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2]$ ……………… 12 分

20. 解：(1) 当 $0<x\leqslant 20$ 时，

$M(x)=(280-3x)x-40-100x=-3x^2+180x-40$， ……………………………… 2 分

当 $x>20$ 时，

$M(x)=x[90+\dfrac{3000(x-2)}{x(x+1)}]-100x-40=-10x+\dfrac{3000(x-2)}{(x+1)}-40$. ………… 4 分

故 $M(x)=\begin{cases}-3x^2+180x-40, 0<x\leqslant 20, \\ -10x+\dfrac{3000(x-2)}{x+1}-40, x>20.\end{cases}$ ……………………………… 5 分

(2) 当 $0<x\leqslant 20$ 时，

$M(x)=-3x^2+180x-40=-3(x-30)^2+2660$，对称轴 $x=30$，开口向下，

故 $M(x)_{\max}=M(20)=2360$， …………………………………………………… 7 分

当 $x>20$ 时，$M(x)=-10x+\dfrac{3000(x-2)}{(x+1)}-40$

$=-10x+\dfrac{3000(x+1-3)}{(x+1)}-40$

$=-10x-\dfrac{9000}{x+1}+2960$

$=-10(x+1)-\dfrac{9000}{x+1}+2970$ ………………………………… 9 分

$\leqslant -2\sqrt{10(x+1)\cdot\dfrac{9000}{x+1}}+2970$

$=2370$，

当且仅当 $10(x+1)=\dfrac{9000}{x+1}$，即 $x=29$ 时，等号成立，……………………………… 11 分

因为 $2370>2360$，

所以当 $x=29$ 时，利润最大，最大值为 2370 万元，

故年产量为 29 万箱时，该公司利润最大，最大利润为 2370 万元. …………………… 12 分

21. 解：(1)由 $S_n=\dfrac{3}{2}a_n-n$ 得 $S_{n-1}=\dfrac{3}{2}a_{n-1}-n+1(n\geqslant 2)$，

作差得 $a_n=\dfrac{3}{2}a_n-\dfrac{3}{2}a_{n-1}-1$，即 $a_n=3a_{n-1}+2$，………………………………………… 1 分

即 $a_{n+1}=3a_n+2$，即 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，

所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=3$ 为首项，3 为公比的等比数列，

$a_n+1=3\times 3^{n-1}=3^n$，所以 $a_n=3^n-1$. ………………………………………………… 3 分

数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1+2^2b_2+3^2b_3+\cdots+n^2b_n=n$，①

当 $n=1$ 时，$b_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_1+2^2b_2+3^2b_3+\cdots+(n-1)^2b_{n-1}=n-1$，②

由①－②可得 $b_n=\dfrac{1}{n^2}$，………………………………………………………………………… 5 分

当 $n=1$ 时，也符合上式，故数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=\dfrac{1}{n^2}$. ……………………… 6 分

(2) $\frac{(n+1)b_{n+2}}{[\log_3(a_n+1)]^2}=\frac{n+1}{(n+2)^2n^2}$ ………………………………………… 7 分

$=\frac{1}{4}[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}]$， ………………………………………… 8 分

则 $T_n=\frac{1}{4}[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}]$ ………………………… 10 分

$=\frac{1}{4}[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}]$

$=\frac{1}{4}[\frac{5}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}]<\frac{5}{16}$，

故 $T_n<\frac{5}{16}$成立. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=\frac{3ax^2+(2a-3)x-2}{x}=\frac{(ax-1)(3x+2)}{x}(x>0)$. ……………… 1 分

①当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，$f(x)_{\min}=f(1)=\frac{7}{2}a-3$. ……… 2 分

②当 $0<a\leqslant1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,1]$单调递减，$f(x)_{\min}=f(1)=\frac{7}{2}a-3$. …… 3 分

③当 $a>1$ 时，$x\in(0,\frac{1}{a})$时，$f'(x)<0$；$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$单调递减，在$(\frac{1}{a},+\infty)$单调递增，

$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{a})=-\frac{3}{2a}+2\ln a+2$. ………………………………………… 4 分

综上，①当 $a\leqslant1$ 时，$f(x)_{\min}=\frac{7}{2}a-3$，

②当 $a>1$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{3}{2a}+2\ln a+2$. ………………………………………… 5 分

(2) $f'(x_0)$值的符号为正，………………………………………… 6 分

理由如下：

由(1)知，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$单调递减，不符合题意.

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$单调递减，在$(\frac{1}{a},+\infty)$单调递增.

不妨设 $0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，由方程 $f(x)=k$ 有两个不同的解 x_1,x_2，

则$\frac{3}{2}ax_1^2-2\ln x_1+(2a-3)x_1=\frac{3}{2}ax_2^2-2\ln x_2+(2a-3)x_2$，整理得，

$\frac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{3}{2}a(x_1+x_2)+(2a-3)$. ………………………………………………… 7 分

$f'(x_0)=3ax_0-\frac{2}{x_0}+(2a-3)=\frac{3}{2}a(x_1+x_2)+(2a-3)-\frac{4}{x_1+x_2}=\frac{2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-\frac{4}{x_1+x_2}$

$=\frac{2}{x_2-x_1}\left[\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}\right]$. ………………………………………………… 9 分

令$\frac{x_2}{x_1}=t>1$，则$\frac{2}{x_2-x_1}>0$，

令 $\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$\varphi(t)$在$(1+\infty)$单调递增，$\varphi(t)>\varphi(1)=0$. ………………………………………… 11 分

故 $\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}>0$，$f'(x_0)>0$ 得证. ………………………………………… 12 分

山东省德州市 2023 届高三上学期 11 月期中考试数学试卷

第 I 卷（共 60 分）

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.）

1.已知非空集合 A、B，$A=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid 2-a<x<2+a\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(0,2)$　B. $(0,2]$　C. $(0,1)$　D. $(0,1]$

2.已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$”是“$2^a<2^b$”的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

3.已知 $\cos\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$，则 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$