云天化中学 2024 年数学高三上期末统考试题

注意事项:

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2．答题时请按要求用笔。
3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．点 M 在曲线 $G: y=3\ln x$ 上，过 M 作 x 轴垂线 l，设 l 与曲线 $y=\frac{1}{x}$ 交于点 N，$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{3}$，且 P 点的纵坐标始终为 **0**，则称 M 点为曲线 G 上的“水平黄金点”，则曲线 G 上的“水平黄金点”的个数为（　　）

A．0　　**B．1**　　**C．2**　　**D．3**

2．关于圆周率 **π**，数学发展史上出现过许多很有创意的求法，如著名的浦丰实验和查理斯实验．受其启发，我们也可以通过设计下面的实验来估计 π 的值：先请全校 m 名同学每人随机写下一个都小于1的正实数对 (x,y)；再统计两数能与1构成钝角三角形三边的数对 (x,y) 的个数 a；最后再根据统计数 a 估计 π 的值，那么可以估计 π 的值约为（　　）

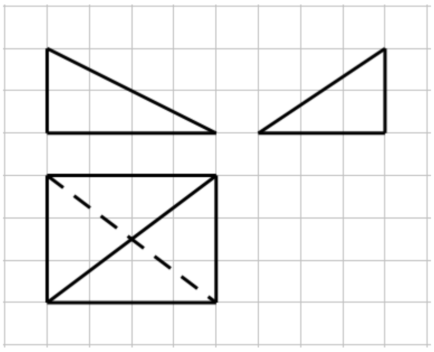
A． $\frac{4a}{m}$　　**B．** $\frac{a+2}{m}$　　**C．** $\frac{a+2m}{m}$　　**D．** $\frac{4a+2m}{m}$

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x, x>0\\ a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}, x\le 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f[f(x)]=0$ 有且只有一个实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A． $(-\infty,0)\cup(0,1)$　　**B．** $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

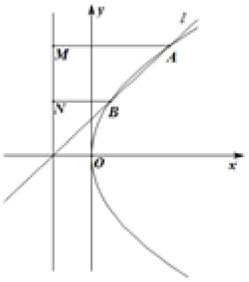
C． $(-\infty,0)$　　**D．** $(0,1)\cup(1,+\infty)$

4．某三棱锥的三视图如图所示，网格纸上小正方形的边长为1，则该三棱锥外接球的表面积为（　　）



A． 27π　　**B．** 28π　　**C．** 29π　　**D．** 30π

5．如图，已知直线$l: y=k\left(x+1\right)\left(k>0\right)$与抛物线$C: y^2=4x$相交于 ***A***，***B*** 两点，且 ***A***、***B*** 两点在抛物线准线上的投影分别是 ***M***，***N***，若$\left|AM\right|=2\left|BN\right|$，则$k$的值是（　　）



A． $\dfrac{1}{3}$　　　　**B．** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　　　**C．** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　　　**D．** $2\sqrt{2}$

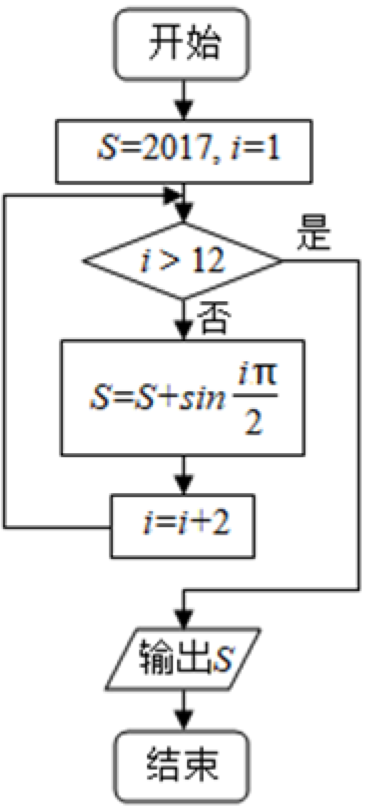
6．已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，设其前 ***n*** 项和S_n，若$a_n a_{n+1}=4^n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则$S_5=$（　　）

A．30　　　　**B．** $31\sqrt{2}$　　　　**C．** $15\sqrt{2}$　　　　**D．62**

7．已知命题p：任意$x\geq4$，都有$\log_2 x\geq2$；命题q：$a>b$，则有$a^2>b^2$．则下列命题为真命题的是（　　　　）

A． $p\wedge q$　　　　**B．** $p\wedge(\neg q)$　　　　**C．** $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　　　**D．** $(\neg p)\vee q$

8．运行如图程序，则输出的 S 的值为（　　）



A．0　　　　**B．1**　　　　**C．2018**　　　　**D．2017**

9．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$\left(S_n+1\right)\left(S_{n+2}+1\right)=\left(S_{n+1}+1\right)^2\,(n\in\mathrm{N}^*)$，$a_1=1, a_2=2$，则$S_n=$（　　）

A. $\frac{n(n+1)}{2}$　　B. 2^{n+1}　　C. 2^n-1　　D. $2^{n+1}+1$

10．下列说法正确的是（　　）

A．"若$a>1$，则$a^2>1$"的否命题是"若$a>1$，则$a^2\le 1$"

B．"若$am^2<bm^2$，则$a<b$"的逆命题为真命题

C．$\exists x_0\in(0,+\infty)$，使$3^{x_0}>4^{x_0}$成立

D．"若$\sin\alpha\ne\frac{1}{2}$，则$\alpha\ne\frac{\pi}{6}$"是真命题

11． "纹样"是中国艺术宝库的瑰宝，"火纹"是常见的一种传统纹样.为了测算某火纹纹样（如图阴影部分所示）的面积，作一个边长为3的正方形将其包含在内，并向该正方形内随机投掷200个点，已知恰有80个点落在阴影部分据此可估计阴影部分的面积是（　　）

A. $\frac{16}{5}$　　B. $\frac{32}{5}$　　C. 10　　D. $\frac{18}{5}$

12．已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln(2-x), x\le 1,\\ -x^2+1, x>1,\end{cases}$若$|f(x)|-ax+a\ge 0$恒成立，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$　　B. $[0,1]$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $[0,2]$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知全集为R，集合$A=\{x|x^2-x=0\},B=\{-1,0\}$，则$A\cup B=$__________.

14．已知圆$O:x^2+y^2=4$，直线l与圆O交于P,Q两点，$A(2,2)$，若$|AP|^2+|AQ|^2=40$，则弦PQ的长度的最大值为______.

15．已知实数x，y满足$\begin{cases}y\le x\\ x-4y-3\le 0\\ 2x+y-6\le 0\end{cases}$，则目标函数$z=x+2y-1$的最小值为_________.

16．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{ex}{e^x},x\le 2\\ \dfrac{4x-8}{5x},x>2\end{cases}$，（其中 e 为自然对数的底数），若关于 x 的方程 $f^2\left(x\right)-3a\left|f\left(x\right)\right|+2a^2=0$ 恰有 5 个相异的实根，则实数 a 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在三角形 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A=b^2+c^2-a^2$.

（Ⅰ）求角 A；

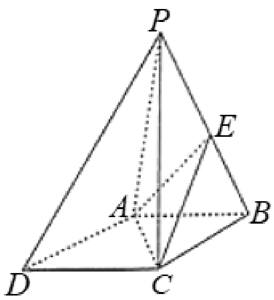
（Ⅱ）若 $c=5$，$\cos B=\dfrac{1}{7}$，求 b.

18．（12 分）在$\vee ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.已知 $a=\sqrt{3}b$，且 $(a-b+c)(\sin A-\sin B-\sin C)=c\sin C-2a\sin B$.

（1）求 $\cos C$ 的值；

（2）若$\vee ABC$ 的面积是 $2\sqrt{2}$，求$\vee ABC$ 的周长.

19．（12 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=120°,PA=2,PB=PC=PD,E$ 是 PB 的中点.



（1）证明：$PD//$平面 AEC；

（2）设 F 是线段 DC 上的动点，当点 E 到平面 PAF 距离最大时，求三棱锥 $P-AFE$ 的体积.

20．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=-2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$0\le\alpha<\pi$），点 $M(0,-2)$.以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

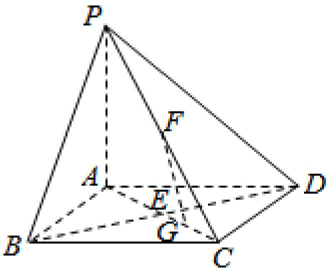
（1）求曲线 C_2 的直角坐标方程，并指出其形状；

（2）曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A，B 两点，若 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

21．（12 分）如图，四棱锥$P-ABCD$中，底面 **ABCD** 为菱形，$PA\perp$平面 **ABCD**，**BD** 交 **AC** 于点 **E**，**F** 是线段 **PC** 中点，**G** 为线段 **EC** 中点．

（Ⅰ）求证：$FG//$平面 **PBD**；

（Ⅱ）求证：$BD\perp FG$．



22．（10 分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，直线l：$x=2$被称作为椭圆C的一条准线，点P在椭圆C上(异于椭圆左、右顶点)，过点P作直线$m:y=kx+t$与椭圆C相切，且与直线l相交于点Q．

（1）求证：$PF\perp QF$．

（2）若点P在x轴的上方，当$\triangle PQF$的面积最小时，求直线m的斜率k．

附：多项式因式分解公式：$t^6-3t^4-5t^2-1=\left(t^2+1\right)\left(t^4-4t^2-1\right)$

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

【解析】

设$M(t,3\ln t)$,则$N\left(t,\frac{1}{t}\right)$,则$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{2t}{3},\ln t+\frac{1}{3t}\right)$,即可得$\ln t+\frac{1}{3t}=0$,设$g(t)=\ln t+\frac{1}{3t}$,利用导函数判断$g\left(t\right)$的零点的个数,即为所求.

【详解】

设$M(t,3\ln t)$,则$N\left(t,\frac{1}{t}\right)$,所以$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{3}=\left(\frac{2t}{3},\ln t+\frac{1}{3t}\right)$,

依题意可得$\ln t+\frac{1}{3t}=0$,

设$g(t)=\ln t+\frac{1}{3t}$,则$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^2}=\frac{3t-1}{3t^2}$,

当$0<t<\frac{1}{3}$时,$g'(t)<0$,则$g(t)$单调递减；当$t>\frac{1}{3}$时,$g'(t)>0$,则$g(t)$单调递增,

所以$g(t)_{\min}=g\left(\frac{1}{3}\right)=1-\ln 3<0$,且$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=-2+\frac{e^2}{3}>0, g(1)=\frac{1}{3}>0$,

$\therefore g(t)=\ln t+\frac{1}{3t}=0$有两个不同的解,所以曲线$G$上的“水平黄金点”的个数为**2**.

故选:**C**

【点睛】

本题考查利用导函数处理零点问题,考查向量的坐标运算,考查零点存在性定理的应用.

2、**D**

【解析】

由试验结果知m对**0～1**之间的均匀随机数x,y，满足$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}$，面积为**1**，再计算构成钝角三角形三边的数对(x,y)，满足条件的面积，由几何概型概率计算公式，得出所取的点在圆内的概率是圆的面积比正方形的面积，即可估计π的值.

【详解】

解：根据题意知，m名同学取m对都小于1的正实数对$\left(x,y\right)$，即$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}$,

对应区域为边长为1的正方形，其面积为1，

若两个正实数x,y能与1构成钝角三角形三边，则有$\begin{cases}x^2+y^2<1\\x+y>1\\0<x<1\\0<y<1\end{cases}$，

其面积$S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$；则有$\frac{a}{m}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$，解得$\pi=\frac{4a+2m}{m}$

故选：D.

【点睛】

本题考查线性规划可行域问题及随机模拟法求圆周率的几何概型应用问题. 线性规划可行域是一个封闭的图形，可以直接解出可行域的面积；求解与面积有关的几何概型时，关键是弄清某事件对应的面积，必要时可根据题意构造两个变量，把变量看成点的坐标，找到试验全部结果构成的平面图形，以便求解.

3、B

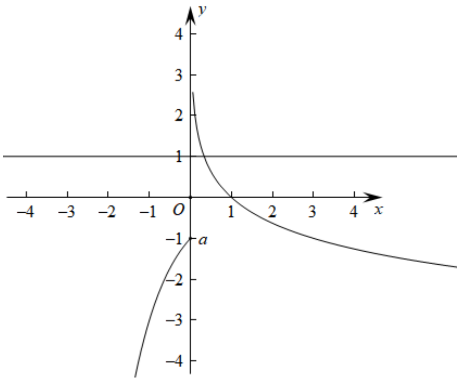
【解析】

利用换元法设$t=f\left(x\right)$，则等价为$f\left(t\right)=0$有且只有一个实数根，分$a<0,a=0,a>0$ 三种情况进行讨论，结合函数的图象，求出a的取值范围.

【详解】

解：设$t=f\left(x\right)$ ，则$f\left(t\right)=0$有且只有一个实数根.

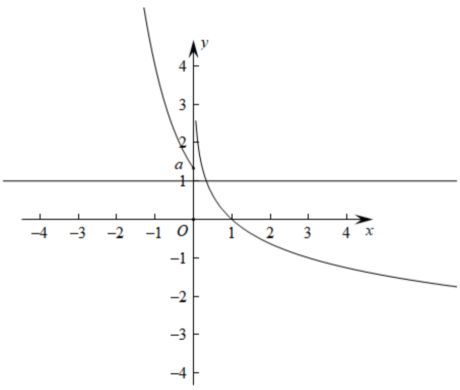
当$a<0$ 时，当$x\le 0$ 时，$f\left(x\right)=a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<0$ ，由$f\left(t\right)=0$即$\log_{\frac{1}{3}}t=0$，解得$t=1$，



结合图象可知，此时当$t=1$时，得$f\left(x\right)=1$ ，则$x=\frac{1}{3}$ 是唯一解，满足题意；

当$a=0$时，此时当$x\le 0$时，$f\left(x\right)=a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=0$，此时函数有无数个零点，不符合题意；

当$a>0$ 时，当$x\le 0$ 时，$f\left(x\right)=a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\in\left[a,+\infty\right)$，此时$f\left(x\right)$ 最小值为a ，



结合图象可知，要使得关于x的方程$f[f(x)]=0$有且只有一个实数根，此时$a>1$.

综上所述：$a<0$ 或$a>1$.

故选:**A.**

【点睛】

本题考查了函数方程根的个数的应用.利用换元法，数形结合是解决本题的关键.

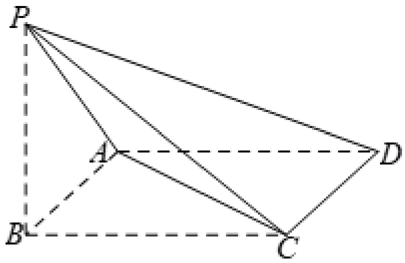
4、**C**

【解析】

作出三棱锥的实物图$P-ACD$，然后补成直四棱锥$P-ABCD$，且底面为矩形，可得知三棱锥$P-ACD$的外接球和直四棱锥$P-ABCD$的外接球为同一个球，然后计算出矩形$ABCD$的外接圆直径AC，利用公式$2R=\sqrt{PB^2+AC^2}$可计算出外接球的直径$2R$，再利用球体的表面积公式即可得出该三棱锥的外接球的表面积.

【详解】

三棱锥$P-ACD$的实物图如下图所示：



将其补成直四棱锥$P-ABCD$，$PB\perp$底面$ABCD$，

可知四边形$ABCD$为矩形，且$AB=3$，$BC=4$.

矩形$ABCD$的外接圆直径$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，且$PB=2$.

所以，三棱锥$P-ACD$外接球的直径为$2R=\sqrt{PB^2+AC^2}=\sqrt{29}$，

因此，该三棱锥的外接球的表面积为$4\pi R^2=\pi\times(2R)^2=29\pi$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查三棱锥外接球的表面积，解题时要结合三视图作出三棱锥的实物图，并分析三棱锥的结构，选择合适的模型进行计算，考查推理能力与计算能力，属于中等题.

5、**C**

【解析】

直线$y=k(x+1)(k>0)$恒过定点$P(-1,0)$，由此推导出$|OB|=\frac{1}{2}|AF|$，由此能求出点B的坐标，从而能求出k的值.

【详解】

设抛物线$C:y^2=4x$的准线为$l:x=-1$，

直线 $y=k\left(x+1\right)\left(k>0\right)$ 恒过定点 $P\left(-1,0\right)$，

如图过 ***A***、***B*** 分别作 $AM\perp l$ 于 ***M***，$BN\perp l$ 于 ***N***，

由 $\left|AM\right|=2\left|BN\right|$，则 $\left|FA\right|=2\left|FB\right|$，

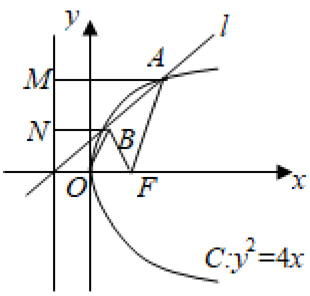
点 ***B*** 为 ***AP*** 的中点、连接 ***OB***，则 $\left|OB\right|=\dfrac{1}{2}\left|AF\right|$，

$\therefore\left|OB\right|=\left|BF\right|$，点 ***B*** 的横坐标为 $\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$点 ***B*** 的坐标为 $B\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，把 $B\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ 代入直线 $y=k\left(x+1\right)\left(k>0\right)$，

解得 $k=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

故选：**C**．



【点睛】

本题考查直线与圆锥曲线中参数的求法，考查抛物线的性质，是中档题，解题时要注意等价转化思想的合理运用，属于中档题.

6、**B**

【解析】

根据 $a_na_{n+1}=4^n$，分别令 $n=1,2$，结合等比数列的通项公式，得到关于首项和公比的方程组，解方程组求出首项和公式，最后利用等比数列前 ***n*** 项和公式进行求解即可.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题意可知中：$a_1>0,q>0$.由 $a_na_{n+1}=4^n$，分别令 $n=1,2$，可得 $a_1a_2=4$、$a_2a_3=16$，由等比数列的通项公式可得：$\begin{cases}a_1\cdot a_1\cdot q=4\\ a_1\cdot q\cdot a_1\cdot q^2=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\sqrt{2}\\ q=2\end{cases}$，

因此 $S_5=\dfrac{\sqrt{2}(1-2^5)}{1-2}=31\sqrt{2}$.

故选：**B**

【点睛】

本题考查了等比数列的通项公式和前 n 项和公式的应用，考查了数学运算能力.

7、**B**

【解析】

先分别判断命题 p,q 真假，再由复合命题的真假性，即可得出结论.

【详解】

p 为真命题；命题 q 是假命题，比如当 $0>a>b$，

或 a=1，$b=-2$ 时，则 $a^2>b^2$ 不成立.

则 $p\wedge q$，$(\neg p)\wedge(\neg q)$，$(\neg p)\vee q$ 均为假.

故选:**B**

【点睛】

本题考查复合命题的真假性，判断简单命题的真假是解题的关键，属于基础题.

8、**D**

【解析】

依次运行程序框图给出的程序可得

第一次：$S=2017+\sin\dfrac{\pi}{2}=2018, i=3$，不满足条件；

第二次：$S=2018+\sin\dfrac{3\pi}{2}=2018-1=2017, i=5$，不满足条件；

第三次：$S=2017+\sin\dfrac{5\pi}{2}=2018, i=7$，不满足条件；

第四次：$S=2018+\sin\dfrac{7\pi}{2}=2018-1=2017, i=9$，不满足条件；

第五次：$S=2017+\sin\dfrac{9\pi}{2}=2018, i=11$，不满足条件；

第六次：$S=2018+\sin\dfrac{11\pi}{2}=2018-1=2017, i=13$，满足条件，退出循环．输出 **1**．选 **D**.

9、**C**

【解析】

根据已知条件判断出数列 $\{S_n+1\}$ 是等比数列，求得其通项公式，由此求得 S_n.

【详解】

由于 $(S_n+1)(S_{n+2}+1)=(S_{n+1}+1)^2\ (n\in\mathrm{N}^*)$，所以数列 $\{S_n+1\}$ 是等比数列，其首项为 $S_1+1=a_1+1=2$，第二项为