专题 20　导数

母题呈现

【母题来源】2021 年高考乙卷

【母题题文】设函数 $f\left(x\right)=\ln\left(a-x\right)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf\left(x\right)$ 的极值点.

（1）求 a；

（2）设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$．证明: $g\left(x\right)<1$.

【答案】1；证明见详解

母题解密

【试题解析】（1）由 $f\left(x\right)=\ln\left(a-x\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x-a}$，$y=xf\left(x\right)\Rightarrow y'=\ln\left(a-x\right)+\dfrac{x}{x-a}$，

又 $x=0$ 是函数 $y=xf\left(x\right)$ 的极值点，所以 $y'\left(0\right)=\ln a=0$，解得 $a=1$；

（2）由（1）得 $f\left(x\right)=\ln\left(1-x\right)$，$g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}=\dfrac{x+\ln\left(1-x\right)}{x\ln\left(1-x\right)}$，$x<1$ 且 $x\neq 0$，

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，要证 $g(x)=\dfrac{x+\ln\left(1-x\right)}{x\ln\left(1-x\right)}<1$，$\because x>0,\ln\left(1-x\right)<0$，$\therefore x\ln\left(1-x\right)<0$，即证

$x+\ln\left(1-x\right)>x\ln\left(1-x\right)$，化简得 $x+\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)>0$；

同理，当 $x\in\left(-\infty,0\right)$ 时，要证 $g(x)=\dfrac{x+\ln\left(1-x\right)}{x\ln\left(1-x\right)}<1$，$\because x<0,\ln\left(1-x\right)>0$，$\therefore x\ln\left(1-x\right)<0$，即证

$x+\ln\left(1-x\right)>x\ln\left(1-x\right)$，化简得 $x+\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)>0$；

令 $h\left(x\right)=x+\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)$，再令 $t=1-x$，则 $t\in\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，$x=1-t$，

令 $g\left(t\right)=1-t+t\ln t$，$g'\left(t\right)=-1+\ln t+1=\ln t$，

当 $t\in\left(0,1\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$ 单减，假设 $g\left(1\right)$ 能取到，则 $g\left(1\right)=0$，故 $g\left(t\right)>g\left(1\right)=0$；

当 $t\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$ 单增，假设 $g\left(1\right)$ 能取到，则 $g\left(1\right)=0$，故 $g\left(t\right)>g\left(1\right)=0$；

综上所述，$g(x)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$在$x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$恒成立

【命题意图】考查导数的概念、导数公式、求导法则、导数的几何意义及导数的应用，考查数学式子的变形能力、运算求解能力、分类讨论思想、函数与方程思想、化归与转化思想及分析问题与解决问题的能力.

【命题方向】

从全国看，高考在逐年加大对导数问题的考查力度，问题的难度、深度与广度在不断加大，对本部分的要求一般有三个层次：第一层次主要考查求导公式，求导法则与导数的几何意义；第二层次是导数的简单应用，包括求函数的单调区间、极值、最值等；第三层次是综合考查，如零点、证明不等式、恒成立问题、求参数等，包括解决应用问题，将导数内容和传统内容中有关不等式、数列及函数单调性有机结合，设计综合题.

【得分要点】

1.函数的单调性及应用是高考中的一个重点内容，常见的题型及其解法如下：

（1）利用导数判断或证明一个函数在给定区间上的单调性，实质上就是判断或证明不等式$f'(x)>0$（$f'(x)<0$）在给定区间上恒成立．一般步骤为：

①求$f'(x)$；

②确认$f'(x)$在$(a，b)$内的符号；

③作出结论，$f'(x)>0$时为增函数，$f'(x)<0$时为减函数.

注意：研究含参数函数的单调性时，需注意依据参数取值对不等式解集的影响进行分类讨论.

（2）在利用导数求函数的单调区间时，首先要确定函数的定义域，解题过程中，只能在定义域内讨论，定义域为实数集 **R** 可以省略不写.在对函数划分单调区间时，除必须确定使导数等于零的点外，还要注意在定义域内的不连续点和不可导点.

（3）由函数$f(x)$的单调性求参数的取值范围的方法

①可导函数在某一区间上单调，实际上就是在该区间上$f'(x)\geq 0$(或$f'(x)\leq 0$)($f'(x)$在该区间的任意子区间内都不恒等于 0)恒成立，然后分离参数，转化为求函数的最值问题，从而获得参数的取值范围；

②可导函数在某一区间上存在单调区间，实际上就是$f'(x)>0$(或$f'(x)<0$)在该区间上存在解集，这样就把函数的单调性问题转化成了不等式问题；

③若已知$f(x)$在区间I上的单调性，区间I中含有参数时，可先求出$f(x)$的单调区间，令I是其单调区

间的子集，从而可求出参数的取值范围.

（4）利用导数解决函数的零点问题时，一般先由零点的存在性定理说明在所求区间内至少有一个零点，再利用导数判断在所给区间内的单调性，由此求解.

2.函数极值问题的常见类型及解题策略

（1）函数极值的判断：先确定导数为 0 的点，再判断导数为 0 的点的左、右两侧的导数符号.

（2）求函数 $f\left(x\right)$极值的方法：

①确定函数 $f\left(x\right)$的定义域.

②求导函数 $f'\left(x\right)$.

③求方程 $f'\left(x\right)=0$的根.

④检查 $f'\left(x\right)$在方程的根的左、右两侧的符号，确定极值点．如果左正右负，那么 $f\left(x\right)$在这个根处取得极大值；如果左负右正，那么 $f\left(x\right)$在这个根处取得极小值；如果 $f'\left(x\right)$在这个根的左、右两侧符号不变，则 $f\left(x\right)$在这个根处没有极值.

（3）利用极值求参数的取值范围：确定函数的定义域，求导数 $f'\left(x\right)$，求方程 $f'\left(x\right)=0$的根的情况，得关于参数的方程(或不等式)，进而确定参数的取值或范围.

3.求函数 $f(x)$在[a，b]上最值的方法

（1）若函数 $f(x)$在[a，b]上单调递增或递减，则 $f(a)$与 $f(b)$一个为最大值，一个为最小值.

（2）若函数 $f(x)$在区间(a，b)内有极值，先求出函数 $f(x)$在区间(a，b)上的极值，与 $f(a)$、$f(b)$比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

（3）函数 $f(x)$在区间(a，b)上有唯一一个极值点时，这个极值点就是最大(或最小)值点.

注意：（1）若函数中含有参数时，要注意分类讨论思想的应用.

（2）极值是函数的“局部概念”，最值是函数的“整体概念”，函数的极值不一定是最值，函数的最值也不一定是极值.要注意利用函数的单调性及函数图象直观研究确定.

4.利用导数解决不等式恒成立问题的“两种”常用方法：

（1）分离参数法：将原不等式分离参数，转化为不含参数的函数的最值问题，利用导数求该函数的最值，根据要求得所求范围.一般地，$f(x)\geq a$ 恒成立，只需 $f(x)_{\min}\geq a$ 即可；$f(x)\leq a$ 恒成立，只需 $f(x)_{\max}\leq a$ 即可.

（2）函数思想法：将不等式转化为某含待求参数的函数的最值问题，利用导数求该函数的极值　(最值)，然

后构建不等式求解.

题题源精粹

1.（2021·湖南长沙市·长郡中学高三二模）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x+\ln a$， $g(x)=\ln(x+1)+1$（其中 a 为常数，e是自然对数的底数）.

（1）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)>g(x)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】（1） $y=x+1$；（2） $a>1$.

【分析】

（1）根据导函数的几何意义，先求斜率，再带入 $y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$ 化简整理即可；

（2）方法一：不等式 $f(x)>g(x)$ 恒成立可等价转化为 $f(x)-g(x)>0$，构造函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$，然后通过函数单调性，求最值即可；

方法二： $f(x)>g(x)$ 恒成立，即 $a\mathrm{e}^x+\ln a>\ln(x+1)+1$，进行同构变形 $a\mathrm{e}^x+\ln\left(a\mathrm{e}^x\right)>\ln(x+1)+(x+1)$，则构造函数 $h(t)=t+\ln t$，利用函数单调性求解不等式 $h\left(a\mathrm{e}^x\right)>h\left(x+1\right)$，进而转化为 $a\mathrm{e}^x>x+1$，接下来参变分离即得出结果.

【详解】

（1）根据题意可知：

$f(x)=e^x$， $f'(x)=\mathrm{e}^x$，

所以 $f(0)=1$， $f'(0)=1$，

所求的直线方程为 $y-1=x-0$，

即 $y=x+1$.

（2）方法一：$\because f(x)=a\mathrm{e}^x+\ln a$， $g(x)=\ln(x+1)+1$，

故不等式 $f(x)>g(x)$ 恒成立可等价转化为：

$a\mathrm{e}^x-\ln(x+1)+\ln a-1>0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，

记 $h(x)=a\mathrm{e}^{x}-\ln(x+1)+\ln a-1$， $x\in(-1,+\infty)$，

当 $0<a\leqslant 1$ 时， $h(0)=a+\ln a-1\leqslant 0$， 不合题意；

当 $a>1$ 时， $h'(x)=a\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{a(x+1)\mathrm{e}^{x}-1}{x+1}$.

记 $\varphi(x)=a(x+1)\mathrm{e}^{x}-1$， $x\in[-1,+\infty)$，

则 $\varphi'(x)=a(x+2)\mathrm{e}^{x}>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是增函数，又 $\varphi(-1)=-1$， $\varphi(0)=a-1>0$，

所以 $\exists x_0\in(-1,0)$ 使得 $\varphi(x_0)=0$，即 $a(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}-1=0$ □，

则当 $x\in(-1,x_0)$ 时， $\varphi(x)<0$，即 $h'(x)<0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时， $\varphi(x)>0$，即 $h'(x)>0$，

故 $h(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=a\mathrm{e}^{x_0}-\ln(x_0+1)+\ln a-1$ □，

由□式可得 $a\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+1}$， $\ln a=-\ln(x_0+1)-x_0$，

代入□式得 $h(x)_{\min}=\dfrac{1}{x_0+1}-(x_0+1)-2\ln(x_0+1)$，

因为 $x_0\in(-1,0)$，即 $x_0+1\in(0,1)$，

故 $\dfrac{1}{x_0+1}-(x_0+1)>0$， $2\ln(x_0+1)<0$，即 $h(x)_{\min}>0$，

所以 $a>1$ 时， $h(x)>0$ 恒成立，故 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

方法二：根据已知条件可得：$\because f(x)=a\mathrm{e}^{x}+\ln a$， $g(x)=\ln(x+1)+1$，

且 $f(x)>g(x)$ 恒成立；

故可等价转化为： $a\mathrm{e}^{x}+\ln(a\mathrm{e}^{x})>\ln(x+1)+(x+1)$ 恒成立.

设 $h(t)=t+\ln t$，则 $h'(t)=1+\dfrac{1}{t}>0$， $h(t)$ 单调递增，

因而 $ae^x > x+1$ 恒成立，即 $a > \frac{x+1}{e^x}$ 恒成立.

令 $s(x)=\frac{x+1}{e^x}$，则 $s'(x)=-\frac{x}{e^x}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$s'(x)>0$，$s(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$s'(x)<0$，$s(x)$ 单调递减，

所以 $s(x)\leqslant s(0)=1$，从而 $a>1$ 即为所求.

【点睛】

恒成立问题求参数的取值范围的方法：

（1）参数分离法；

（2）构造函数法：□构造函数，然后通过研究函数的单调性，求出最值，解不等式即可；□构造函数，研究函数的单调性，利用单调性解不等式，然后转化之后进行参变分离.

2．（2021·玉林市育才中学高三三模（文））设函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+a)$，其中 $b\neq 0$.

（□）当 $b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=-2$ 时取得极值，求 a；

（□）当 $a=1$ 时，若 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，求 b 的取值范围；

【答案】（□）$a=\frac{9}{4}$；（□）$b\geq\frac{1}{2}$.

【分析】

（□）求函数的导数利用 $f'(-2)=0$ 求解；

（□）根据函数的单调性可得 $2x^2+2x+b\geq 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，利用二次函数的最值求解.

【详解】

（□）当 $b=1$ 时，$f'(x)=2x+\frac{1}{x+a}$，

依题意有 $f'(-2)=0$，故 $a=\frac{9}{4}$，

此时 $f'(x)=2x+\frac{1}{x+\frac{9}{4}}=\frac{4x^2+9x+2}{2x+\frac{9}{2}}=\frac{(4x+1)(x+2)}{2x+\frac{9}{2}}$，

$x=-2$ 取得极大值，所以 $a=\frac{9}{4}$；

（□）当 $a=1$ 时，$f'(x)=2x+\frac{b}{x+1}=\frac{2x^2+2x+b}{x+1}$，

若 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $2x^2+2x+b\geq 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，

设 $h(x)=2x^2+2x+b$，

只需 $h\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+b\geq 0$，即 $b\geq\frac{1}{2}$.

3.（2021·吉林高三其他模拟（理））已知函数 $f(x)=\ln(2-x)-\frac{a}{2}x^2$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 m，$n(m<n)$，证明：$\frac{1}{2}<f(m)<\ln 2$.

【答案】(1) $4x+2y-3=0$；(2) 证明见解析.

【分析】

(1)切线斜率为 $f'(1)$，根据点斜式可写出直线方程；

(2)根据 m，n 是方程 $f'(x)=0$ 的解，由二次函数根的分布情况求出 a 的范围，再结合函数 $f(x)$ 的单调性进行分析可解出此题.

【详解】

(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{2}x^2(x<2)$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x-2}-x$，

$\therefore f'(1)=-2$，

又 $\because f(1)=-\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 切线方程为：$y-(-\frac{1}{2})=-2(x-1)$，

即切线方程为：$4x+2y-3=0$.

(2) $\because f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{2}ax^2$，

$\because f'(x)=-\frac{1}{2-x}-ax=\frac{ax^2-2ax-1}{2-x}(x<2)$.

令 $g(x)=ax^2-2ax-1$，

$\because f(x)$有两个不同的极值点m、n，

$\therefore$方程$g(x)=0$在$x<2$上有两个不同的解m和n，

$\therefore m\neq 0$且$\Delta=4a^2+4a>0$，解得：$a<-1$或$a>0$，

又$mn=-\frac{1}{a}$，$m+n=2$，$m<n$，且m、$n\in(-\infty,2)$，

$\therefore m>0$，$n>0$，$0<m<1$，$a<-1$．

$\because a<-1$，$\therefore$二次函数$g(x)$图象开口向下，

$\therefore$当$x\in(-\infty,m)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(m)<f(0)=\ln 2$，

又$f(m)>f(1)=-\frac{1}{2}a>\frac{1}{2}$，

故$\frac{1}{2}<f(m)<\ln 2$．

【点睛】

导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：(1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系．(2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数．(3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题．(4)考查数形结合思想的应用．

4．(2021·四川成都市·石室中学高二期中)已知函数$f(x)=ax^3+(a+b)x^2+12bx(a>0)$为奇函数，且$f(x)$的极小值为$-16$．

（1）求a和b的值；

（2）若过点$M(-1,m)$可作三条不同的直线与曲线$y=f(x)$相切，求实数m的取值范围．

【答案】（1）$a=1$，$b=-1$；（2）$(11,12)$．

【分析】

（1）首先根据函数是奇函数求得$a+b=0$，接着根据$f(x)$的极小值为-16求得$a=1$，所以$b=-1$；（2）

设点$P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$是曲线$f(x)=x^3-12x$的切点，根据导数的几何意义求得切线方程$y=3\left(x_0^2-4\right)x-2x_0^3$，进而得到$m=-2x_0^3-3x_0^2+12$，构造函数$g(x)=-2x_0^3-3x_0^2+12$，根据函数$g(x)=-2x_0^3-3x_0^2+12$图象与$y=m$有三个不同的交点求实数$m$的取值范围.

【详解】

（1）因为$f(x)$是奇函数，所以$f(x)+f(-x)=0$恒成立，则$2(a+b)x^2=0$.

所以$a+b=0$，

所以$f(x)=ax^3-12ax$，

则$f'(x)=3ax^2-12a=3a(x+2)(x-2)$

令$f'(x)=0$，解得$x=-2$或$x=2$.

当$x\in(-2,2)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

$f(x)$在$(-2,2)$单调递减，在$(2,+\infty)$单调递增，

所以$f(x)$的极小值为$f(2)$，

由$f(2)=8a-24a=-16a=-16$，

解得$a=1$，

所以$a=1$，$b=-1$.

（2）由（1）可知$f(x)=x^3-12x$，

设点$P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$是曲线$f(x)=x^3-12x$的切点，

则在P点处的切线的方程为$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$

即$y=3\left(x_0^2-4\right)x-2x_0^3$

因为其过点$M(-1,m)$，

所以$m=-3\left(x_0^2-4\right)-2x_0^3=-2x_0^3-3x_0^2+12=g(x)$，

$g'(x)=-6x_0^2-6x_0=-6x_0(x_0+1)$，

当$-1<x_0<0$时，$g'(x_0)>0$，当$x_0<-1$时，$g'(x_0)<0$，当$x_0>0$时，$g'(x_0)<0$

所以 $x=0$ 为极大值点，$x=-1$ 为极小值点，

由于 $g(0)=12, g(-1)=11$，

所以实数 m 的取值范围为 $(11,12)$.

【点睛】

导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：(1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系．(2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数．(3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题．(4)考查数形结合思想的应用．

5．（2021·四川成都市·石室中学高二期中（理））已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+1}$ 的极值点.

（1）求 a 的值，并证明 $f(x)\geq 0$ 恒成立；

（2）证明：对于任意正整数 n，$\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n)}{n^n}>e^{\frac{n}{n+1}}$

【答案】（1）$a=1$，证明见解析；（2）证明见解析.

【分析】

（1）由 $f'(0)=0$ 可解得 a；对 $f(x)$ 求导，结合单调性可得 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$，进而可得 $f(x)\geq 0$；

（2）由（1）知，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$\ln(x+1)\geq\dfrac{x}{x+1}$，取 $x=\dfrac{k}{n}$，（$k,n\in N^*$，$1\leq k\leq n$），可得 $\ln\left(\dfrac{n+k}{n}\right)>\dfrac{1}{n+1}$，令 $k=1,2,3,\cdots,n$，相加可证得结论.

【详解】

（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{a(x+1)-ax}{(x+1)^2}$，$f'(0)=1-a=0$，$a=1$.

因为 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$ $(x>-1)$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}$，

由 $f'(x)=0$ 得 $x=0$.

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以，$f(x)_{\min}=f(0)=0$.

即当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立.

（2）由（1）知，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$\ln(x+1)\ge\frac{x}{x+1}$，（$x=0$ 时取等号.）

取 $x=\frac{k}{n}$，（$k,n\in N^*$，$1\le k\le n$）得 $\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)>\frac{k}{n+k}=\frac{1}{\frac{n}{k}+1}\ge\frac{1}{n+1}$，

即 $\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$，令 $k=1,2,3,\cdots,n$，相加得到

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+n}{n}\right)>\frac{1}{n+1}\times n,$$

所以，$\ln\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(2n)}{n^n}>\frac{n}{n+1}$，

即对任意 $n\in N^*$，$\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(2n)}{n^n}>e^{\frac{n}{n+1}}$.

【点睛】

关键点点睛：第（2）问的关键点是：证得 $\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$，（$k,n\in N^*$，$1\le k\le n$）.

6.（2021·山东高三其他模拟）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(mx^2+x)$，$g(x)=\mathrm{e}^x x^2+ax+a\ln x+1$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求实数 m 的值；

（2）当 $m=1$ 时，若对 $\forall x>0$，不等式 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，求实数 a 的值.

【答案】（1）$m=-\frac{2}{3}$；（2）$a=1$.

【分析】

（1）先根据极值点对应的导数值为零求解出 m 的可取值，然后检验 m 的取值下 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否取极大值，由此确定出 m 的值；

（1）先将问题转化为“$x>0$ 时，$e^{x+\ln x}\ge a(x+\ln x)+1$”，再通过换元将问题转化为“$\forall t\in R,e^t-at-1\ge0$ 恒成立”，然后构造函数 $F(t)=e^t-at-1$，采用分类讨论的方法分析 $F(t)$ 的最小值与 0 的关系，由此求解出 a 的值.

【详解】

（1）因为 $f(x)=\mathrm{e}^x(mx^2+x)$，所以 $f'(x)=e^x(mx^2+x+2mx+1)$，