浙江省杭州市余杭第二高级中学 2024 年数学高三第一学期期末监测试题

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0．5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用 05 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_6-2S_3=2$，则 $\dfrac{3a_8^{\ 2}}{a_2}$ 的最小值为

A．8 **B．16** **C．24** **D．36**

2．已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和，$4+a_5=a_6+a_{10}$，则 $S_{21}=$（ ）

A．7 **B．14** **C．28** **D．84**

3．执行如图所示的程序框图，当输出的 $S=2$ 时，则输入的 S 的值为( )

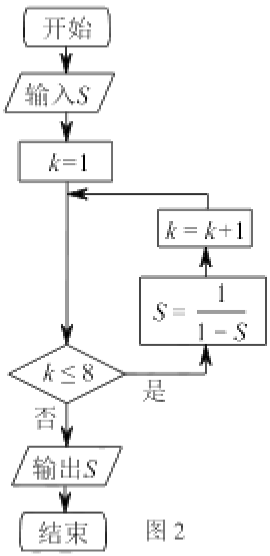


图 2

A．-2 **B．-1** **C．** $-\dfrac{1}{2}$ **D．** $\dfrac{1}{2}$

4．已知复数 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$，则 $\overline{z}$ 的虚部是（ ）

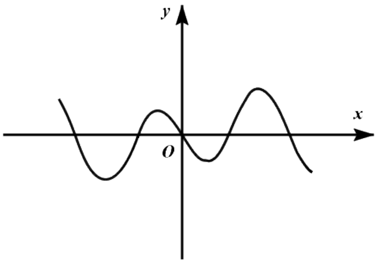
A． i **B．** $-i$ **C．** -1 **D．1**

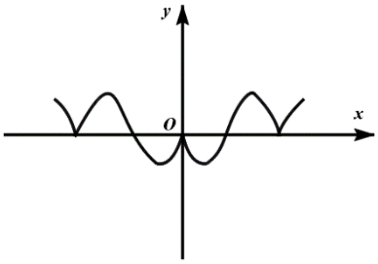
5．已知函数 $f(x)=\cos x\sin 2x$，下列结论不正确的是（ ）

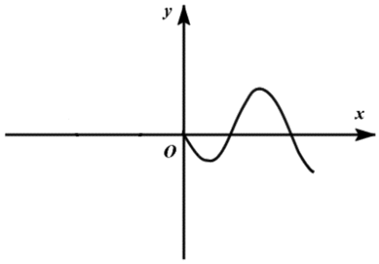
A． $y=f(x)$ 的图像关于点 $(\pi,0)$ 中心对称 **B．** $y=f(x)$ 既是奇函数，又是周期函数

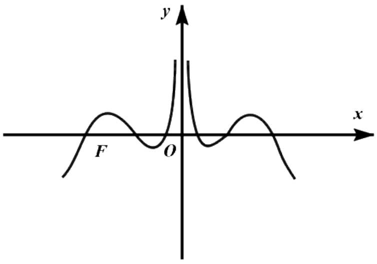
C． $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称 **D．** $y=f(x)$ 的最大值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6．函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\ln|x|$ 图像可能是（　　）

A．

B．

C．

D．

7．设 i 为虚数单位，则复数 $z=\dfrac{2}{1-i}$ 在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

8．由实数组成的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则“$a_1>0$”是“$S_9>S_8$”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

9．已知变量的几组取值如下表：

x	1	2	3	4
y	2.4	4.3	5.3	7

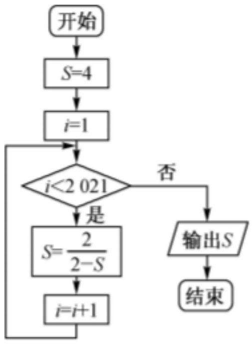
若 y 与 x 线性相关，且 $\hat{y}=0.8x+a$，则实数 $a=$（　　）

A．$\dfrac{7}{4}$　　B．$\dfrac{11}{4}$　　C．$\dfrac{9}{4}$　　D．$\dfrac{13}{4}$

10．中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还.”意思为有一个人要走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛，每天走的路程为前一天的一半，走了六天恰好到达目的地，请问第二天比第四天多走了（　　）

A．96 里　　B．72 里　　C．48 里　　D．24 里

11．若执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值是（　　）



A．-1　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．4

12．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(x\in R,\omega>0)$的最小正周期为$\pi$,为了得到函数$g(x)=\cos\omega x$的图象,只要将$y=f(x)$的图象(　　)

A．向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度　　B．向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度

C．向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度　　D．向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．函数$y=4x^2+\frac{1}{x}$的单调增区间为__________.

14．函数$f(x)=\cos^2 x$的最小正周期是________________，单调递增区间是__________.

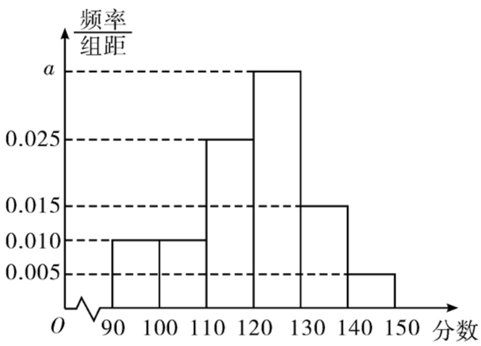
15．某校高三年级共有800名学生参加了数学测验（满分150分），已知这800名学生的数学成绩均不低于90分，将这800名学生的数学成绩分组如下：$[90,100)$，$[100,110)$，$[110,120)$，$[120,130)$，$[130,140)$，$[140,150]$，得到的频率分布直方图如图所示，则下列说法中正确的是________（填序号）.

①$a=0.045$；

②这800名学生中数学成绩在110分以下的人数为160；

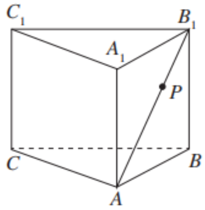
③这800名学生数学成绩的中位数约为121.4；

④这800名学生数学成绩的平均数为125．



16．如图在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$底面ABC，$AB=AC=\sqrt{6}$，$BC=2BB_1=2\sqrt{2}$，点P为线段AB_1

上一动点，则 C_1P+BP 的最小值为________.



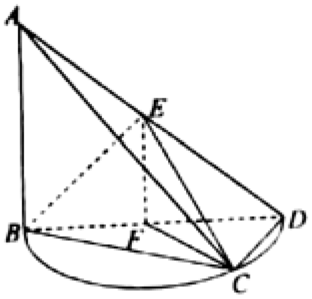
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 π，且当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f\left(x\right)$ 取得最大值 2 .

（1）求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）作出 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的图象（要列表）.

18.（12 分）如图,直角三角形 ABD 所在的平面与半圆弧 $\overset{\frown}{BD}$ 所在平面相交于 BD , $AB=BD=2$， E , F 分别为 AD，BD 的中点，C 是 $\overset{\frown}{BD}$ 上异于 B , D 的点，$EC=\sqrt{2}$.



（1）证明:平面 $CEF\perp$ 平面 BCD；

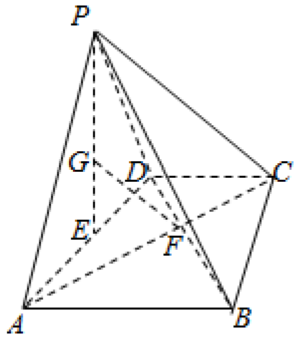
（2）若点 C 为半圆弧 $\overset{\frown}{BD}$ 上的一个三等分点(靠近点 D)求二面角 $A-CE-B$ 的余弦值.

19.（12 分）已知点 P 是抛物线 $C:y=\frac{1}{4}x^2-3$ 的顶点， A， B 是 C 上的两个动点，且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-4$.

（1）判断点 $D\left(0,1\right)$ 是否在直线 AB 上？说明理由；

（2）设点 M 是 ΔPAB 的外接圆的圆心，点 M 到 x 轴的距离为 d ，点 $N\left(1,0\right)$，求 $\left|MN\right|-d$ 的最大值.

20.（12 分）如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 为梯形. $AB//CD.AD=2DC=2\sqrt{3}$，且 $\triangle PAD$ 与 $\triangle ABD$ 均为正三角形. E 为 AD 的中点 , G 为 $\triangle PAD$ 重心, AC 与 BD 相交于点 F .



(1)求证: $GF//$ **平面** PDC **;**

(2)求三棱锥 $G-PCD$ **的体积.**

21．（12 分）若函数 $f\left(x\right)$ 在 x_0 处有极值，且 $f\left(x_0\right)=x_0$，则称 x_0 为函数 $f\left(x\right)$ 的“F 点”.

（1）设函数 $f\left(x\right)=kx^2-2\ln x$（$k\in\mathbf{R}$）.

①当 $k=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的极值；

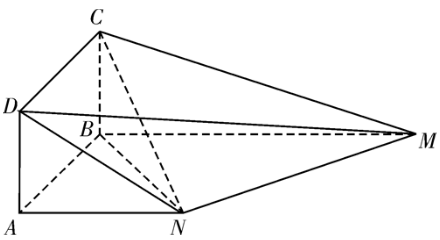
②若函数 $f\left(x\right)$ 存在“F 点”，求 k 的值；

（2）已知函数 $g\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx$（$a,b$，$c\in\mathbf{R}$，$a\neq0$）存在两个不相等的$F$ 点”x_1，x_2，且$\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|\geq1$，求 a 的取值范围.

22．（10 分）如图，已知正方形 $ABCD$ 所在平面与梯形 $ABMN$ 所在平面垂直，$BM\parallel AN$，$NA=AB=2$，$BM=4$，$CN=2\sqrt{3}$.

（1）证明：$MN\perp$平面 BCN；

（2）求点 N 到平面 CDM 的距离.



参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

方法一：由题意得$S_6-2S_3=(S_6-S_3)-S_3=2$，根据等差数列的性质，得S_9-S_6,S_6-S_3,S_3成等差数列，设$S_3=x(x>0)$，则$S_6-S_3=x+2$，$S_9-S_6=x+4$，则

$\frac{3{a_8}^2}{a_2}=\frac{(3a_8)^2}{3a_2}=\frac{(a_7+a_8+a_9)^2}{a_1+a_2+a_3}=\frac{(S_9-S_6)^2}{S_3}=\frac{(x+4)^2}{x}=x+\frac{16}{x}+8\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}+8=16$，当且仅当$x=4$时等号成立，从而$\frac{3{a_8}^2}{a_2}$的最小值为**16**，故选**B.**

方法二：设正项等差数列$\{a_n\}$的公差为***d***，由等差数列的前n项和公式及$S_6-2S_3=2$，化简可得

$6a_1+\frac{6\times 5}{2}d-2(3a_1+\frac{3\times 2}{2}d)=2$，即$d=\frac{2}{9}$，则$\frac{3{a_8}^2}{a_2}=\frac{3(a_2+6d)^2}{a_2}=\frac{3(a_2+\frac{4}{3})^2}{a_2}=3a_2+\frac{16}{3a_2}+8\geq 2\sqrt{3a_2\cdot\frac{16}{3a_2}}+8=16$，当且仅当$3a_2=\frac{16}{3a_2}$，即$a_2=\frac{4}{3}$时等号成立，从而$\frac{3{a_8}^2}{a_2}$的最小值为**16**，故选**B.**

2、D

【解析】

利用等差数列的通项公式，可求解得到$a_{11}=4$，利用求和公式和等差中项的性质，即得解

【详解】

$\because 4+a_5=a_6+a_{10}$，

$\therefore 4+a_{11}-6d=a_{11}-5d+a_{11}-d$

解得$a_{11}=4$.

$\therefore S_{21}=\frac{21(a_1+a_{21})}{2}=21a_{11}=84$.

故选：**D**

【点睛】

本题考查了等差数列的通项公式、求和公式和等差中项，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

3、B

【解析】

若输入$S=-2$，则执行循环得$S=\frac{1}{3},k=2;S=\frac{3}{2},k=3;S=-2,k=4;S=\frac{1}{3},k=5;S=\frac{3}{2},k=6;$
$S=-2,k=7;S=\frac{1}{3},k=8;S=\frac{3}{2},k=9;$结束循环，输出$S=\frac{3}{2}$，与题意输出的$S=2$矛盾；

若输入$S=-1$，则执行循环得$S=\frac{1}{2},k=2;S=2,k=3;S=-1,k=4;S=\frac{1}{2},k=5;S=2,k=6;$

$S=-1,k=7;S=\frac{1}{2},k=8;S=2,k=9;$结束循环，输出$S=2$，符合题意；

若输入$S=-\frac{1}{2}$，则执行循环得$S=\frac{2}{3},k=2;S=3,k=3;S=-\frac{1}{2},k=4;S=\frac{2}{3},k=5;S=3,k=6;$

$S=-\frac{1}{2},k=7;S=\frac{2}{3},k=8;S=3,k=9;$结束循环，输出$S=3$，与题意输出的$S=2$矛盾；

若输入$S=\frac{1}{2}$，则执行循环得$S=2,k=2;S=-1,k=3;S=\frac{1}{2},k=4;S=2,k=5;S=-1,k=6;$

$S=\frac{1}{2},k=7;S=2,k=8;S=-1,k=9;$结束循环，输出$S=-1$，与题意输出的$S=2$矛盾；

综上选 **B.**

4、**C**

【解析】

化简复数，分子分母同时乘以$1+i$，进而求得复数z，再求出$\overline{z}$，由此得到虚部.

【详解】

$z=\frac{1+i}{1-i}=i$，$\overline{z}=-i$，所以$\overline{z}$的虚部为-1.

故选：**C**

【点睛】

本小题主要考查复数的乘法、除法运算，考查共轭复数的虚部，属于基础题.

5、**D**

【解析】

通过三角函数的对称性以及周期性，函数的最值判断选项的正误即可得到结果.

【详解】

解：$A:f(2\pi-x)=\cos(2\pi-x)\sin 2(2\pi-x)=-\cos x\sin 2x=-f(x)$，正确；

$B:f(-x)=\cos(-x)\sin 2(-x)=-\cos x\sin 2x=-f(x)$，为奇函数，周期函数，正确；

$C:f(\pi-x)=\cos(\pi-x)\sin 2(\pi-x)=\cos x\sin 2x=f(x)$，正确；

D： $y=2\sin x\cos^2 x=2\sin x-2\sin^3 x$，令$t=\sin x$，$t\in[-1,1]$则$g(t)=2t-2t^3$，$g'(t)=2-6t^2$，$t\in[-1，1]$，则

$-\frac{\sqrt{3}}{3}<t<\frac{\sqrt{3}}{3}$时$g'(t)>0$，$-1<t<-\frac{\sqrt{3}}{3}$或$1>t>\frac{\sqrt{3}}{3}$时$g'(t)<0$，即$g(t)$在$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递增，在

$\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$和$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$上单调递减；

且 $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}$，$g(-1)=0$，$\therefore y_{max}=g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 **D** 错误.

故选：D.

【点睛】

本题考查三角函数周期性和对称性的判断，利用导数判断函数最值，属于中档题.

6、**D**

【解析】

先判断函数的奇偶性可排除选项 ***A,C***，当 $x\to 0^{+}$ 时，可分析函数值为正，即可判断选项.

【详解】

Q $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\ln|x|=-\cos x\ln|x|$,

$\therefore -\cos(-x)\ln|-x|=-\cos x\ln|x|$,

即函数为偶函数，

故排除选项 ***A,C***，

当正数 x 越来越小，趋近于 **0** 时，$-\cos x<0,\ln|x|<0$，

所以函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\ln|x|>0$，故排除选项 ***B***,

故选：***D***

【点睛】

本题主要考查了函数的奇偶性，识别函数的图象，属于中档题.

7、**A**

【解析】

利用复数的除法运算化简 z，求得 z 对应的坐标，由此判断对应点所在象限.

【详解】

Q $z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$，$\therefore$ 对应的点的坐标为 $(1,1)$，位于第一象限.

故选：**A.**

【点睛】

本小题主要考查复数除法运算，考查复数对应点所在象限，属于基础题.

8、**C**

【解析】

根据等比数列的性质以及充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

解：若$\{a_n\}$是等比数列，则$S_9-S_8=a_9=a_1q^8,q\neq 0$，

若$a_1>0$，则$S_9-S_8=a_9=a_1q^8>0$，即$S_9>S_8$成立，

若$S_9>S_8$成立，则$S_9-S_8=a_9=a_1q^8>0$，即$a_1>0$，

故"$a_1>0$"是"$S_9>S_8$"的充要条件，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，利用等比数列的通项公式是解决本题的关键.

9、B

【解析】

求出$\overline{x},\overline{y}$，把坐标$(\overline{x},\overline{y})$代入方程可求得$a$.

【详解】

据题意，得$\overline{x}=\frac{1}{4}(1+2+3+4)=\frac{5}{2},\overline{y}=\frac{1}{4}(2.4+4.3+5.3+7)=\frac{19}{4}$，所以$\frac{19}{4}=0.8\times\frac{5}{2}+a$，所以$a=\frac{11}{4}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查线性回归直线方程，由性质线性回归直线一定过中心点$(\overline{x},\overline{y})$可计算参数值.

10、B

【解析】

人每天走的路程构成公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，设此人第一天走的路程为a_1，计算$a_1=192$，代入得到答案.

【详解】

由题意可知此人每天走的路程构成公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，设此人第一天走的路程为a_1，

则$\dfrac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=378$，解得$a_1=192$，从而可得$a_2=192\times\frac{1}{2}=96,a_4=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=24$，故

$a_2-a_4=96-24=72$.

故选：B.

【点睛】

本题考查了等比数列的应用，意在考查学生的计算能力和应用能力.

11、**D**

【解析】

模拟程序运行，观察变量值的变化，得出S的变化以**4**为周期出现，由此可得结论.

【详解】

$S=4,i=1;S=-1,i=2;S=\frac{2}{3},i=3;S=\frac{3}{2},i=4;S=4,i=5$；如此循环下去，当$i=2020$时，

$S=\frac{3}{2};S=4,i=2021$，此时不满足$i<2021$，循环结束，输出S的值是**4.**

故选：**D.**

【点睛】

本题考查程序框图，考查循环结构．解题时模拟程序运行，观察变量值的变化，确定程序功能，可得结论．

12、**A**

【解析】

由$f(x)$的最小正周期是π，得$\omega=2$，

即$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

$$=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos 2(x-\frac{\pi}{8}),$$

因此它的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位可得到$g(x)=\cos 2x$的图象．故选**A.**

考点：函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质.

【名师点睛】

三角函数图象变换方法：