图形的旋转

聚焦考点

考点一　判断生活中的旋转现象　　考点二　找旋转中心、旋转角、对应点

考点三　根据旋转的性质求解　　考点四　求绕原点旋转 90°点的坐标

考点五　坐标与旋转规律问题　　考点六　旋转综合题——几何变换

典型例题

考点一　判断生活中的旋转现象

例题：（2022·广东汕尾·九年级期末）下列运动中　属于旋转运动的是（　　）

A．小明向北走了 4 米　　*B*．一物体从高空坠下

C．电梯从 1 楼到 12 楼　　*D*．小明在荡秋千

【答案】*D*

【解析】

【分析】

旋转定义：物体围绕一个点或一个轴作圆周运动　根据旋转定义对各选项进行一一分析即可．

【详解】

解：*A*. 小明向北走了 4 米　是平移　不属于旋转运动　故选项 *A* 不合题意；

B. 一物体从高空坠下　是平移　不属于旋转运动　故选项 *B* 不合题意；

C. 电梯从 1 楼到 12 楼　是平移　不属于旋转运动　故选项 *C* 不合题意；

D. 小明在荡秋千　是旋转运动　故选项 *D* 符合题意．

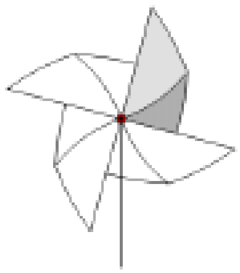
故选 *D*．

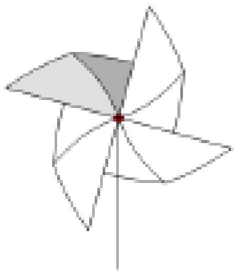
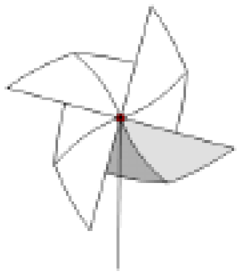
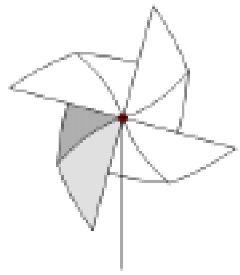
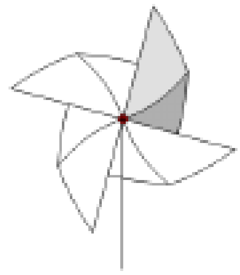
【点睛】

本题考查图形旋转运动　掌握旋转定义与特征　旋转中心　旋转方向　旋转角度是解题关键．

【变式训练】

1．（2022·全国·九年级课时练习）如图　在平面内将风车绕其中心旋转180°后所得到的图案是（ ）



A．　B．　C．　D．

【答案】*C*

【解析】

【分析】

根据旋转的性质　旋转前后　各点的相对位置不变　得到的图形全等　找到关键点　分析选项可得答案.

【详解】

解：根据旋转的性质　旋转前后　各点的相对位置不变　得到的图形全等　风车图案绕中心旋转 180°后　阴影部分的等腰直角三角形的顶点向下　得到的图案是 *C*.

故选：*C*.

【点睛】

本题考查了利用旋转设计图案的知识　图形的旋转是图形上的每一点在平面上绕某个固定点旋转固定角度的位置移动　其中对应点到旋转中心的距离相等　旋转前后图形的大小和形状没有改变.

2．（2022·福建省诏安第一中学八年级期中）下列现象不是旋转的是（　　）

A．传送带传送货物； *B*．飞速转动的电风扇；

C．钟摆的摆动； *D*．自行车车轮的运动

【答案】*A*

【解析】

【分析】

根据旋转的定义依次分析每个选项即可.

【详解】

解：*A* 选项中的现象属于平移　故 *A* 正确；

B、*C*、*D* 选项中的现象都属于旋转；故都不正确；

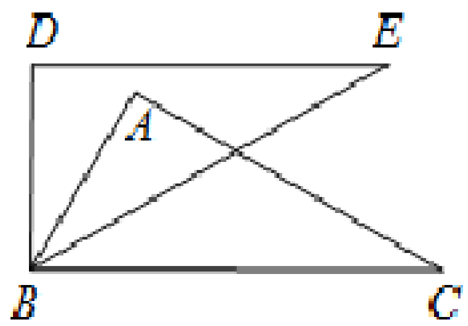
故选：*A*.

【点睛】

本题考查了旋转的定义，解题关键是牢记旋转指的是在平面内，将一个图形绕一点按某个方向转动一个角度，这样的运动叫做图形的旋转．

考点二 找旋转中心、旋转角、对应点

例题：（2022·重庆大渡口·八年级期末）如图，将△ABC绕点B逆时针旋转30°得到△DBE，则∠ABD的度数为（　　）



A．20°　　B．30°　　C．40°　　D．60°

【答案】B

【解析】

【分析】

根据题意和图形找到旋转角∠ABD=30°即可求解．

【详解】

解：∵将△ABC绕点B逆时针旋转30°得到△DBE

∴旋转角∠ABD=30°

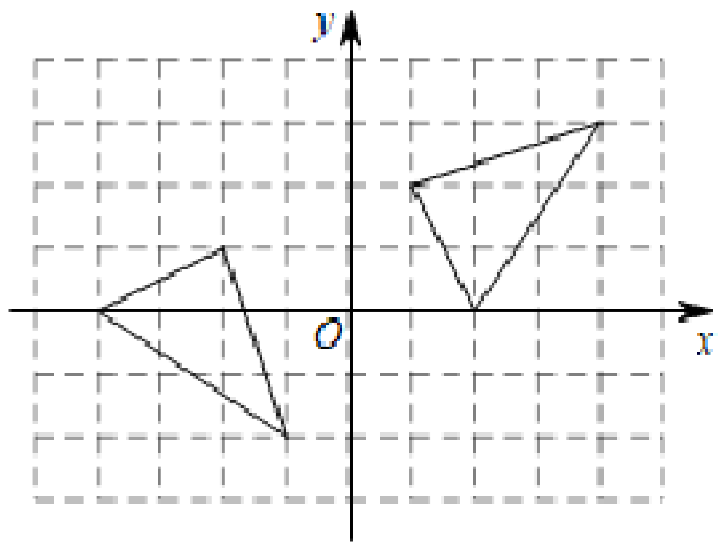
故选：B．

【点睛】

本题考查旋转角，找到旋转角是解题关键．

【变式训练】

1．（2021·河南周口·九年级期中）如图，在平面直角坐标系中，两个三角形的顶点都在格点上，其中一个是另一个绕着某定点旋转得到的，则这个定点的坐标为__________．



【答案】(–1，3)

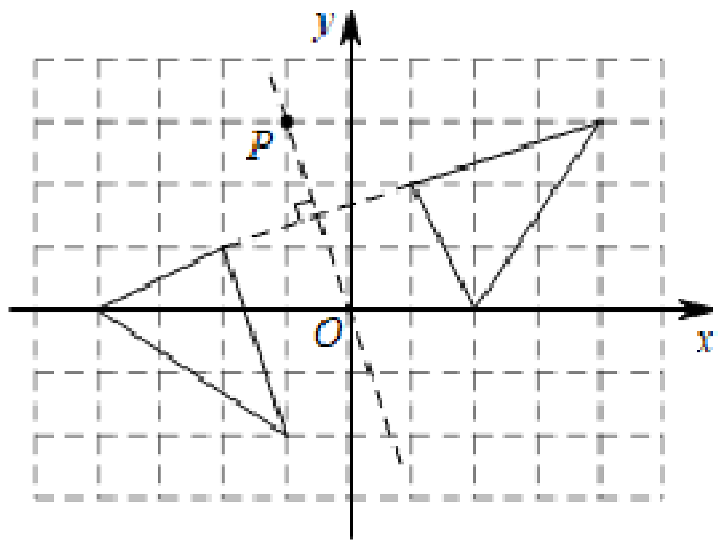
【解析】

【分析】

连接对应点　作对应点连线的垂直平分线　垂直平分线的交点即为所求.

【详解】

如图　点 P 即为所求

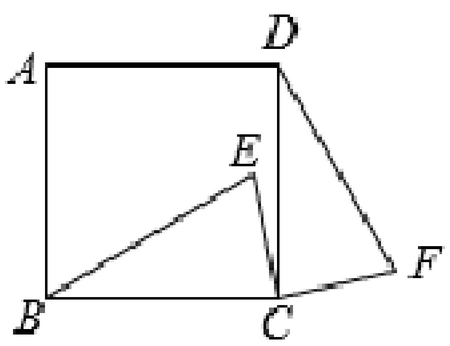


故答案为：(-1　3)

【点睛】

本题主要考查了旋转中心的性质　熟练的掌握“旋转中心在对应点连线的垂直平分线交点上”是解题的关键.

2.（2022·河南洛阳·七年级期末）如图所示　四边形 $ABCD$ 中　$\angle ECF=\angle CDA$　$CD\perp AD$ 于点 D　$\triangle BEC$ 旋转后能与$\triangle DFC$ 重合.



(1)旋转中心是哪一点？

(2)旋转了多少度？

(3)若$\angle EBC$=30°　$\angle BCE$=80°　求$\angle F$的度数.

【答案】(1)点C为旋转中心

(2)旋转了90°或270°

(3)70°

【解析】

【分析】

（1）观察图形　即可得出结果；

（2）先根据题意得出$\angle ECF$为旋转角　再根据垂直的定义求解　分顺时针和逆时针旋转两种情况；

（3）根据旋转的性质可得$\triangle BCE \cong \triangle DCF$　再根据全等三角形的性质及三角形的内角和即可求解.

(1)

$\because$ $\triangle BEC$旋转后能与$\triangle DFC$重合

$\therefore$点C为旋转中心；

(2)

$\because$ $\triangle BEC$旋转后能与$\triangle DFC$重合

$\therefore \angle ECF$为旋转角

$\because$ $CD \perp AD$

$\therefore \angle CDA = 90°$

$\because \angle ECF = \angle CDA$

$\therefore \angle ECF = 90°$

$\therefore$顺时针旋转了90°或逆时针旋转了270°

$\therefore$旋转了90°或270°；

(3)

$\because$ $\triangle BEC$旋转后能与$\triangle DFC$重合

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF$

$\therefore \angle E = \angle F$

在$\triangle BCE$中　$\angle BCE + \angle EBC + \angle E = 180°$

$\because \angle EBC = 30°, \angle BCE = 80°$

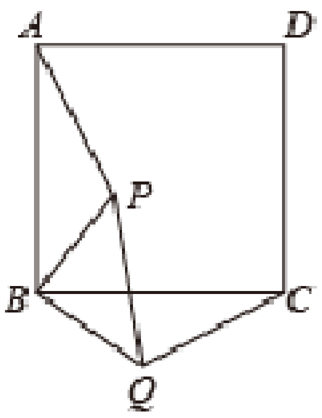
$\therefore \angle E = 70° = \angle F$.

【点睛】

本题考查了旋转的性质及全等三角形的性质　垂直的定义　三角形的内角和定理　熟练掌握知识点是解题的关键.

考点三 根据旋转的性质求解

例题：（2022·海南省直辖县级单位·七年级期末）如图所示　点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点　$\triangle ABP$ 绕点 B 顶时针方向能转 $90°$ 到达 $\triangle CBQ$ 的位置　连接 PQ　则 $\angle BQP$ 的度数为（　　）



A．$90°$　　　　B．$60°$　　　　C．$45°$　　　　D．$30°$

【答案】C

【解析】

【分析】

由旋转性质得 $BQ=BP$　$\angle PBQ=90°$　则 $\triangle BPQ$ 是等腰直角三角形　即可得出 $\angle BQP$ 的度数.

【详解】

解：∵ $\triangle ABP$ 绕点 B 顶时针方向能转 $90°$ 到达 $\triangle CBQ$ 的位置

∴ $BQ=BP$　$\angle PBQ=90°$

∴ $\triangle BPQ$ 是等腰直角三角形

∴ $\angle BQP=45°$

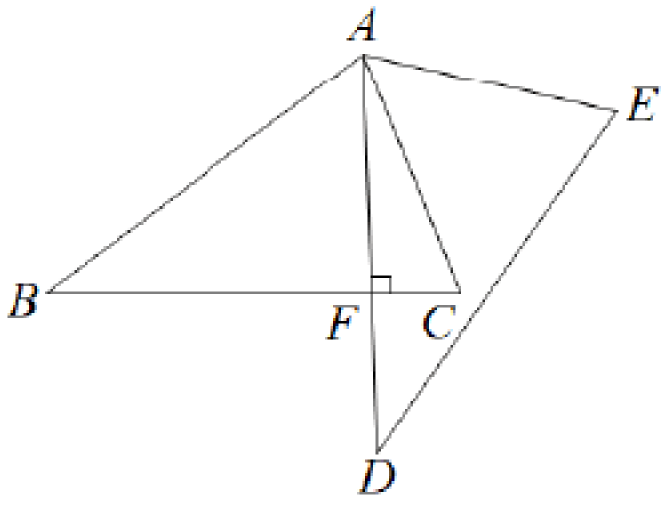
故选：C.

【点睛】

本题考查旋转的性质　等腰直角三角形的性质　熟练掌握等腰直角三角形的性质是解题的关键.

【变式训练】

1．（2022·山东枣庄·八年级期末）如图　将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 $55°$　得到 $\triangle ADE$　若 $\angle E=65°$　且 $AD \perp BC$ 于点 F　则 $\angle BAC$ 的度数为（　　）



A．65°　　　　B．70°　　　　C．75°　　　　D．80°

【答案】D

【解析】

【分析】

由旋转得到$\angle CAE=55°,\angle BAC=\angle DAE$，$\angle C=\angle E$　根据题意解出$\angle FAC=25°$　据此解答．

【详解】

解：∵旋转

$\therefore \angle CAE=55°,\angle BAC=\angle DAE$，$\angle C=\angle E$

∵$AD\perp BC$　$\angle E=65°$

$\therefore \angle FAC=90°-\angle C=90°-\angle E=90°-65°=25°$

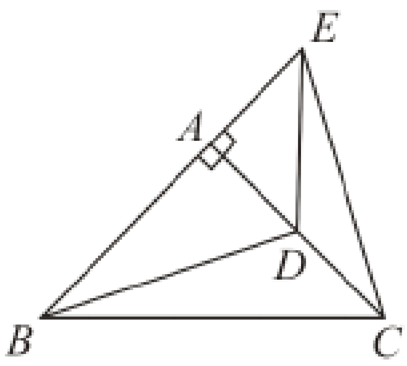
$\therefore \angle BAC=\angle DAE=\angle FAC+\angle CAE=25°+55°=80°$

故选：D．

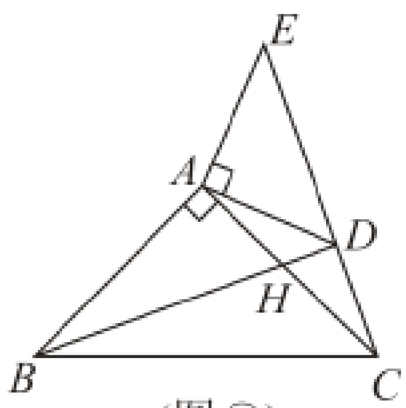
【点睛】

本题考查旋转的性质、直角三角形两锐角互余等知识　是基础考点　掌握相关知识是解题关键．

2．（2022·山东青岛·七年级期末）有公共顶点的等腰直角三角形ACB与等腰直角三角形ADE按如图①所示放置　$\angle BAC=\angle DAE=90°$　$AB=AC$　$AD=AE$　点D在AC上　点E在BA的延长线上．连接BD　CE．



(图①)



(图②)

(1)【观察猜想】

BD与CE之间的数量关系是_______；位置关系是______.

(2)【探究证明】

将等腰直角三角形ADE 绕点A逆时针旋转　如图②所示　使点C　D　E在同一条直线上　连接BD　交AC于点H． BD与CE之间的关系是否仍然成立？请说明理由

【答案】(1) $BD=CE$　$BD\perp CE$

(2)成立　理由见解析

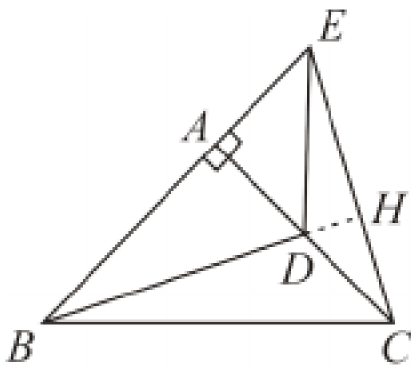
【解析】

【分析】

（1）由“SAS”可证$\triangle ABD\cong\triangle ACE$　可得$BD=CE$　$\angle ABD=\angle ACE$　由余角的性质可证$BD\perp CE$;

（2）根据条件证明$\triangle BAD\cong\triangle CAE$　即可证明$BD\perp CE$.

（1）解：延长BD交EC于H

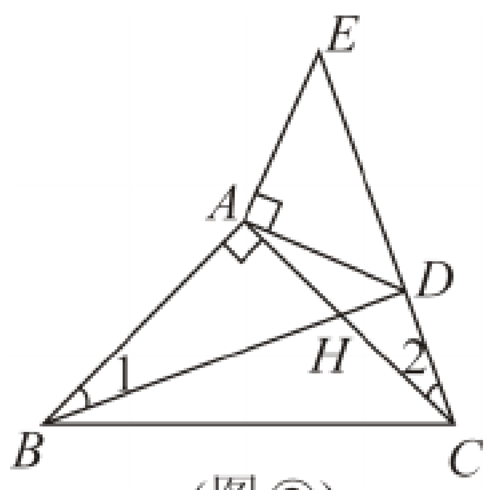


(图①)

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中 $\begin{cases}AB=AC\\ \angle BAD=\angle CAE=90^\circ\\ AD=AE\end{cases}$　∴$\triangle ABD\cong\triangle ACE$（$SAS$）　∴$BD=CE$　$\angle ABD=\angle ACE$

∵$\angle ACE+\angle AEC=90^\circ$　∴$\angle ABD+\angle AEC=90^\circ$　∴$\angle BHE=90^\circ$　∴$BD\perp CE$　故答案为：$BD=CE$　$BD\perp CE$;

（2）证明：结论仍然成立　理由如下：∵$\angle BAC=\angle DAE$　∴$\angle BAC+\angle CAD=\angle DAE+\angle CAD$　∴$\angle BAD=\angle CAE$　又∵$AB=AC$　$AD=AE$　∴$\triangle BAD\cong\triangle CAE$　∴$BD=CE$　$\angle 1=\angle 2$　∵$\angle AHB=\angle DHC$　∴$\angle 1+\angle AHB=\angle 2+\angle DHC$　∵$\angle BAC=90^\circ$　∴$\angle 1+\angle AHB=90^\circ$　∴$\angle 2+\angle DHC=90^\circ$　∴$\angle HDC=90^\circ$　∴$BD\perp CE$.



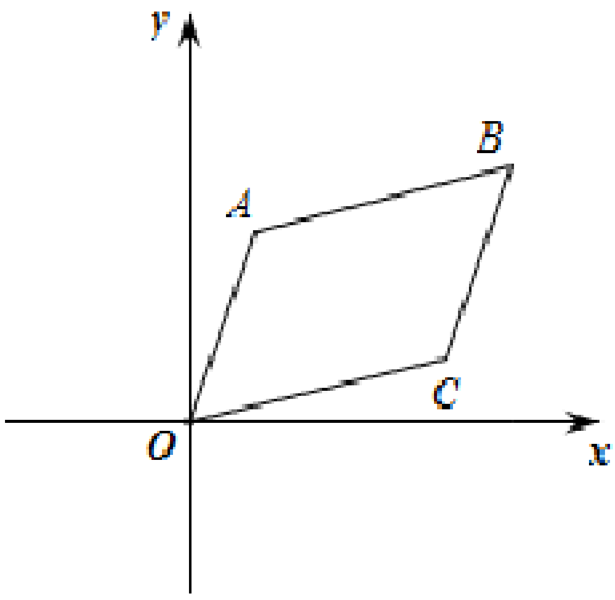
(图②)

【点睛】

本题是几何变换综合题　考查了全等三角形的判定和性质　等腰直角三角形的性质　证明三角形全等是解题的关键.

考点四 求绕原点旋转 90°点的坐标

例题：（2022·广东佛山·八年级期末）如图　$A(1,3),C(4,1)$　将平行四边行 $ABCO$ 绕原点 O 逆时针旋转 $90°$　则点 B 的对应点 B' 的坐标是（　　）



A．$(-3,5)$　　B．$(-4,5)$　　C．$(-5,3)$　　D．$(-5,4)$

【答案】B

【解析】

【分析】

如图　连接 OB、AC 交于点 O　求出点 O 坐标　可得点 B 坐标　连接 OB'　分别过点 B'、B 作 y 轴、x 轴的垂线　垂足为 E、F　证明△$B'OE$≌△BOF（AAS）　求出 $OE=OF=5$　$B'E=BF=4$ 即可得出答案.

【详解】

解：连接 OB、AC 交于点 M

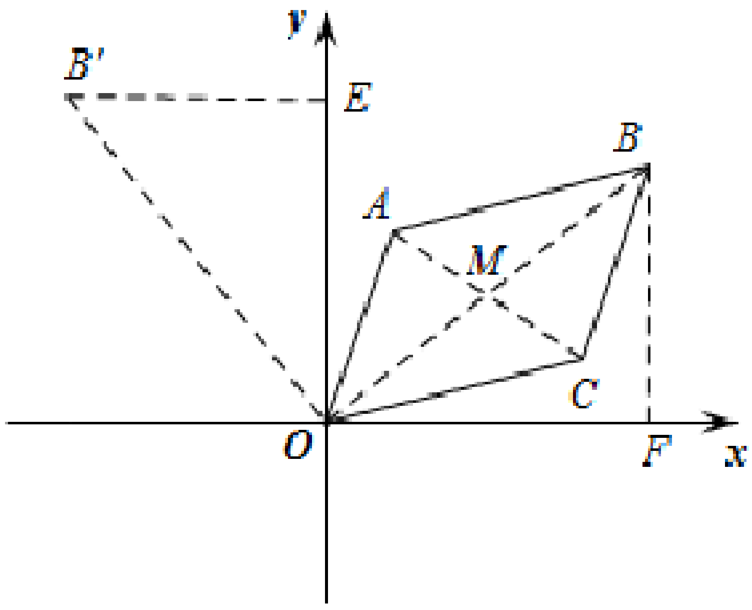
∵ $A(1,3),C(4,1)$

∴M（$\frac{1+4}{2}$　$\frac{3+1}{2}$）　即 M（$\frac{5}{2}$　2）

∴B（5　4）

将平行四边行 $ABCO$ 绕原点 O 逆时针旋转 $90°$　则点 B 的对应点 B'

连接 OB'　分别过点 B'、B 作 y 轴、x 轴的垂线　垂足为 E、F



则 $OF=5$　$BF=4$　$\angle B'EO=\angle OFB=90°$　$OB'=OB$

∵ $\angle B'OB=\angle EOF=90°$

∴ $\angle B'OE=\angle BOF$

∴ $\triangle B'OE\cong\triangle BOF$（$AAS$）

∴ $OE=OF=5$　$B'E=BF=4$

∴ $B'(-4,5)$

故选：B.

【点睛】

本题考查了坐标与图形　平行四边形的性质　旋转的性质　全等三角形的判定和性质等　求出点 B 的坐标是解答此题的关键.

【变式训练】

1.（2022·全国·九年级课时练习）平面直角坐标系中　O 为坐标原点　点 A 的坐标为 $(-5,1)$　将 OA 绕原点按逆时针方向旋转 $90°$ 得 OB　则点 B 的坐标为（　　）

A．$(-5,1)$　　B．$(-1,-5)$　　C．$(-5,-1)$　　D．$(-1,5)$

【答案】B

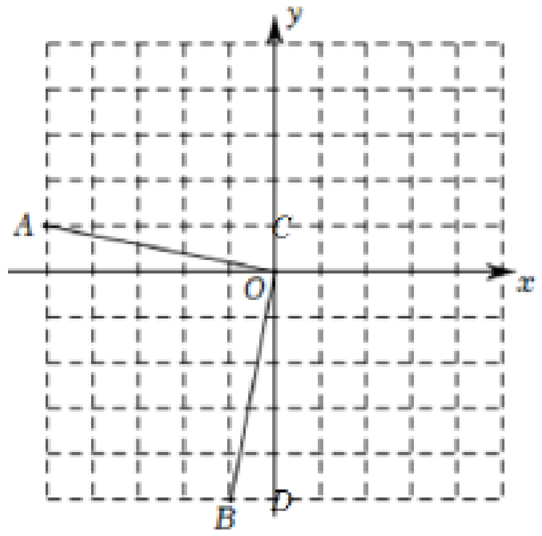
【解析】

【分析】

根据题意证得 $\triangle AOC\cong\triangle OBD$　可得结论.

【详解】

解：如图



根据题意得：$\angle AOB=90°$　$\angle ACO=\angle BDO=90°$　$OA=OB$

∴$\angle AOC+\angle BOD=90°$　$\angle AOC+\angle OAC=90°$

∴$\angle BOD=\angle OAC$

∴$\triangle AOC\cong\triangle OBD$

∴$BD=OC$　$OD=AC$

∵点A的坐标为$(-5,1)$

∴$BD=OC=1$　$OD=AC=5$

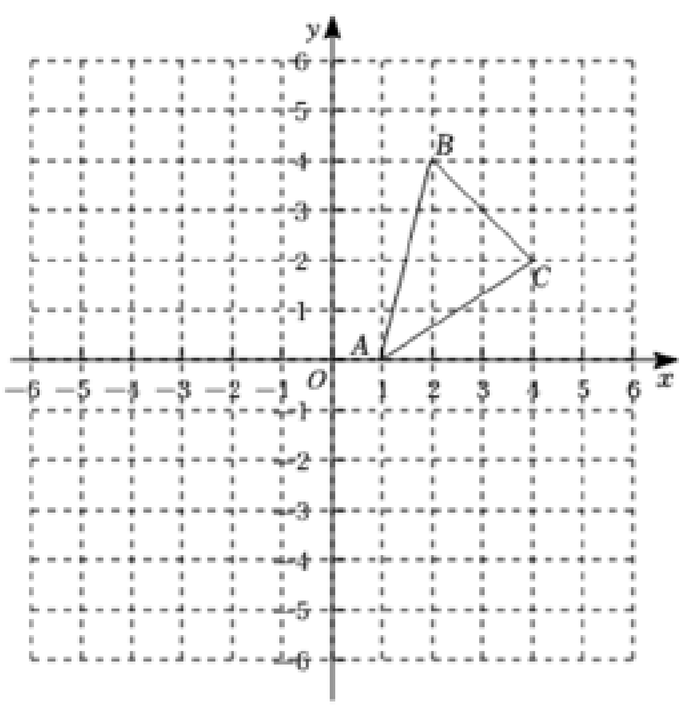
∴$B(-1,-5)$.

故选：B.

【点睛】

本题考查坐标与图形变化　旋转　解题的关键是熟练掌握旋转的性质　属于中考常考题型.

2．（2022·四川成都·八年级期末）如图　方格纸中每个小正方形的边长都是1个单位长度　建立平面直角坐标系xOy　$\triangle ABC$的三个顶点坐标分别为$A(1,0)$　$B(2,4)$　$C(4,2)$.



(1)把$\triangle ABC$向左平移4个单位　再向上平移2个单位　画出平移后的$\triangle A_1B_1C_1$；

(2)画出$\triangle ABC$绕原点O按顺时针方向旋转$90°$后的图形$\triangle A_2B_2C_2$　并直接写出对应点连线段BB_2的长度______.

【答案】(1)见解析

(2)见解析　$2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】

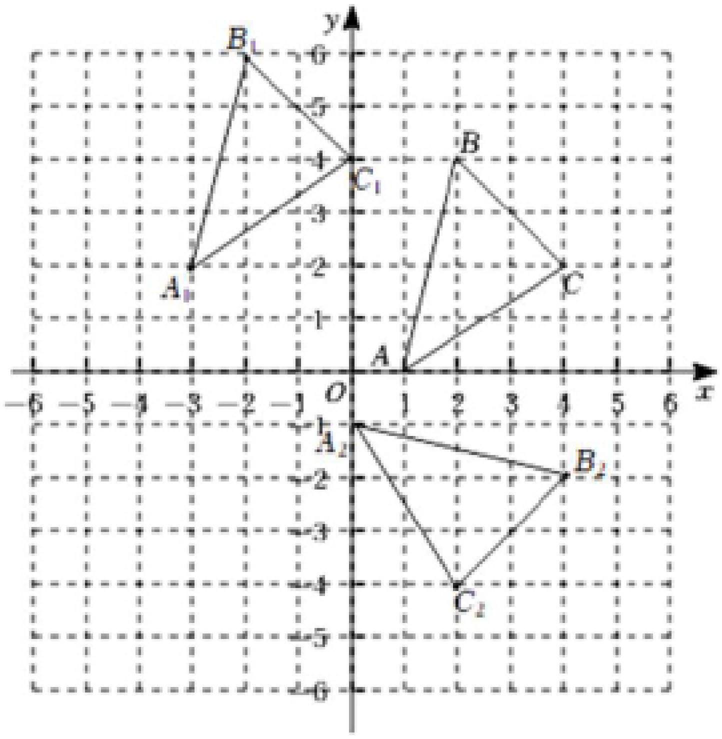
(1)利用平移变换的性质分别作出A　B　C的对应点A_1　B_1　C_1即可；

(2)利用旋转变换的性质分别作出A　B　C的对应点A_2　B_2　C_2即可.

（1）解：如图　$\triangle A_1B_1C_1$即为所求；

（2）如图　$\triangle A_2B_2C_2$即为所求．线段BB_2的长度$=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$．故答案为：

$2\sqrt{10}$．

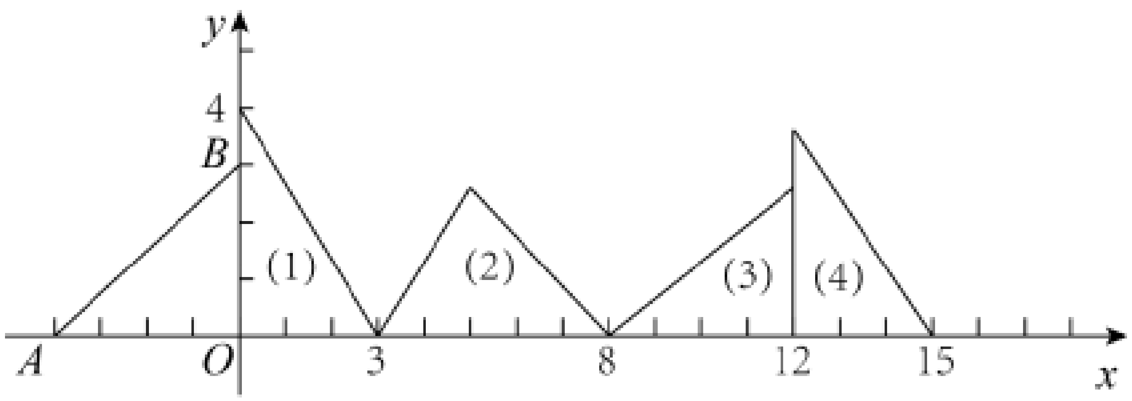


【点睛】

本题考查作图　旋转变换　平移变换等知识　解题的关键是理解题意　灵活运用所学知识解决问题.

考点五 坐标与旋转规律问题

例题：（2022·全国·九年级专题练习）如图　在平面直角坐标系中　已知点$A(-4,0)$、$B(0,3)$　对$\triangle AOB$连续作旋转变换依次得到三角形（1）　（2）　（3）　（4）　…　则第（6）个三角形的直角顶点的坐标是（　　）.



A．$(12,0)$　　B．$(12,5)$　　C．$(24,0)$　　D．$(24,3)$

【答案】C

【解析】

【分析】

先计算出 AB，然后根据旋转的性质观察△OAB 连续作旋转变换，得到△OAB 每三次旋转后回到原来的状态，并且每三次向前移动 3+4+5=12 个单位，于是判断三角形（6）和△OAB 的状态一样，△OAB 向前移动了 24 个单位，由此可解．

【详解】

解：∵点 $A(-4,0)$，$B(0,3)$

∴$OB=3$，$OA=4$

∴根据勾股定理得：$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$．

∵对△OAB 连续作如图所示的旋转变换

∴△OAB 每三次旋转后回到原来的状态，并且每三次向前移动了 3+4+5=12 个单位

∴三角形（6）和△AOB 的状态一样

∴三角形（6）的直角顶点的横坐标为 2×12=24，纵坐标为 0

∴三角形（6）的直角顶点的坐标为（24，0）.

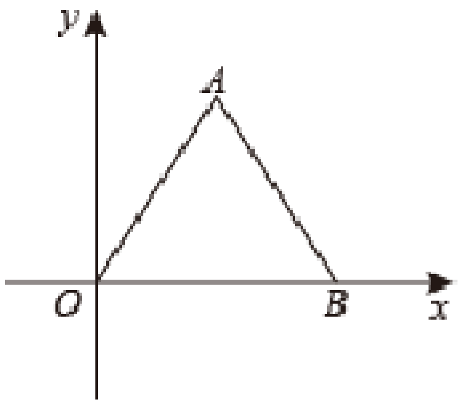
故选 C．

【点睛】

本题考查了坐标与图形变化−旋转，勾股定理的应用，观察图形，发现每 3 个三角形为一个循环组依次循环是解题的关键．

【变式训练】

1．（2022·全国·九年级专题练习）如图，已知等边三角形 OAB，顶点 $O(0,0)$，$B(1,0)$，将△OAB 绕原点 O 顺时针旋转，每次旋转 90°，则第 2021 次旋转结束时，顶点 A 的坐标为（　　）



A．$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B．$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　C．$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】

由点B的旋转周期为4知点A旋转2021次后的坐标与旋转1次后的坐标相同　再结合图形得出点A旋转1次后的坐标即可得．

【详解】

解：$\because 2021=4\times505+1$

$\therefore$每4次一个循环　第2021次绕原点O顺时针旋转结束时　相当于ΔOAB绕点O顺时针旋转1次

$\because O(0,0)$　　$B(1,0)$

$\therefore$等边三角形OAB的边长为1

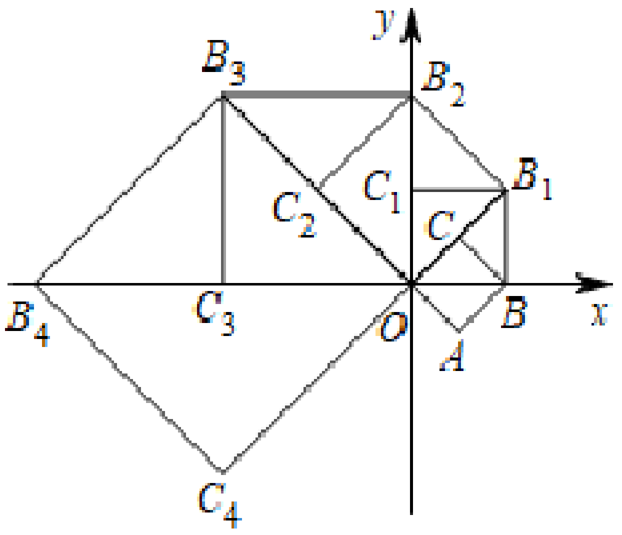
$\therefore$第2021次旋转结束时　顶点A的坐标为$(\frac{\sqrt{3}}{2}\quad -\frac{1}{2})$．

故选：D．

【点睛】

本题考查了坐标与图形变化－旋转　解题的关键是掌握图形或点旋转之后要结合旋转的角度和图形的特殊性质来求出旋转后的点的坐标．常见的是旋转特殊角度如：30°　45°　60°　90°　180°．

2．（2022·广东韶关·八年级期末）如图　在平面直角坐标系xOy中　有一边长为1的正方形$OABC$　点B在x轴的正半轴上　如果以对角线OB为边作第二个正方形OBB_1C_1　再以对角线OB_1为边作第三个正方形$OB_1B_2C_2$　…　照此规律作下去　则B_2的坐标是________；B_{2022}的坐标是________．



【答案】 $(0,2\sqrt{2})$ $\left(0,-(\sqrt{2})^{2023}\right)$

【解析】

【分析】

根据已知条件和勾股定理求出OB_2的长度即可求出B_2的坐标 再根据题意和图形可看出每经过一次变化都顺时针旋转$45°$ 边长都乘以$\sqrt{2}$ 所以可求出从B到B_{2022}变化的坐标.

【详解】

解：$\because$四边形$OABC$是正方形 $OB=\sqrt{2}$

$\therefore OB_1=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

$\therefore OB_2=\sqrt{OB_1^2+B_1B_2^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore B_2$的坐标是$(0,2\sqrt{2})$

根据题意和图形可看出每经过一次变化 都顺时针旋转$45°$ 边长都乘以$\sqrt{2}$

$\therefore$旋转 8 次则OB旋转一周

$\because$从B到B_{2022}经过了 2022 次变化

$2022\div 8=252\ldots\ldots 6$

$\therefore$从B到B_{2022}与B_6都在y轴负半轴上

$\therefore$点B_{2022}的坐标是$(0\quad -(\sqrt{2})^{2023})$.

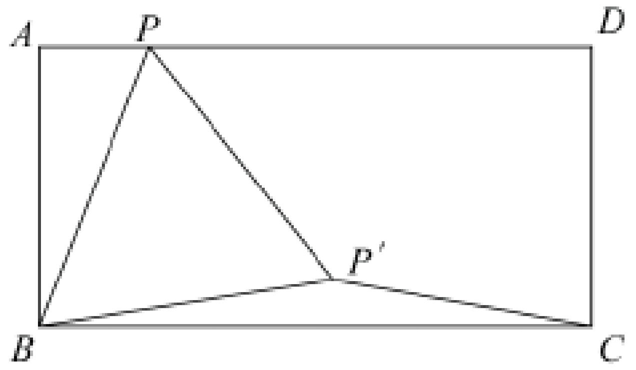
故答案为：$(0\quad 2\sqrt{2})$ $(0\quad -(\sqrt{2})^{2023})$.

【点睛】

本题主要考查了规律型-点的坐标 解决本题的关键是利用正方形的变化过程寻找点的变化规律.

考点六 旋转综合题——几何变换

例题：（2022·广东广州·中考真题）如图　在矩形 $ABCD$ 中　$BC=2AB$　点 P 为边 AD 上的一个动点　线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 60°得到线段 BP'　连接 PP'　CP'. 当点 P' 落在边 BC 上时　$\angle PP'C$ 的度数为________；当线段 CP' 的长度最小时　$\angle PP'C$ 的度数为________



【答案】　120°##120 度　75°##75 度

【解析】

【分析】

由旋转性质及旋转角知△BPP'为等边三角形　得到$\angle PP'B=60°$；当点 P' 落在边 BC 上时　$\angle PP'C=180°-\angle PP'B=120°$；将线段 BA 绕点 B 逆时针旋转 60°后点 A 落在点 E　连接 BE　得到△ABP≌△$EBP'(SAS)$　再证明△ABP 为等腰直角三角形　进而得到$\angle EP'B=\angle APB=45°$

最后当 $CP'\perp EF$ 于 H 时　CP'有最小值　由此可以求出$\angle PP'C=\angle EP'C-\angle EP'P=90°-15°=75°$.

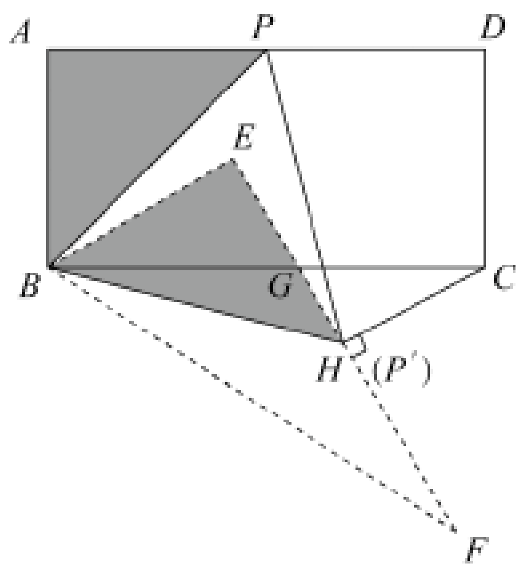
【详解】

解：由线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 60°得到线段 BP'可知　△BPP'为等边三角形

∴$\angle PP'B=60°$

当点 P' 落在边 BC 上时　$\angle PP'C=180°-\angle PP'B=180°-60°=120°$；

将线段 BA 绕点 B 逆时针旋转 60°　点 A 落在点 E　连接 BE　设 EP'交 BC 于 G 点　如下图所示：



则$\angle ABP=\angle ABE-\angle PBE=60°-\angle PBE$　$\angle EBP'=\angle PBP'-\angle PBE=60°-\angle PBE$

∴$\angle ABP=\angle EBP'$

且 $BA=BE$　$BP=BP'$

∴△ABP≌△EBP'(SAS),

∴$AP=EP'$　$\angle E=\angle A=90°$

由点 P' 落在边 BC 上时　$\angle PP'C=120°$可知　$\angle EGC=120°$

∴$\angle CGP'=\angle EGB=180°-120°=60°$

∴△EBG 于△$P'CG$ 均为 30°、60°、90°直角三角形

设 $EG=x$　$BC=2y$

则 $BG=2EG=2x$　$CG=BC-BG=2y-2x$　$GP'=\frac{1}{2}CG=y-x$

∴$EP'=EG+GP'=x+(y-x)=y=\frac{1}{2}BC$

又已知 $AB=\frac{1}{2}BC$

∴$EP'=AB$

又由△ABP≌△EBP'知：$AP=EP'$

∴$AB=AP$

∴△ABP 为等腰直角三角形

∴$\angle EP'B=\angle APB=45°$　$\angle EP'P=60°-\angle EP'B=60°-45°=15°$

当 $CP'\perp EF$ 于 H 时　CP'有最小值

此时$\angle PP'C=\angle EP'C-\angle EP'P=90°-15°=75°$

故答案为：120°　75°.

【点睛】

本题考察了三角形全等的判定方法、矩形的性质、旋转的性质及等腰三角形的性质　属于四边形的综合题　难度较大　熟练掌握各图形的性质是解题的关键.

【变式训练】

1.（2022·重庆大渡口·八年级期末）在△ABC 中　$AC=BC$　$\angle ACB=90°$　点 D 在直线 AB 上　连接 CD　将线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 90°得到线段 CE　连接 DE　点 F 是线段 DE 的中点　连接 AF.

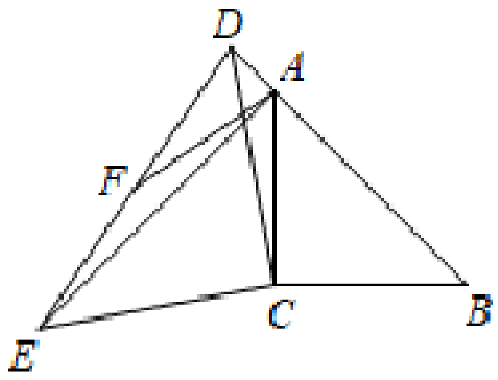


图1

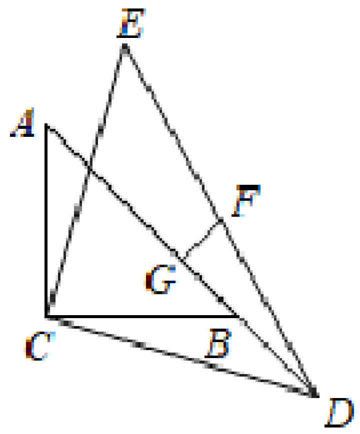


图2

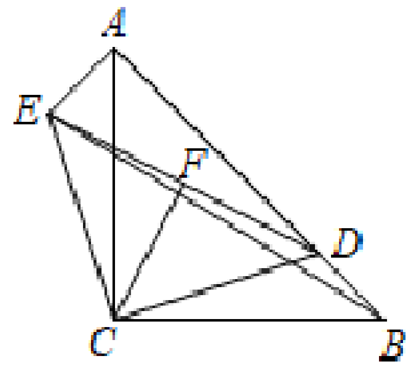


图3

(1)如图 1　当点 D 在 BA 的延长线上时　连接 AE　若 $DE=4$　求线段 AF 的长度；

(2)如图 2　当点 D 在 AB 的延长线上时　若点 G 是线段 AD 的中点　连接 FG　求证：$BD=2FG$；

(3)如图 3　连接 CF 和 BE　若 $BC=2\sqrt{2}$　当线段 CF 取最小值时　请直接写出 $\triangle BCE$ 的面积.

【答案】(1)$AF=2$

(2)证明见解析

(3)$\triangle BCE$ 的面积为 2

【解析】

【分析】

（1）根据旋转性质和全等三角形的判定证明 $\triangle ACE\cong\triangle BCD$ 得到 $\angle CAE=\angle CBD$　再根据等腰直角三角形的性质证得 $\angle DAE=\angle BAE=90°$　然后直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半求解即可；

（2）连接 AE　证明 $\triangle CAE\cong\triangle CBD$ 得到 $AE=BD$　利用三角形的中位线性质得到 $AE=2FG$ 即可证的结论；

（3）由等腰直角三角形的性质知当 CD 最小时　CF 最小　根据垂线段最短知当 $CD\perp AB$ 时　CD 最小　即 CF 最小　证明 $DE\parallel BC$　利用等高模型得到 $S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ 即可求解.

（1）解：由旋转性质得：$\angle DCE=90°$　$CE=CD$　∵$\angle ACB=90°$　$AC=BC$　∴$\angle DCE+\angle DCA=\angle ACB+\angle DCA$　$\angle CAB=\angle CBA=45°$　∴$\angle ACE=\angle BCD$　在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中 $\begin{cases}AC=BC\\ \angle ACE=\angle BCD\\ CE=CD\end{cases}$　∴$\triangle ACE\cong\triangle BCD$（SAS）　∴$\angle CAE=\angle CBD=45°$　∴$\angle BAE=\angle CAE+\angle CAB=90°$　∴$\angle DAE=90°$　∵F 为线段 DE 的中点　$DE=4$　∴$AF=\frac{1}{2}DE=2$；

（2）证明：连接 AE　∵$\angle ACB=\angle DCE=90°$　∴$\angle ACB-\angle BCE=\angle DCE-\angle BCE$　∴$\angle ACE=\angle BCD$　又 $AC=BC$　$CE=CD$　∴$\triangle ACE\cong\triangle BCD$（SAS）　∴$BD=AE$　∵F 为线段 DE 的中点　点 G 是线段 AD 的中点

∴GF为△AED的中位线　∴AE=2FG　∴BD=2FG；

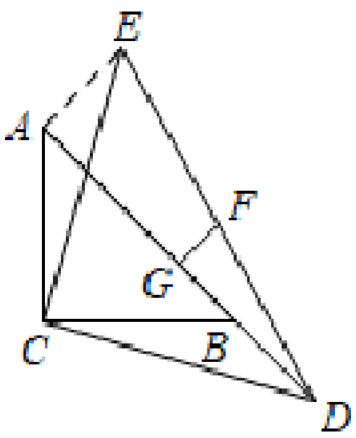
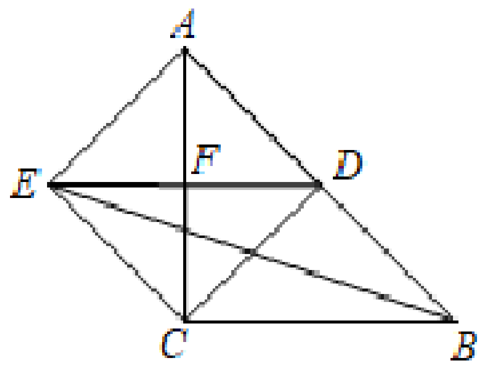


图2

（3）解：∵∠DCE=90°　CE=CD　∴△DCE为等腰直角三角形　∠CDE=∠CED=45°　又F为斜边DE的中点　∴$CF=\frac{1}{2}DE=\frac{\sqrt{2}}{2}CD$　∠DCF=∠ECF=45°　∴当CD最小时　CF最小　根据垂线段最短知当CD⊥AB时　CD最小　即CF最小　如图

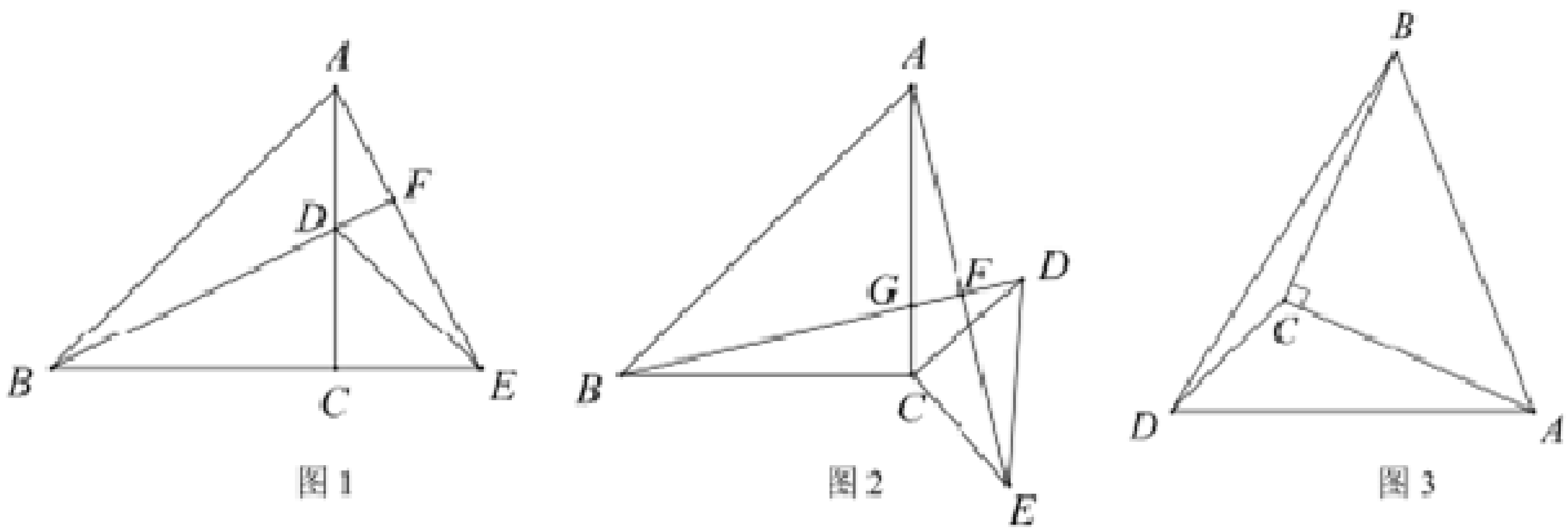


∵∠CBA=45°　CD⊥AB　∴∠BCD=45°　∴∠CDE=∠BCD　∴DE∥BC　∴$S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=2$.

【点睛】

本题属于几何旋转综合题型　考查了旋转性质、全等三角形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质、直角三角形斜边上的中线性质、三角形的中位线性质、垂线段最短、等高等底等面积等知识　熟练掌握相关知识的联系与运用　寻找全等三角形解决问题是解答的关键.

2.（2022·全国·九年级专题练习）△ABC和△DEC是等腰直角三角形　$\angle ACB=\angle DCE=90°$　$AC=BC$　$CD=CE$.



(1)【观察猜想】当△ABC和△DEC按如图1所示的位置摆放　连接BD、AE　延长BD交AE于点F　猜想线段BD和AE有怎样的数量关系和位置关系.

(2)【探究证明】如图 2 将$\triangle DCE$绕着点C顺时针旋转一定角度$\alpha\left(0^\circ<\alpha<90^\circ\right)$ 线段BD和线段AE的数量关系和位置关系是否仍然成立？如果成立 请证明：如果不成立 请说明理由.

(3)【拓展应用】如图 3 在$\triangle ACD$中 $\angle ADC=45^\circ$ $CD=\sqrt{2}$ $AD=4$ 将AC绕着点C逆时针旋转90°至BC 连接BD 求BD的长.

【答案】(1) $BD=AE$ $BD\perp AE$

(2)成立 理由见解析

(3) $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

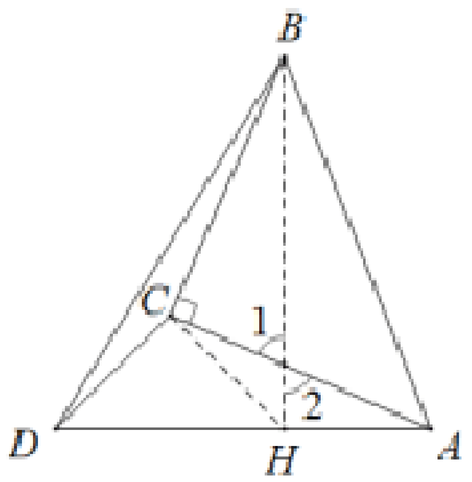
（1）通过证明$\triangle BCD\cong\triangle ACE$ 即可求证；

（2）通过证明$\triangle BCD\cong\triangle ACE$ 即可求证；

（3）过点C作$CH\perp CD$ 垂足为C 交AD于点H 根据旋转的性质 等腰直角三角形的性质 勾股定理即可求解.

（1）$BD=AE$ $BD\perp AE$ 证明如下：在$\triangle BCD$和$\triangle ACE$中 $\because\angle ACB=\angle DCE=90^\circ$ $AC=BC$ $CD=CE$ $\therefore\triangle BCD\cong\triangle ACE$ $\therefore BD=AE,\angle CBD=\angle CAE$ $\because\angle ACB=90^\circ$ $\therefore\angle CBD+\angle BDC=90^\circ$ $\because\angle BDC=\angle ADF$ $\therefore\angle CAE+\angle ADF=90^\circ$ $\therefore BD\perp AE$；

（2）成立 理由如下：$\because\angle ACB=\angle DEC$ $\therefore\angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$ 即$\angle BCD=\angle ACE$ 在$\triangle BCD$和$\triangle ACE$中 $\because AC=BC$ $\angle BCD=\angle ACE$ $CD=CE$ $\therefore\triangle BCD\cong\triangle ACE$ $\therefore BD=AE$ $\angle CBD=\angle CAE$ $\because\angle BGC=\angle AGF$ $\therefore\angle CBD+\angle BGC=\angle CAE+\angle AGF$ $\because\angle ACB=90^\circ$ $\therefore\angle CBD+\angle BGC=90^\circ$ $\therefore\angle CAE+\angle AGF=90^\circ$ $\therefore\angle AFB=90^\circ$ $\therefore BD\perp AE$；

（3）

如图 过点C作$CH\perp CD$ 垂足为C 交AD于点H 由旋转性质可得：$\angle ACB=90^\circ$ $AC=BC$ $\because CH\perp CD$ $\therefore\angle DCH=90^\circ$ $\because\angle ADC+\angle CHD=90^\circ$ 且$\angle ADC=45^\circ$ $\therefore\angle CHD=45^\circ$ $\therefore\angle CHD=\angle ADC$ $\therefore CD=CH=\sqrt{2}$ 在$Rt\triangle DCH$中：$DH=\sqrt{CD^2+CH^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$ $\because\angle ACB=\angle DCH=90^\circ$ $\therefore\angle ACB+\angle ACH=\angle DCH+\angle ACH$