2023-2024学年河北省唐山市高一下学期期末数学试题

一、单选题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z=1-i$，则 z 对应的点位于(　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知 $\overrightarrow{a}=(1,m)$， $\overrightarrow{b}=(2,4)$，若 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$，则 m 为(　)

A. -3　　B. -2　　C. 0　　D. 2

3. 某种新型牙膏需要选用两种不同的添加剂，现有芳香度分别为 1，2，3，4 的四种添加剂可供选用，则选用的两种添加剂芳香度之和为 5 的概率为(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

4. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=AA_1=2$，E 为棱 AC 的中点，则异面直线 A_1E 与 BC 所成角的余弦值为(　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{10}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

5. 为了解某块田地小麦的株高情况，随机抽取了 10 株，测量数据如下 (单位 cm) : 60，61，62，63，65，65，66，67，69，70，则第 40 百分位数是(　)

A. 62　　B. 63　　C. 64　　D. 65

6. 若圆锥的底面半径为 $\sqrt{3}$，高为 1，过圆锥顶点作一截面，则截面面积的最大值为(　)

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2π　　D. $2\sqrt{3}\pi$

7. 从 5 名男生和 4 名女生中任选 3 人去参加学校“献爱心，暖人心”志愿服务活动，则下列各事件中，互斥不对立的是(　)

A. “至少有 1 名女生”与“都是女生”

B. “至少有 1 名女生”与“至少有 1 名男生”

C. “恰有 1 名女生”与“恰有 2 名女生”

D. “至少有 1 名女生”与“至多有 1 名男生”

8. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $A=\frac{\pi}{3}$， $a=2.$ 若 $(\sin A-\sin B)(a\sin A+b\sin B)-(a-b)\sin^2 C=0$，则 $\triangle ABC$ 的面积为(　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. 1 或 2

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 已知一组数据 3，5，6，9，9，10 的平均数为$\overline{x}$，方差为s^2，在这组数据中加入一个数据 7 后得到一组新数据，其平均数为$\overline{x'}$，方差为s'^2，则下列判断正确的是(　　)

A. $\overline{x}=\overline{x'}$　　B. $\overline{x}<\overline{x'}$　　C. $s^2=s'^2$　　D. $s^2>s'^2$

10. 在$\triangle ABC$中，下列结论正确的是(　　)

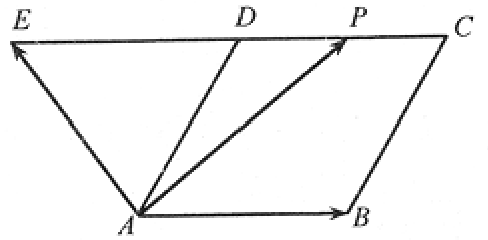
A. 若$A>B$，则$\sin A>\sin B$　　B. 若$\sin A>\sin B$，则$A>B$

C. 若$A>B$，则$\sin 2A>\sin 2B$　　D. 若 C 为钝角，则$\sin A<\cos B$

11. 若z_1，z_2是关于 x 的方程$x^2-2x+2=0$的两个虚根，则(　　)

A. $z_1=\overline{z_2}$　　B. $z_1^2+z_2^2>0$　　C. $(z_1+z_2)^2>0$　　D. $z_1^2\cdot z_2^2>0$

12. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^\circ$，延长边 CD 至点 E，使得$DE=CD$. 动点 P 从点 A 出发，沿菱形的边按逆时针方向运动一周回到 A 点，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AE}$，则(　　)



A. 满足$\lambda+\mu=1$的点 P 有且只有一个　　B. 满足$\lambda+\mu=2$的点 P 有两个

C. $\lambda+\mu$存在最小值　　D. $\lambda+\mu$不存在最大值

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 若复数$z_1=-2+i$，$z_2=1-3i$，其中 i 为虚数单位，则$|z_1-z_2|=$__________.

14. 甲、乙两人参加驾考科目一的考试，两人考试是否通过相互独立，甲通过的概率为0.6，乙通过的概率为0.5，则至少一人通过考试的概率为__________.

15. 若$\triangle ABC$的面积为 S，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且$4S=\tan A(b^2+c^2-5)$，则$a=$__________.

16. 在正六棱台$ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$中，$AB=4$，$A'B'=3$，$A'A=\sqrt{2}$，设侧棱延长线交于点 P，几何体$P-A'B'C'D'E'F'$的外接球半径为R_1，正六棱台$ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$的外接球半径为R_2，则此正六棱台的体积为__________，$\dfrac{R_1}{R_2}=$__________.

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

已知平面向量 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角为 60°，且 $|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=2$.

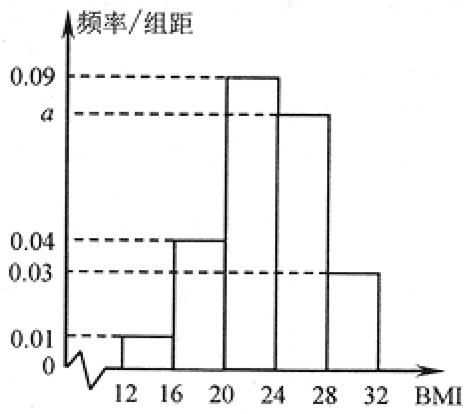
(1) 求 $|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$;

(2) 若 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 与 $2\overrightarrow{a}-k\overrightarrow{b}$ 垂直，求 k 的值.

18.（本小题 12 分）

近年来，我国肥胖人群的规模急速增长，常用身体质量指数 *BMI* 来衡量人体胖瘦程度.其计算公式是：

$BMI=\dfrac{体重(单位:kg)}{身高^2(单位:m^2)}$，成年人的 *BMI* 数值标准是：$BMI<18.5$ 为偏瘦；$18.5\leqslant BMI<24$ 为正常；$24\leqslant BMI<28$ 为偏胖；$BMI\geqslant 28$ 为肥胖.某公司随机抽取了 100 个员工的体检数据，将其 *BMI* 值分成以下五组：$[12,16),[16,20),[20,24),[24,28),[28,32]$，得到相应的频率分布直方图.



(1) 求 a 的值，并估计该公司员工 *BMI* 的样本数据的众数与中位数(精确到 0.1);

(2) 该公司共有 1200 名员工，用频率估计概率，估计该公司员工 *BMI* 数值正常的人数.

19.（本小题 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $2c\cos C+a\cos B+b\cos A=0$.

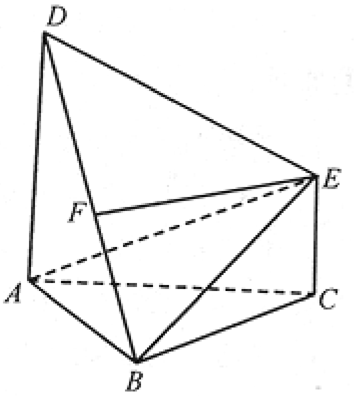
(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $c=3$，AB 边上的中线 $CD=1$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

20.（本小题 12 分）

如图，在四棱锥 $B-ACED$ 中，$AD//CE$，$AD\perp$ 平面 ABC，$AD=2$，$CE=1$，$\triangle ABC$ 是边长为 2

的等边三角形，F 为棱 BD 的中点.



(1) 证明：$EF//$ 平面 ABC;

(2) 求 AE 与平面 BCE 所成角的正弦值.

21.（本小题 12 分）

某工厂为加强安全管理，进行安全生产知识竞赛，规则如下：在初赛中有两轮答题：第一轮从 A 类的 5 个问题中任选两题作答，若两题都答对，则得 20 分，否则得 0 分;第二轮从 B 类的 4 个问题中任选两题依次作答，每答对一题得 20 分，答错得 0 分.若两轮总得分不低于 40 分，则晋级复赛.甲和乙同时参赛，已知甲每个问题答对的概率都为0.6，在 A 类的 5 个问题中，乙只能答对 4 个问题，在 B 类的 4 个问题中，乙答对的概率都为0.4，甲、乙回答任一问题正确与否互不影响.

(1) 求乙在第一轮比赛中得 20 分的概率;

(2) 以晋级复赛的概率大小为依据，甲和乙谁更容易晋级复赛?

22.（本小题 12 分）

如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AD\perp AB$，$CD=2AB=2AD=2\sqrt{2}$，M 是 CD 的中点，BD 与 AM 交于 O 点，将$\triangle ADM$ 沿 AM 向上折起，得到图 2 的四棱锥 $D'-ABCM$.

图 1

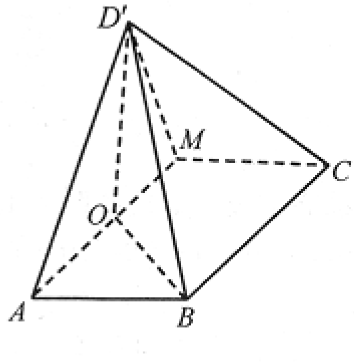


图 2

(1) 证明：$BC\perp$ 平面 $D'OB$;

(2) 若 $D'B=1$，求二面角 $D'-MC-B$ 的正切值.

答案和解析

1.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查复数的几何意义，属于基础题．

利用复数的几何意义直接求解．

【解答】

解：复数$z=1-i$对应点$(1,-1)$，在第四象限．

故选D．

2.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查向量共线的坐标表示的应用，属于基础题．

根据题意，由向量共线可得$1\times 4=2m$，解方程即可．

【解答】

解：因为$\overrightarrow{a}=(1,m)$，$\overrightarrow{b}=(2,4)$，

且$\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$，

则$1\times 4=\ 2m$．

解得$m=2$．

故选D．

3.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查古典概型及其计算，属于基础题．

利用列举法求出总的可能情况和所求事件的可能情况，即可求出结果．

【解答】

解：选用两种添加剂的可能情况为：

$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,4)$共6个，

选用的两种添加剂芳香度之和为5包含的可能情况为：

$(1,4),(2,3)$共2个，

所以选用的两种添加剂芳香度之和为 5 的概率为 $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

故选 B.

4.【答案】*A*

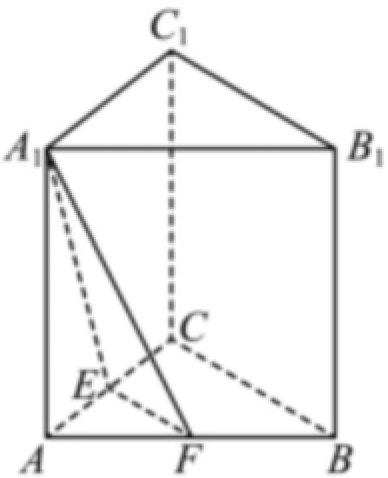
【解析】【分析】

本题考查异面直线所成角，利用余弦定理解三角形，属于基础题.

先利用线线平行确定异面直线 A_1E 与 *BC* 所成角，再利用勾股定理求得 A_1E, A_1F，最后利用余弦定理即可求解.

【解答】

解：取 *AB* 的中点 *F*，连接 *EF*，A_1F，



因为 *E* 为棱 *AC* 的中点，*F* 为 *AB* 的中点，

所以 $EF//BC$，

所以 $\angle FEA_1$(或其补角)为异面直线 A_1E 与 *BC* 所成角，

因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=2$，

所以 $EF=\frac{1}{2}BC=1, A_1E=A_1F=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

在 $\triangle FEA_1$ 中，由余弦定理得：

$$\cos\angle FEA_1=\frac{EF^2+A_1E^2-A_1F^2}{2EF\cdot A_1E}=\frac{1+5-5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}.$$

故选 A.

5.【答案】*C*

【解析】【分析】

本题考查百分位数，属于基础题.

根据 $10\times 40\%=4$，可知第 40 百分位数为第四个数与第五个数的平均数，由此即可求出结果.

【解答】

解：因为$10\times 40\%=4$，

所以第 40 百分位数是$\dfrac{63+65}{2}=64.$

故选$C.$

6.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查了圆锥中截面面积的最值问题，属于中档题.

求得圆锥的母线长，确定轴截面的顶角，从而求出截面面积的取值的最大值，即可求得答案.

【解答】

解：设圆锥的母线长为 l，则$l=\sqrt{3+1}=2$，

设圆锥的轴截面的两母线夹角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{2^2+2^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2\times 2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$, 即$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，

则过该圆锥的顶点作截面，截面上的两母线夹角设为$\alpha,\alpha\in(0,\dfrac{2\pi}{3}]$,

故截面的面积为$S=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\alpha\leqslant 2$，

截面的面积在$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时取到最大值，

故截面面积的最大值为$2.$

故选$A.$

7.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查了互斥事件，事件的包含和对立事件，属于基础题.

利用互斥事件，事件的包含和对立事件，逐项分析得结论.

【解答】

解：对于$A.$因为事件“都是女生”包含于事件“至少有 1 名女生”，故 A 错误；

对于$B.$因为两个事件都包含“有 1 名女生”的可能性，所以不互斥，故 B 错误；

对于$C.$因为两个事件是互斥且不对立的两个事件，故 C 正确；

对于$D.$因为两个事件不是互斥事件，例如“一男 2 女”，故 D 错误.

故选：$C.$

8.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查正弦定理及变形、三角形面积公式，属于中档题.

利用正弦定理化简已知式子得出 $(a-b)\left(a^2+b^2-c^2\right)=0$，即 $a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$，分两种情况代入三角形面积公式，即可求出结果.

【解答】

解：因为 $(\sin A-\sin B)(a\sin A+b\sin B)-(a-b)\sin^2 C=0$，

所以由正弦定理，得 $(a-b)\left(a^2+b^2\right)-(a-b)c^2=0$，

即 $(a-b)\left(a^2+b^2-c^2\right)=0$，

所以 $a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$，

因为 $A=\dfrac{\pi}{3}$， $a=2$，

所以当 $a=b$ 时， $\triangle ABC$ 为等边三角形，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$；

当 $a^2+b^2=c^2$ 时， $\triangle ABC$ 为直角三角形，

且 $\dfrac{a}{b}=\tan 60^\circ$， 则 $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选 B.

9.【答案】*AD*

【解析】【分析】

本题考查平均数和方差的求解，属于基础题.

计算出 $\overline{x}$， s^2， $\overline{x'}$， s'^2，进行比较，即可求出结果.

【解答】

解：由题意知， $\overline{x}=\dfrac{3+5+6+9+9+10}{6}=7$，

$$s^2=\frac{1}{6}\left[(3-7)^2+(5-7)^2+(6-7)^2+(9-7)^2+(9-7)^2+(10-7)^2\right]=\frac{19}{3},$$

因为在这组数据中加入一个数据 7 后得到一组新数据，

所以 $\overline{x'}=\dfrac{3+5+6+9+9+10+7}{7}=7$，

所以$\overline{x}=\overline{x'}$，故 A 正确，B 错误；

$$s'^2=\frac{1}{7}\left[(3-7)^2+(5-7)^2+(6-7)^2+(9-7)^2+(9-7)^2+(10-7)^2+(7-7)^2\right]=\frac{38}{7},$$

所以$s^2>s'^2$，故 C 错误，D 正确.

故选AD.

10.【答案】ABD

【解析】【分析】

本题考查正弦定理在解三角形中的应用以及三角函数性质，属于基础题.

由正弦定理以及三角函数性质结合反例判断即可.

【解答】

解：对于 A，若$A>B$，则$a>b$，

由正弦定理得到$2R\sin A>2R\sin B$，其中 R 为三角形 ABC 的外接圆半径，

则$\sin\ A>\sin\ B$，故 A 正确；

对于 B，若$\sin A>\sin B$，由正弦定理可得$\frac{a}{2R}>\frac{b}{2R}$，其中 R 为三角形 ABC 的外接圆半径，

所以$a>b$，则$A>B$，故 B 正确；

对于 C，若$A=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{6}$，满足$A>B$，但$\sin 2A=\sin 2B$，故 C 错误；

对于 D，若 C 为钝角，则$0<A+B<\frac{\pi}{2}$，

则$0<A<\frac{\pi}{2}-B<\frac{\pi}{2}$，

又$y=\sin x$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增，

所以$\sin A<\sin(\frac{\pi}{2}-B)=\cos B$，

即$\sin A<\cos B$，故 D 正确.

故选ABD.

11.【答案】ACD

【解析】【分析】

本题考查复数集内解方程、共轭复数、复数的乘法运算，属于基础题.

解方程求出z_1，z_2，再对各选项逐项判定，即可求出结果.

【解答】

解：因为$\Delta=(-2)^2-4\times1\times2=-4$，

所以方程$x^2-2x+2=0$的两个虚根为$x=\dfrac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$，

不妨设$z_1=1+i, z_2=1-i$，

则$z_1=\overline{z_2}$，故 *A* 正确；

${z_1}^2+{z_2}^2=(1+i)^2+(1-i)^2=2i+(-2i)=0$，故 *B* 错误；

$(z_1+z_2)^2=2^2=4>0$，故 *C* 正确；

$z_1^2\cdot z_2^2=2i\cdot(-2i)=-4i^2=4>0$，故 *D* 正确.

故选ACD.

12.【答案】*BC*

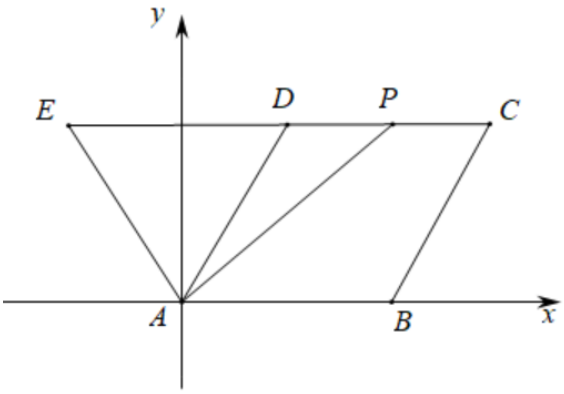
【解析】【分析】

本题考查平面向量基本定理，考查划归转化的思想方法，属于较难题.

建立平面直角坐标系，设菱形 *ABCD* 边长为 1，$P(x,y)$，$0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$，$0\leqslant y\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可求 *A*，*B*，*E* 三点坐标，从而可写出向量$\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}$的坐标，代入$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AE}$便可得到$(x,y)=(\lambda-\dfrac{1}{2}\mu,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu)$；从而得到$\lambda+\mu=x+\sqrt{3}y$，利用函数的单调性判断即可.

【解答】

解：以 *A* 为原点，*AB* 所在直线分别为 *x* 轴，垂直 *AB* 的直线为 *y* 轴，建立如图所示平面直角坐标系，



设菱形 *ABCD* 边长为 1，$P(x,y)$，$0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$，$0\leqslant y\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

则：$A(0,0)$，$B(1,0)$，$E(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$；

$\therefore\overrightarrow{AP}=(x,y),\overrightarrow{AB}=(1,0),\overrightarrow{AE}(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$；

$\therefore$由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AE}$得，$(x,y)=(\lambda-\dfrac{1}{2}\mu,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu)$；