摘　要

广义逆矩阵的表示与计算是广义逆理论的重要研究课题，因其理论上的重要地位和实际中的广泛应用一直为人们所关注，近二三十年来，国内外众多学者在这方面做了大量工作，得到了丰富的成果(见[1~6]等)。

区别于传统的分析扰动，J.R.Bunch和D.J.Rose在1974年首先提出了用代数扰动的方法求解非奇异线性方程组，随后，L.B.Rall，陈永林，季均等运用这一方法相继得到了关于Banach空间上的线性算子，实(复)域上矩阵的$\{1\}$逆，$\{1,2\}$逆及$A_{T,S}^{(2)}$逆的一系列结果。本文的第三章将应用代数扰动的思想，首次得到L-零矩阵的(广义) Bott-Duffin逆矩阵及矩阵的加权Drazin逆的若干新性质以及这两类广义逆的新表达式。

鉴于除环在工程，物理等领域的重要应用，本文的第四章将对广义逆在P-除环上所具有的众多性质加以系统整理。并且在P-除环上首次研究了矩阵的代数扰动理论。

条件数是衡量矩阵对扰动敏感程度的主要指标之一，在矩阵计算和扰动分析的研究中发挥着重要作用，从而广受重视(见[3，32~47]等)。本文的第五章将讨论Drazin逆条件数的极小性质，给出了Drazin逆条件数达到极小的充要条件以及此时矩阵所具有的性质。

非负矩阵在随机过程，马氏链，数理统计中有着广泛的应用。本文的第六章将讨论一类特殊的非负矩阵。文章将从新的角度出发，在进一步的讨论中得到若干新性质。

关键词：代数扰动，(加权) Drazin逆，(广义) Bott-Duffin逆，P-除环，条件数，值域与零空间，矩阵范数，非负矩阵

ABSTRACT

The representation and calculation of generalized inverse matrices is an important topic in the theory of generalized inverse. Since its high value in the field of both theotical research and practical use, many scholars have done much research on it. (Refs: [1~6]etc.)

In the year of 1974, J.R.Bunch and D.J.Rose found a new way called algebraic perturbation method for solving nonsingular linear equations. After then, L.B.Rall, Y.L. Chen and J. Ji have also done a large amount of work on it with results in properties of linear operator on Banach space, {1}-inverse, {1,2}-inverse and $A_{T,S}^{(2)}$-inverse of matrices. The third charpt of this paper is going to discuss the properties and representations on algebraic perturbation of generalized Bott-Duffin inverse and weighted Drazin inverse.

In term of the important practical applications of division ring to engineering and physics, in the forth charpt, we give some new results in P-division ring on algebraic perturbation theory.

Condition number is one of the most important indecies which are used to measure sensitation of matrix against perturbation. In the fivth charpt, we obtain some properties of matrix when its condition number on Drazin inverse is minimal.

And finaly, we will find some properties of nonnegative matrices which having same nonnegative group inverse and M-P inverse.

KEY WORD: algebra perturbation, (weighted)Drazin inverse, (generalized)Bott-Duffin inverse, P-division ring, condition number, valued field & zero space, matrix norm, nonnegative matrix

曹丽咏硕士学位论文答辩委员会成员名单

2005年5月27日

姓　　名	职　称	单　　位	备注
詹兴致	教授	华东师范大学数学系	主席
王元明	教授	华东师范大学数学系	
赵书钦	教授	华东师范大学数学系	
庞奇明	讲师	华东师范大学数学系	秘书

学位论文独创性声明

本人所呈交的学位论文是我在导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含其他个人已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中作了明确说明并表示谢意。

作者签名：曹丽咏　日期：2005.5

学位论文使用授权声明

本人完全了解华东师范大学有关保留、使用学位论文的规定，学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其指定机构送交论文的电子版和纸质版。有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅。有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索。有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

学位论文作者签名：曹丽咏　导师签名：陈卓良

日期：2005.5　日期：2005.5

1 引 言

在生产实践和科学研究中，人们经常需要求解一类方程组：

设 X，Y是两个线性空间，$A \in L(X, Y)$，

$$Ax = b \qquad x \in X, \quad b \in Y \tag{1.1}$$

众所周知，若算子 A可逆，则(1.1)有唯一解 $x = A^{-1}b$。但是在实际应用中，A往往是不可逆的。此时(1.1)就有两种情况，一是方程无解，二是方程有解，但解不唯一。因此，方程无解时如何求“最佳近似”解以及有解但不唯一时，那些解的性质更好就成为了人们关注的问题。人们希望能象非奇异方程组那样，也找到某个适当的算子 X，使得 Xb可用于表征此类方程的解集或特定解。于是，广义逆便应运而生。

广义逆的概念最早由Fredholm于1903年提出，他给出了积分算子的广义逆。1920年，E.H. Moore首次提出了矩阵广义逆的概念。

定义1.1 设 $A \in C^{m \times n}$，则 A的广义逆矩阵 $X \in C^{n \times m}$是如下方程的唯一解

$$AX = P_{R(A)}, \quad XA = P_{R(X)}$$

并且把 X记作 $A^{\dagger}$。

1933年，曾远荣(Yu.Ya Tseng)将此定义推广到Hilbert空间，得到了Hilbert空间线性算子的Tseng广义逆，为无限维空间的算子广义逆研究作出了重大贡献。

定义1.2 [8] 设 H_1，H_2是两个Hilbert空间，$A \in L(H_1, H_2)$，$D(A)$为 A的定义域，如果线性算子 $A^g \in L(H_2, H_1)$满足

$$R(A) \subset D(A^g), \qquad R(A^g) \subset D(A)$$

$$A^g A x = P_{\overline{R(A^g)}}\, x, \quad \forall\, x \in D(A)$$

$$AA^g y = P_{\overline{R(A)}}\, y, \quad \forall\, y \in D(A^g)$$

则称 $A^g \in L(H_2, H_1)$为 A的一个曾广义逆，记作g.i.。

然而，在之后的数十年中，广义逆并没有引起人们的重视。直到50年代中期，随着广义逆矩阵在线性方程组研究中的作用日益凸显，人们对广义逆的兴趣才重新高涨起来。1955年，R. Penrose将四个特定矩阵方程的唯一解定义为矩阵的广义逆，并证明了与Moore所定义广义逆的等价性。

定义1.3 (Penrose)　设 $A \in C^{m\times n}$，则 A的广义逆矩阵 $A^{\dagger} \in C^{n\times m}$是下列方程的唯一解

$$AA^{\dagger}A = A \quad (1) \qquad A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger} \quad (2)$$

$$(AA^{\dagger})^{H} = AA^{\dagger} \quad (3) \qquad (A^{\dagger}A)^{H} = A^{\dagger}A \quad (4)$$

Penrose的这个定义较 Moore的定义更直观更易操作，$A^{\dagger}$被称为矩阵的 M-P广义逆。Penrose的这一突破为广义逆的研究和发展开辟了广阔的空间。

随后，M.Z.Nashed又将 M-P广义逆的概念推广到 Hilbert空间和 Banach空间。

定义1.4 (Nashed)　设 X, Y是两个Banach空间，A是从 X到 Y的线性有界算子，即 $A \in B(X,Y)$，如存在两个连续的投影算子 $P:\ X \to N(A)$及 $Q:\ Y \to \overline{R(A)}$，则存在唯一的广义逆 $A^{\dagger} \in L(Y,X)$满足

$$AA^{\dagger}A = A, \qquad A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}, \qquad AA^{\dagger} = Q, \qquad A^{\dagger}A = I - P$$

此外，$A^{\dagger} \in B(Y,X)$当且仅当 $R(A)$闭。

近四十年来，广义逆矩阵的理论和应用得到了迅速的发展，它在数值分析，最优化，数理统计，测量学，经济学等应用科学领域发挥着重要的作用。在研究最小二乘问题，长方，病态线性或非线性问题，不适定问题，回归，分布估计，马尔可夫链等统计问题，无约束，约束，随机规划问题，控制论和系统识别等问题中，广义逆都是不可缺少的研究工具。

随着研究的深入和研究领域的拓广，人们在 M-P逆的基础上又衍生出各种类型的广义逆，如加权 M-P逆，Drazin逆，加权 Drazin逆，群逆，Bott-Duffin逆和广义 Bott-Duffin逆等。值得一提的是，对于任意给定的矩阵 A，上述几种常用的广义逆均属于 A的具有指定值域 T和零空间 S的$\{2\}$-逆，即 $A^{(2)}_{T,S}$。80年代，乔三正，蔡东汉等人对Banach空间上算子的 Drazin逆做了大量研究([9,10])。此外国内外众多学者(Nashed, J.G.Sun, J. Ding，陈永林，王国荣，陈果良，薛以蟠，季均，王玉文，魏益民等)进一步研究了线性算子 M-P逆，Drazin逆和群逆的扰动理论，各种形式的表示和逼近等([11~18]等)。

定义1.5　设 X是Banach空间，$A \in L(X)$，则称 X为 A的 Drazin逆，如果存在某个非负整数 k，使得

$$AXA = A^{k} \qquad (1^{k})$$

$$XAX = X \qquad (2)$$

$$AX = XA \qquad (5)$$

满足上述三式的最小整数 k称为 A的指标，记为 $Ind(A) = k$，特别的若 $Ind(A) = 1$，则称 X为 A的群逆，记为 A_g。

Bott-Duffin逆可应用于电网络限制系统，以及约束方程形如：

设 $A \in C^{n\times n}$，$b \in C^n$，L是 C^n的子空间。

$$Ax + y = b \quad x \in L, \ \ y \in L^{\perp} \tag{1.2}$$

定义1.6 设 $A \in C^{n\times n}$，L是 C^n的子空间，若 $(AP_L + P_{L^\perp})$非奇异，则称 $A_{(L)}^{(-1)} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1}$为 A关于 L的 Bott-Duffin逆。

本文组织如下。在第二章中，我们将介绍本文所需的相关知识。在正文的第三章中我们将研究 L-零矩阵的(广义) Bott-Duffin逆和矩阵的(加权) Drazin逆。试图通过代数扰动的方法给出它们的若干性质和新表示。第四章将结合环论的知识研究 P-除环上矩阵的代数扰动性质。第五章将得到矩阵 Drazin条件数达到极小时的充要条件，以及与之相关的一些结果。在第六章中将讨论具有相同非负群逆和M-P逆的非负矩阵，得到此类矩阵的一些新性质与系数的显式表示。

2 准备知识

本节中我们将介绍一些必要的准备知识。其中对一些经典性的结果或已有的可在文献中查阅到的结果，我们都略去证明。

首先介绍M-P广义逆和(广义) Bott-Duffin逆等几种常用广义逆的性质，

引理2.1 [1] 矩阵 A的 Moore-Penrose逆 $A^\dagger$具有下列性质：

(1) $(A^\dagger)^\dagger = A$;

(2) $(A^H)^\dagger = (A^\dagger)^H$;

(3) $A^\dagger = (A^H A)^\dagger A^H = A^H(AA^H)^\dagger$,

特别地，若 A为列满秩阵，则 $A^\dagger = (A^H A)^{-1}A^H$，$A^\dagger A = I_n$;

若 A为行满秩矩阵，则 $A^\dagger = A^H(AA^H)^{-1}$，$AA^\dagger = I_m$;

(4) $R(AA^\dagger) = R(A)$，$R(A^\dagger A) = R(A^\dagger) = R(A^H)$;

(5) $N(AA^\dagger) = N(A^\dagger) = N(A^H)$，$N(A^\dagger A) = N(A)$;

(6) $AA^\dagger = P_{R(A)}$，$A^\dagger A = P_{R(A^H)}$;

(7) $rank(A^\dagger) = rank(A) = rank(AA^\dagger) = rank(A^\dagger A)$。

作为广义逆的应用之一，关于线性方程 $Ax = b$的解有以下结果(在 Euclide范数下)：

引理2.2 [1] 设 $A \in C^{m\times n}$，$b \in C^m$，对任意的 $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$，令 $\hat{x} = A^{(1,3)}b$，则

$$\|A\hat{x} - b\| = \min_{x\in C^n} \|Ax - b\|$$

反之，若 $X \in C^{n\times m}$满足对任意的 $b \in C^m$，都有 $\|A(Xb) - b\| = \min_{x\in C^n} \|Ax - b\|$ 成立，则 $X \in A\{1,3\}$。

引理2.3 [1] 设 $A \in C^{m\times n}$，$b \in C^m$，Σ是方程 $Ax = b$的解集，对任意的 $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$，令 $\hat{x} = A^{(1,4)}b$，则

$$\|\hat{x}\| = \min_{x\in\Sigma} \|x\|$$

反之，若 $X \in C^{n\times m}$满足对任意的 $b \in C^m$，都有 $\|(Xb)\| = \min_{x\in\Sigma} \|x\|$ 成立，则 $X \in A\{1,4\}$。

引理2.4 [1] 设 $A \in C^{m\times n}$，$b \in C^m$，则 $A^\dagger b$是方程 $Ax = b$的极小范数最小二乘解，反之，若 $X \in C^{n\times m}$满足对任意的 $b \in C^m$，Xb都是方程 $Ax = b$的极小范数最小二乘解，则 $X = A^\dagger$。

在引言中，我们已经简单的介绍了矩阵的Bott-Duffin逆，以下是关于Bott-Duffin逆及广义Bott-Duffin逆的一些基本性质。

可以证明，约束方程(1.2)的相容性等价于如下方程的相容性([1])。

$$(AP_L + P_{L^\perp})z = b \tag{2.1}$$

且$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$是(1.2)的解当且仅当

$$x = P_L z, \quad y = P_{L^\perp} z = b - AP_L z$$

其中z是(2.1)的解。

对任意矩阵A和子空间L，其Bott-Duffin逆是否存在取决于$(AP_L + P_{L^\perp})$的奇异性。陈永林在[19]中定义了矩阵的广义Bott-Duffin逆：$A_{(L)}^{(\dagger)} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^\dagger$ 显然，$A_{(L)}^{(\dagger)}$总是存在的，它是Bott-Duffin逆的自然推广。

矩阵指定值域和零空间的$\{2\}$逆是各类广义逆中具有突出地位的一类。常用的六种广义逆：Moore-Penrose逆，加权Moore-Penrose逆，Bott-Duffin逆，(广义) Bott-Duffin逆，Drazin逆，群逆都是具有指定值域和零空间的$\{2\}$逆。事实上，不仅是这六类广义逆，只要所指定的值域T和零空间S满足一定的条件，都能找到相对应的广义逆X，使得$R(X) = T$，$N(X) = S$。

引理2.5 [1] 设$A \in C_r^{m\times n}$，子空间$T \subset C^n$，$S \subset C^m$。$dim\ T = s \leq r$，$dim\ S = m - s$，则A有满足$R(X) = T$，$N(X) = S$的$\{2\}$逆X当且仅当

$$AT \oplus S = C^m$$

此时X唯一，记作$X = A_{T,S}^{(2)}$。

本文中还将使用到幂等矩阵及其性质。就其几何意义而言，幂等矩阵($P = P^2$)也称为投影矩阵，它与矩阵的广义逆密切相关。在一定的意义上，幂等矩阵可以看作是单位矩阵的推广。以下是幂等阵有关存在和表示的一些基本性质。

引理2.6 [1] 对任意的幂等矩阵$E \in C^{n\times n}$，都有$R(E)$与$N(E)$是互补子空间，且成立

$$E = P_{R(E),N(E)}$$

反之，若L，M是互补子空间，则存在唯一的幂等矩阵$P_{L,M}$，使得$R(P_{L,M}) = L$，$N(P_{L,M}) = M$。

引理2.7 [1] 设 $A \in C^{m\times n}$，L，M是互补子空间，则

(1)$P_{L,M}A = A$当且仅当 $R(A) \subset L$。

(2)$AP_{L,M} = A$当且仅当 $M \subset N(A)$。

此外，本文中涉及了多种矩阵范数，定义如下：

定义2.1 设 $A \in C^{m\times n}$，对任意的向量范数 $\|\cdot\|_*$，称

$$\|A\|_* = \sup_{\|x\|_* \leq 1;\ x\neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}$$

为由向量范数$\|\cdot\|_*$导出的矩阵范数。

易知矩阵范数是相容范数，即对任意的 $A \in C^{m\times n}, x \in C^n$成立 $\|Ax\|_* \leq \|A\|_*\|x\|_*$。下面是三类常用的向量范数及由其导出的矩阵范数：

设 $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$，$x = (x_1, \cdots x_n)^H \in C^n$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \qquad \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|x\|_2 = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2}, \quad \|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda\text{是 } A^HA\text{的最大特征值}\} = \rho(A^HA)^{1/2}$$

也称 $\|\cdot\|_2$为矩阵的谱范数。

本文的第二部分将讨论除环上的矩阵。以下是除环的定义。

定义2.2 (1)设集合 $(K, +, \cdot)$，关于加法$(K, +)$为加法群，关于乘法$(K, \cdot)$为半群，且加法和乘法满足分配律，则称 K为环。

(2)设 K为一环，若 K还满足关于乘法有单位元，任意元素都有逆元，则称 K为除环。

易知，除环一定不含零因子。

3 广义Bott-Duffin逆及加权Drazin逆的代数扰动

3.1 有关代数扰动

代数扰动方法较早的见与[20]，其中J.R.Bunch和 D.J.Rose提出了用代数扰动的方法来求解非奇异线性方程组。有别于分析扰动，在代数扰动中通常不要求扰动(如$\Delta A, \Delta x$)的度量性质(如 $\|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$)，而是对其维数加以限制。一般的，设 X，Y是两个线性空间，维数为 t的代数扰动算子 $\Delta A \in L(X, Y)$可表示为

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} u_i >< v_i$$

其中，$u_i \in Y, v_i \in X^*$(即 X的对偶空间)，$u >< v$表示一个秩为一的线性算子：

$$(u >< v)\ x = u < v, x > = < v, x > u \in Y, \quad \forall\, x \in X$$

则 $R(\Delta A) = span\{u_1, \cdots, u_n\}$。

在这样的记号下，一个线性方程组

$$Ax = y$$

的代数扰动方程组就是

$$Bw = z$$

其中 $B = A + \Delta A,\ z = y + \Delta y,\ w = x + \Delta x$。

1979年，L.B.Rall在[21]中讨论了 Banach 空间中线性算子的代数扰动问题，在文中他先后给出了 A、B都非奇异以及 B非奇异、A奇异两种情况下的代数扰动结果。由于后一种情况是前者的推广，我们在这里只列出针对后者的结果。

设 Banach空间 X、Y，且 Y是自反的，给定 d个线性独立的泛函 $u_1^*, \cdots, u_d^* \in Y^*$以及 $v_1^*, \cdots, v_d^* \in X^*$。

定理3.1.1 [21] 设 $A \in L(X, Y)$有 Fredholm指标理论，且 $u^*A = Av = 0$当且仅当 $u^* \in span\{u_1^*, \cdots, u_d^*\} \subset Y^*, v^* \in span\{v_1^*, \cdots, v_d^*\} \subset X^*$，则

$$B = A - \sum_{j=1}^{n} u_j >< v_j^*, \quad j = 1, 2, \cdots, d$$

可逆，且

$$AB^{-1}A = A$$

即 B^{-1}是 A的一个$\{1\}$逆。

到八，九十年代，L. Kramarz、陈永林、季均等人进一步结合代数扰动理论与广义逆理论，得到了丰富的成果，包括[22] 中的$A_{T,S}^{(1,2)}$逆；[7]中的A$\{1\}$，A$\{1, 2\}$逆；[23]中的$A_{T,S}^{(2)}$；[24]中的A$\{1, 3\}$，A$\{1, 4\}$逆，及对称L-零矩阵的广义 Bott-Duffin逆等等。

3.2 L-零矩阵代数扰动的一般形式及其若干性质

作为Bott-Duffin逆的推广，广义 Bott-Duffin逆同样具有重要的理论价值和广泛的应用。众多学者都对此做过相关研究。陈果良、刘国明、薛以蟠在[25, 26]中给出了广义 Bott-Duffin逆的性质，表示，计算和扰动分析等众多结果。作为陈永林在[19]中定义的L-非负矩阵的推广，陈果良等在[27]中提出了 L-零矩阵的概念，并进一步得到了 L-零矩阵的广义 Bott-Duffin逆在分析扰动上的若干结果。本节中，我们将讨论L-零矩阵的广义 Bott-Duffin逆在代数扰动理论中所具有的性质。

定义 3.2.1 [19]　设 $A^H = A \in C^{n\times n}$。$L$是 C^n上的子空间，若 A满足条件：

$$x^H Ax \ \geq\ 0,\ \forall\, x \in L,$$

$$若\ x^H Ax \ =\ 0,\ x \in\ L\ 则\ Ax = 0,$$

则称 A为 L-非负矩阵(记为 L-p.s.d.)。

定义 3.2.2 [27]　设 $A \in C^{n\times n}$，L 是 C^n 的子空间，若满足 $AL \cap L^{\perp} = \{0\}$，则称A为 L-零矩阵(记为 L-zero)。

性质 3.2.1　设 $A \in C^{n\times n}$是 L-非负矩阵，则 A是对称的 L-零矩阵。

证明　$\forall t \in AL \cap L^{\perp}$，即 $t \in AL$，$t \in L^{\perp}$。所以存在 $x \in L$，使得 $t = Ax$。从而 $x^* t = x^* Ax = 0$。又因为 A是 L-p.s.d矩阵，所以由定义3.2.1，即得 $t = Ax = 0$，所以 $AL \cap L^{\perp} = \{0\}$。

但反之，对称的 L-零矩阵不一定是 L-非负矩阵([24])。

引理 3.2.1 [7]　设 $A \in C_r^{m\times m}$，$B \in C_{m-r}^{m\times(m-r)}$，$C \in C_{m-r}^{(m-r)\times m}$，满足

$$N(C) = R(A^H),\ R(B) = N(A^H),$$

令 $M = A + BC$，则M非奇异，且

$$A^{\dagger} = M^{-1} - C^{\dagger} B^{\dagger},$$

引理 3.2.2 [27]　设 $A \in C^{n\times n}$，L是C^n上的子空间，则以下命题等价：

(1) A是 L-零矩阵；

(2) A的广义 Bott-Duffin逆 $A_{(L)}^{(\dagger)} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^\dagger = (P_LAP_L)^\dagger$；

(3) $N(P_LAP_L) = N(AP_L)$。

引理 3.2.3 [24]　设 $A \in C^{n\times n}$是对称的 L-零矩阵，记 $X = P_{L^\perp \oplus (L\cap N(A))}$，令 $M = P_LAP_L + X$，则以下命题成立：

(1) M非奇异，且 $M^{-1} \in P_LAP_L\{1, 3, 4\}$；

(2) $M^{-1}P_LAP_LM^{-1} = (P_LAP_L)^\dagger$；

(3) $A_{(L)}^{(\dagger)} = M^{-1} - X$。

结合引理3.2.1，3.2.2，即可得到 L-零矩阵代数扰动的一般形式：

命题 3.2.1　设 $A \in C^{n\times n}$，L是 C^n上的子空间，A是 L-零矩阵，设列满矩阵 B，C^H，满足

$$N(C) = R(P_LA^HP_L),\ R(B) = N(P_LA^HP_L),$$

令 $M = P_LAP_L + BC$，则 M非奇异，且

$$A_{(L)}^{(\dagger)} = M^{-1} - C^\dagger B^\dagger, \tag{3.1}$$

命题 3.2.2　设 $A \in C^{n\times n}$是 L-非负矩阵，X如引理3.2.3所示，令 $M = P_LAP_L + X$，则 M非奇异，且

$$A_{(L)}^{(\dagger)} = M^{-1} - X。 \tag{3.2}$$

证明 结合引理3.2.3和性质3.2.1，即得。

与(3.1)式相比，(3.2)式的形式更为简单且计算量更小(不需要计算 $B^\dagger$和 $C^\dagger$)。我们很想知道作为比 L-p.s.d矩阵范围更广的 L-zero矩阵，是否也具有类似(3.2)那样简单的扰动形式？从引理3.2.3看出命题3.2.2的结论对对称的 L-zero矩阵成立。那么对所有的 L-zero矩阵是否都成立呢？

结合命题3.2.1，3.2.2，我们发现 L-p.s.d矩阵之所以具有那样简单的扰动形式，究其原因是在于可以找到矩阵 B，C，不但满足命题3.2.1条件，而且同时使 $(B\cdot C)$是正交投影，从而有 $BC = C^\dagger B^\dagger$，由此简化了其扰动表达式。

本节的剩余部分说明了命题3.2.2对一般的 L-zero矩阵不一定成立。

性质 3.2.2　设 $A \in C^{n\times n}$，则 A是 $R(A)$-零矩阵。

证明 因为$R(A)\cap R(A)^{\perp}=\{0\}$，又 $AR(A)=R(A^2)\subseteq R(A)$，

所以 $AR(A)\cap R(A)^{\perp}=\{0\}$，即 A是$R(A)$-zero矩阵。

例 3.2.1 设$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$L=R(A)$。

由性质3.2.2可知，A是$R(A)$-zero矩阵。设列满阵 B，C^H，满足

$$N(C)=R(A^H),\ R(B)=N(A^H),$$

计算得：

$$P_LAP_L=AA^{\dagger}AAA^{\dagger}=A^2A^{\dagger}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

所以 $Ind(P_LAP_L)=Ind(P_LA^HP_L)=2$，从而 $N(P_LA^HP_L)\cap R(P_LA^HP_L)\neq\{0\}$，即 $R(B)\cap N(C)\neq\{0\}$。从而，不存在矩阵 B，C即满足命题3.2.1的条件，又同时使 $(B\cdot C)$是投影矩阵。所以，此时 A不具有类似命题3.2.2的结果。

3.3 L-零矩阵代数扰动的特殊形式

本文的上一节对L-零矩阵代数扰动的一般形式加以了讨论。在此基础上，本节将给出其代数扰动类似(3.2)的特殊形式存在的充要条件，以及由此得到的推论和几个注释。

定理 3.3.1 设 $A\in C^{n\times n}$是L-零矩阵，L是C^n上的子空间，令 $S=L^{\perp}\oplus(L\cap N(A))$，则以下两命题等价：

(1) $M=P_LAP_L+P_{S,S^{\perp}}$是非奇异的，且 $A_{(L)}^{(\dagger)}=M^{-1}-P_{S,S^{\perp}}$；

(2) $R(P_LAP_L)=R(P_LA^H)$。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)由(1)的条件知

$$P_{S,S^{\perp}}=M-P_LAP_L=M^{-1}-A_{(L)}^{(\dagger)}$$

所以 $$(M-P_LAP_L)(M^{-1}-A_{(L)}^{(\dagger)})=P_{S,S^{\perp}},$$

$$I-MA_{(L)}^{(\dagger)}-P_LAP_LM^{-1}+P_LAP_LA_{(L)}^{(\dagger)}=P_{S,S^{\perp}}\tag{3.3}$$

又由 $$M=P_LAP_L+P_{S,S^{\perp}};\ M^{-1}=A_{(L)}^{(\dagger)}+P_{S,S^{\perp}}。$$

代入(3.3)式可得

$$P_{S,S^\perp} = I - P_{S,S^\perp} A_{(L)}^{(\dagger)} - P_L A P_L A_{(L)}^{(\dagger)} - P_L A P_L P_{S,S^\perp} \tag{3.4}$$

因为 $S = L^\perp \oplus (L \cap N(A)) = N(AP_L) = N(P_L A P_L)$。

所以 $R(A_{(L)}^{(\dagger)}) = R(P_L A^H P_L) = N(P_L A P_L)^\perp = S^\perp$。

得到 $P_{S,S^\perp} A_{(L)}^{(\dagger)} = 0$; $P_L A P_L P_{S,S^\perp} = 0$。

代入(3.4)式可得

$$P_{S,S^\perp} = P_{R(P_L A P_L)^\perp, R(P_L A P_L)}$$

从而 $S = R(P_L A P_L)^\perp$，即得 $N(P_L A P_L) = R(P_L A P_L)^\perp$

所以 $R(P_L A P_L) = N(P_L A P_L)^\perp = N(AP_L)^\perp = R(P_L A^H)$。

(2) ⇒ (1)：因为 A是 L-零矩阵，所以 $N(P_L A P_L) = N(AP_L)$，从而 $R(P_L A^H) = R(P_L A^H P_L)$，所以

$$N(P_L A^H P_L)^\perp = R(P_L A P_L) = R(P_L A^H) = R(P_L A^H P_L),$$

得到 $R(B)^\perp = N(C)$，即得 $R(B) \overset{\perp}{\oplus} N(C) = C^n$，所以可取$C = B^\dagger$。又由

$$R(B) = N(P_L A^H P_L)) = N(C)^\perp = N(P_L A P_L) = L^\perp \oplus (L \cap N(A) = S$$

所以 $BC = BB^\dagger = P_{R(B),N(C)} = P_{S,S^\perp}$是正交投影。

由命题3.2.1可知，$M = P_L A P_L + BC = P_L A P_L + P_{S,S^\perp}$非奇异。且

$$M^{-1} = A_{(L)}^{(\dagger)} + (B^\dagger)^\dagger B^\dagger = A_{(L)}^{(\dagger)} + BB^\dagger = A_{(L)}^{(\dagger)} + P_{S,S^\perp}。$$

证毕。

推论 3.3.1 设 $A \in C^{n\times n}$是 L-零矩阵，且值域 Hermitian。L是C^n上的子空间，S，M 如定理3.3.1中所示，则 M非奇异，且 $A_{(L)}^{(\dagger)} = M^{-1} - P_{S,S^\perp}$。

证明 因为 A是值域 Hermitian矩阵，即 $R(A) = R(A^H)$；$N(A) = N(A^H)$。所以

$$N(P_L A P_L) = N(AP_L) = L^\perp \oplus (L \cap N(A)) = L^\perp \oplus (L \cap N(A^H)) = N(A^H P_L)。$$

从而 $R(P_L A^H P_L) = R(P_L A)$。又因为 $N(A) = N(A^H)$，所以 $dimAL = dimA^H L$。

$$rankP_L A P_L = rankAP_L = rankA^H P_L = rankP_L A\ 。$$

即 $$R(P_LAP_L)=R(P_LA)=R(P_LA^HP_L)=R(P_LA^H)$$
再由定理3.3.1即得。证毕。

注 3.3.1 推论3.3.1推广了引理3.2.3的结论。

注 3.3.2 从文[19]可知，当 A是 L-p.s.d矩阵时，

$$N(P_LAP_L)=N(AP_L); \tag{3.5}$$

$$R(P_LAP_L)=R(P_LA)。 \tag{3.6}$$

而当 A是 L-zero矩阵时，(3.5)式成立，但(3.6)式不一定成立。在 A是 L-zero矩阵的条件下，(3.6)式成立的充要条件是 $rankAP_L=rankP_LA$。

注 3.3.3 显然，由 $R(A)=R(A^H)$可得 $R(P_LAP_L)=R(P_LA^HP_L)$。反之，即使在A是 L-zero矩阵的条件下，$R(P_LAP_L)=R(P_LA^HP_L)$成立，也不一定能得到 $R(A)=R(A^H)$。

以下例子进一步说明了注3.3.2，3.3.3：

例 3.3.1 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$L=R(A)$。

计算得：$P_LAP_L=A^2A^\dagger=0$；$P_LA=A$，所以 $R(P_LAP_L)\neq R(P_LA)$；
另一方面，$R(P_LA^HP_L)=RAA^\dagger A^HAA^\dagger=\{0\}$，所以 $R(P_LAP_L)=R(P_LA^HP_L)$，而 $Ind(A)=2$，所以 $R(A)\neq R(A^H)$。

3.4 加 W权 Drazin逆的代数扰动

本节中，我们将先讨论加 W权 Drazin逆的一些性质，并在此基础上得到其代数扰动式。

以下是本节中所使用的两个引理。

引理 3.4.1 [16] 设 $A\in C^{m\times n}$，$W\in C^{n\times m}$，$Ind(AW)=k_1$，$Ind(WA)=k_2$，则有以下命题：

(1) $A_{d,W}WAW=(AW)_dAW=P_{R(AW)^{k_1},N(AW)^{k_1}}$，

$WAWA_{d,W}=WA(WA)_d=P_{R(WA)^{k_2},N(WA)^{k_2}}$；

(2) $WA_{d,W}=(WA)_d$ ； $A_{d,W}W=(AW)_d$；

(3) $rank(AW)^{k_1}=rank(WA)^{k_2}$。

引理 3.4.2 [23]　设 $A \in C_r^{m\times n}$，L是C^n上的子空间，且$dimL = s(\leq r)$，K是C^m上的子空间，且$dimK = m-s$，$AL \oplus K = C^m$；$B \in C_{m-s}^{m\times(m-s)}$是$K$的基，$C^H \in C_{n-s}^{n\times(n-s)}$是$L^{\perp}$的基，

(1) 当$m=n$时，令$T = A + BC - AP_{(A^H K^{\perp})^{\perp},L}$，

(2) 当$m>n$时，设$B=(B_1,\ B_2)$，$B_1 \in C_{n-s}^{m\times(n-s)}$，

令$M = (A + B_1C - AP_{(A^H K^{\perp})^{\perp},L},\ B_2)$，

(3) 当$m<n$时，设$C = \binom{C_1}{C_2}$，$C_1 \in C_{m-s}^{(m-s)\times n}$，

令$N = \binom{A+BC_1-P_{K,AL}A}{C_2}$。

则

(1) 当$m=n$时，T非奇异，且$A_{L,K}^{(2)} = T^{-1} - P_{(A^H K^{\perp})^{\perp},L}C^{\dagger}B^{\dagger}P_{K,AL}$；

(2) 当$m>n$时，M非奇异，记$M^{-1} = \binom{M_1}{M_2}$，$M_1 \in C_n^{n\times m}$，

则$A_{L,K}^{(2)} = M_1 - P_{(A^H K^{\perp})^{\perp},L}C^{\dagger}B_1^{\dagger}(B_1B_1^{\dagger} + B_2B_2^{\dagger})^{\dagger}P_{K,AL}$；

(3) 当$m<n$时，N非奇异，记$N^{-1} = (N_1,\ N_2)$，$N_1 \in C_m^{n\times m}$，

则$A_{L,K}^{(2)} = N_1 - P_{(A^H K^{\perp})^{\perp},L}(C_1^{\dagger}C_1 + C_2^{\dagger}C_2)^{\dagger}C_1^{\dagger}B^{\dagger}P_{K,AL}$。

性质 3.4.1　设$A \in C^{m\times n}$，$W \in C^{n\times m}$，$Ind(AW) = k_1$，$Ind(WA) = k_2$，则有以下命题：

(1) $A_{d,W} = (WAW)^{(2)}_{R(AW)^{k_1},N(WA)^{k_2}}$；

(2) $R(WA)^{k_2} \subseteq R(WAW)$；$N(AW)^{k_1} \supseteq N(WAW)$，

且等号成立的充要条件是$A_{d,W} \in WAW\{1,\ 2\}$，此时$k = max\{k_1,\ k_2\} \leq 2$。

若还有W是非奇异的，则$k = k_1 = k_2 = 1$。

证明　(1)：由引理3.4.1，$R(A_{d,W}) = R(AW)^{k_1}$；$N(A_{d,W}) = N(WA)^{k_2}$。

所以　　$A_{d,W}WAWA_{d,W} = A_{d,W}P_{R(WA)^{k_2},N(WA)^{k_2}} = A_{d,W}$。

从而　　$A_{d,W} = (WAW)^{(2)}_{R(AW)^{k_1},N(WA)^{k_2}}$。

(2)：由引理3.4.1，易知

$$R(WAWA_{d,W}) = R(WA)^{k_2} \subseteq R(WAW);$$

$$N(A_{d,W}WAW) = N(AW)^{k_1} \supseteq N(WAW)。$$

又因为

$$R(WAW) \subseteq R(WAWA_{d,W}) \Leftrightarrow (WAWA_{d,W})WAW = WAW \Leftrightarrow A_{d,W} \in WAW\{1\}。$$

所以 $\qquad R(WA)^{k_2} = R(WAW) \Leftrightarrow A_{d,W} \in WAW\{1,\ 2\}$。

同理 $\qquad N(AW)^{k_1} = N(WAW) \Leftrightarrow A_{d,W} \in WAW\{1,\ 2\}$。

此时由 $(WAWA_{d,W})WAW = WAW$,

得到 $(WA)(WA)_d WAW = WAW$，即 $(WA)^3(WA)_d = (WA)^2$,

所以 $k_2 \leq 2$，同理 $k_1 \leq 2$，$k = max\{k_1,\ k_2\} \leq 2$。证毕。

结合引理3.4.2与性质3.4.1，我们得到如下定理：

定理 3.4.1 设 $A \in C^{m\times m}$，$W \in C^{m\times m}$，$Ind(AW) = k_1$，$Ind(WA) = k_2$，则

$$A_{d,W} = T^{-1} - P_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}} C^{\dagger} B^{\dagger} P_{N(WA)^{k_2},R(WA)^{k_2}}\text{。}$$

其中 $\qquad T = WAWP_{R(AW)^{k_1},N(AW)^{k_1}} + BC$,

列满矩阵 B，C^H分别满足

$$R(B) = N(WA)^{k_2};\ N(C) = R(AW)^{k_1}\text{。}$$

证明 令 $L = R(AW)^{k_1}$，$dimL = s$；$K = N(WA)^{k_2}$。

则
$$\begin{aligned} dimK &= dimN(WA)^{k_2} = m - dimR(WA)^{k_2} \\ &= m - R(AW)^{k_1} = m - s\text{。}\end{aligned}$$

又因为
$$\begin{aligned} WAWL &= WAWR(AW)^{k_1} = WAWR(A_{d,W}) \\ &= R(WAWA_{d,W}) = R(WA)^{k_2},\end{aligned}$$

所以 $WAWL \oplus K = C^m$。由引理4.2,

即得 $T = WAW + BC - (WAW)P_{[(WAW)^H N^{\perp}(WA)^{k_2}]^{\perp},R(AW)^{k_1}}$非奇异。

又因为

$$\begin{aligned} [(WAW)^H N^{\perp}(WA)^{k_2}]^{\perp} &= [(WAW)^H(N(A_{d,W})^{\perp})]^{\perp} = [(WAW)^H R(A_{d,W})^*]^{\perp} \\ &= [R((WAW)^H A_{d,W}^H)]^{\perp} = N(A_{d,W}WAW) = N((AW)^{k_1})\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} T &= WAW + BC - (WAW)P_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}} \\ &= WAWP_{R(AW)^{k_1},N(AW)^{k_1}} + BC\text{。}\end{aligned}$$

又易得 $WAWR(AW)^{k_1} = R((WAW)A_{d,W}) = R(WA)^{k_2}$,

由性质3.4.1及引理3.4.2即可得到

$$\begin{aligned} A_{d,W} &= (WAW)^{(2)}_{R(AW)^{k_1},N(WA)^{k_2}} \\ &= T^{-1} - P_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}} C^{\dagger} B^{\dagger} P_{N(WA)^{k_2},R(WA)^{k_2}}\text{。证毕。}\end{aligned}$$

特别的，当 $W=I$时，由定理3.4.1即得 Drazin逆的表达式。

推论 3.4.1　设 $A\in C^{m\times m}$，$Ind(A)=k$，则 $A_d=T^{-1}-P_{N(A^k),R(A^k)}$，其中 $T=AP_{R(A^k),N(A^k)}+P_{N(A^k),R(A^k)}$。

当A是长方阵时，设 $A\in C^{m\times n}$(不失一般性的，设$m<n$)，类似定理3.4.1的证明，可得如下定理：

推论 3.4.2　设 $A\in C^{m\times n}(m<n)$，$W\in C^{n\times m}$，$Ind(AW)=k_1$，$Ind(WA)=k_2$，$rank(AW)^{k_1}=s$，则

$$A_{d,W}=M_1-P_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}}C^{\dagger}B_1^{\dagger}(B_1B_1^{\dagger}+B_2B_2^{\dagger})^{\dagger}P_{N(WA)^{k_2},R(WA)^{k_2}},$$

其中　$$M=(WAW+B_1C-WAWP_{N(AW)^{k_1},R(AW)^{k_1}},\ B_2)\in C^{n\times n}$$

$M^{-1}=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}$，$M_1\in C^{m\times n}$；$B=(B_1,\ B_2)\in C_{n-s}^{n\times n-s}$，$B_1\in C_{m-s}^{n\times(m-s)}$；$C^H\in C_{m-s}^{m\times m-s}$

满足　$R(B)=N(WA)^{k_2}$；$N(C)=R(AW)^{k_1}$。

4 P-除环上的代数扰动

上一章主要讨论的是实(复)数域上矩阵有关代数扰动的若干性质。但在实际问题中，我们所获取的线性模型其元素往往不具备某些重要的性质，如分配律，交换律。因此，对数域之外的一些代数结构的研究，如环、除环，也被人们普遍重视。

本章的主要工作是在P-除环上首次研究了矩阵的代数扰动理论及若干相关性质，从而进一步扩大了代数扰动的应用范围。

4.1 广义逆在P-除环上的若干性质

除环在量子力学等学科中有着广泛的应用。因而，除环上的矩阵也成为了矩阵研究中的重要课题。众多学者(曹重光，庄瓦金等)已在此领域做多不少工作，得到了丰富的结果([28~31]等)。本节将在已有结果的基础上，对P-除环上矩阵的广义逆性质做若干更为细致的讨论。

首先列出P-除环的定义，这在众多环论教材上都可找到。

定义4.1.1 称 $*: X \longrightarrow X^*$是空间X上的对合反自同构映射，若 $*$满足：

$$\forall x,\ x_1,\ x_2 \in X,\ (x^*)^* = x;\ (x_1x_2)^* = x_2^*x_1^*。$$

定义4.1.2 称集合Γ为P-除环，若Γ满足：

(a) Γ是一除环。

(b) 存在Γ上的一个对合反自同构 $*: a \mapsto a^*$，使对Γ中的任意s个非零元素 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$恒满足 $\sum_{i=1}^{s} a_ia_i^* \neq 0$。

本文中都以Γ表示带对合反自同构$*$的P-除环，以K表示除环，$R_r(R_l)$表示Γ上矩阵的右（左）值域，$N_r(N_l)$表示右（左）零空间。

引理4.1.1 [28] 设 $A \in K^{m\times n}$，则

(a) 存在 $X \in K^{n\times m}$，满足方程 $AXA = A$；$XAX = X$。

(b)若存在K上的一个对合反自同构$*$，则存在唯一的 $X \in K^{m\times n}$，满足方程 $AXA = A$；$XAX = X$；$(AX)^* = AX$；$(XA)^* = XA$的充要条件是 $rank(AA^*) = rank(A^*A) = rank(A)$，此时记 $X = A^\dagger$。

引理4.1.2 [31] 设 $A \in \Gamma^{m\times n}$，则 $rank(AA^*) = rank(A^*A) = rank(A)$。

推论4.1.1 设 $A \in \Gamma^{m\times n}$，则A的 $\{i_1, \ldots, i_t\}$-逆存在，$i_1, \ldots, i_t \in \{1,2,3,4\}$，且 $A^{\dagger}$唯一。

引理4.1.3 [31] 设T，L分别是设Γ上的行满和列满矩阵，则TT^*，L^*L都非奇异。

引理4.1.4 设 A是Γ上的$n\times n$阶满秩矩阵，则A^{-1}唯一存在，且满足等式 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$。

证明 当$n=1$时，设 $A=(a)$，$a\in\Gamma$，因为A满秩，所以 $a\neq 0$，又Γ是除环，所以存在 $a^{-1}\in\Gamma$，满足 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$。

当$n=k$时，设 A_k满秩，有 A_k^{-1}唯一存在，且 $A_kA_k^{-1}=A_k^{-1}A_k=I$成立。

当$n=k+1$时，设 $A_{k+1}=\begin{pmatrix} A_k & a_k \\ b_k & c \end{pmatrix}$，其中 $a_k\in\Gamma^{k\times 1}$，$b_k\in\Gamma^{1\times k}$，$c\in\Gamma$。

$$\begin{pmatrix} A_k & a_k \\ b_k & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ b_kA_k^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & \hat{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & A_k^{-1}a_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq T_1\cdot T_2\cdot T_3$$

因为 A_{k+1}满秩，所以 $\hat{c}=c-b_kA_k^{-1}a_k\neq 0$

$$令 \quad \hat{T_1}=\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -b_kA_k^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \hat{T_2}=\begin{pmatrix} A_k^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{c}^{-1} \end{pmatrix}, \hat{T_3}=\begin{pmatrix} I_k & -A_k^{-1}a_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $T=\hat{T_3}\cdot\hat{T_2}\cdot\hat{T_1}$，易验证：$\hat{T_i}=T_i^{-1}$，且 $\hat{T_i}T_i=T_i\hat{T_i}=I$，$i=1,2,3$，所以得到：$T=A_{k+1}^{-1}$，且 $TA_{k+1}=A_{k+1}T=I_{k+1}$。易知$T$满足M-P逆的四个方程，由M-P逆的唯一性可知，$T=A_{K+1}^{-1}$唯一。

由归纳法，得证。

应用引理4.1.3，4.1.4，即得如下推论：

推论4.1.2 设 A，B是Γ上的满秩矩阵，则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

推论4.1.3 设 $T\in\Gamma_k^{k\times n}$，$L\in\Gamma_k^{n\times k}$，则 $TT^{\dagger}=I_k$，$L^{\dagger}L=I_k$。

引理4.1.5 设 $A\in K_r^{m\times n}$，则存在 $H\in K_r^{m\times r}$，$L\in K_r^{r\times n}$，使得 $A=HL$。

证明 由[28]可知 $\forall A\in K_r^{m\times n}$，存在非奇异矩阵 P，Q使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}$$

令 $H=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$，$L=\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$即得。

4.2 P-除环上矩阵{1}-逆的代数扰动

本节将给出方阵及长方阵的{1}-逆在P-除环上所具有的代数扰动性质。

引理4.2.1 [29] 设 $A\in K^{m\times n}$，$B\in K^{n\times t}$，则有

(a) $R_r(AB)=R_r(A)$的充要条件是$rank(AB)=rank(A)$，

(b) $N_r(AB)=N_r(B)$的充要条件是$rank(AB)=rank(B)$。

引理4.2.2 [30] 设 $E\in K^{n\times n}$为幂等阵，则 $R_r(E)\oplus N_r(E)=K^n$，$E=P_{R_r(E),N_r(E)}$。反之，若 $L\oplus M=K^n$，其中 L，K都是 K^n 的右子空间，则必存在幂等阵 $P_{L,M}$，使得 $R_r(P_{L,M})=L$，$N_r(P_{L,M})=M$。

下面给出本节的主要定理。

定理4.2.1 设 $A\in\Gamma_r^{n\times n}$，$B\in\Gamma_k^{n\times k}$，$C^*\in\Gamma_k^{n\times k}$，令 $M=A+BC$，则 M非奇异，且 $M^{-1}\in A\{1\}$的充要条件是

$$R_r(A)\oplus R_r(B)=\Gamma^n,\ N_r(A)\oplus N_r(C)=\Gamma^n。$$

若上述条件成立，则

$$AM^{-1}=P_{R_r(A),R_r(B)},\ M^{-1}A=P_{N_r(C),N_r(A)},\ M^{-1}AM^{-1}=A^{(1,2)}_{N_r(C),R_r(B)}。$$

证明 (必要性) 因为M可逆，且 $M^{-1}\in A\{1\}$，所以 AM^{-1}，$M^{-1}A$都是幂等矩阵。由引理4.2.2，得到

$$R_r(AM^{-1})\oplus N_r(AM^{-1})=\Gamma^n,\ R_r(M^{-1}A)\oplus N_r(M^{-1}A)=\Gamma^n。$$

由引理4.2.1，得到 $R_r(AM^{-1})=R_r(A)$，$N_r(M^{-1}A)=N_r(A)$。

由 $M=A+BC$，得到 $R^n=R_r(M)=R_r(A+BC)\subseteq R_r(A)+R_r(B)$，

所以 $R_r(A)+R_r(B)=\Gamma^n$。且 $rank(B)\geq n-r$。又因为 $M^{-1}\in A\{1\}$，

所以 $AM^{-1}M=AM^{-1}(A+BC)=A+AM^{-1}BC$，进而 $AM^{-1}BC=0$。

由推论4.1.3得到 $AM^{-1}B=AM^{-1}BCC^\dagger=0$。

所以 $R_r(B)\subseteq N_r(AM^{-1})=MN_r(A)$，又因为 $dimMN_r(A)=n-r$，

所以$rank(B)\leq n-r$。从而得到 $R_r(A)\oplus R_r(B)=\Gamma^n$。

另一方面，同理可得 $N_r(A)+N_r(C)=\Gamma^n$。

因为 M^{-1}存在，所以 $N_r(A+BC)=N_r(M)=\{0\}$，

进而 $N_r(A)\cap N_r(C)\subseteq N_r(A+BC)=\{0\}$。即 $N_r(A)\oplus N_r(C)=\Gamma^n$

（充分性） 由引理4.1.5，A在Γ上有满秩分解：

$$A = FG,\ F \in \Gamma_r^{n\times r},\ G \in \Gamma_r^{r\times n}。$$

所以有 $R_r(A) = R_r(FG) = R_r(F)$；$N_r(A) = N_r(FG) = N_r(G)$。

由充分性条件得到 $R_r(F) \oplus R_r(B) = \Gamma^n$；$N_r(G) \oplus N_r(C) = \Gamma^n$。

所以有 (F,B)及 $\begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix}$是非奇异的。所以 $M = (F,B)\begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix}$也非奇异，

且由推论4.1.2

$$M^{-1} = \left[(F,B)\begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix}^{-1}(F,B)^{-1}$$

设 $(F,B)^{-1} = \begin{pmatrix} \dot{F} \\ \dot{B} \end{pmatrix}$，则易知 $\dot{F}F = I$，$\dot{B}B = I$，$\dot{F}B = 0$，$\dot{B}F = 0$。

设 $\begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix}^{-1} = (\dot{G}, \dot{C})$，也得到 $G\dot{G} = I$，$C\dot{C} = I$，$G\dot{C} = 0$，$C\dot{G} = 0$。所以

$$AM^{-1}A = FG(\dot{G},\dot{C})\begin{pmatrix} \dot{F} \\ \dot{B} \end{pmatrix}FG = F(I,0)\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}G = FG = A$$

即 $M^{-1} \in A\{1\}$。

若上述等价条件成立，则有 $N_r(AM^{-1}) = R_r(B)$；$R_r(M^{-1}A) = N_r(C)$。

再由引理4.2.2即得

$$AM^{-1} = P_{R_r(A),R_r(B)},\ M^{-1}A = P_{N_r(C),N_r(A)},\ M^{-1}AM^{-1} = A^{(1,2)}_{N_r(C),R_r(B)}。$$

得证。

定理4.2.1讨论的是n阶方阵，下面我们将考虑长方阵的情况。

引理4.2.3 设Γ^n的两个右子空间 L，M满足 $dimL + dimM = n$，U，V是列满秩矩阵，满足 $R_r(U) = L$，$R_r(V) = M$，则 $L \oplus M = \Gamma^n$的充要条件是 $P_{L,N_r(U^*)} + P_{M,N_r(V^*)}$是非奇异的。

证明 类似[29，引理9]可得。

定理4.2.2 设 $A \in \Gamma_r^{m\times n}$，$B \in \Gamma_k^{m\times k}$，$C \in \Gamma_{k+n-m}^{(k+n-m)\times n}$，

(a) 当 $m > n$时，设 $B = (B_1, B_2)$，$B_1 \in \Gamma_{k+n-m}^{m\times(k+n-m)}$，

令 $\hat{M} = (A + B_1C, B_2)$，

(b) 当 $m < n$时，设 $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$，$C_1 \in \Gamma_k^{k\times n}$，令 $\hat{N} = \begin{pmatrix} A + BC_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$。

则

(a) 当 $m > n$时，$\hat{M}$非奇异，若记 $\hat{M}^{-1} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$，$M_1 \in \Gamma_n^{n\times m}$，

有 $M_1 \in A\{1\}$。

(b) 当 $m < n$时，$\hat{N}$非奇异，若记 $\hat{N}^{-1} = (N_1, N_2)$，$N_1 \in \Gamma_m^{n\times m}$，

有 $N_1 \in A\{1\}$。

成立的充要条件是 $R_r(A) \oplus R_r(B) = \Gamma^m$，$N_r(A) \oplus N_r(C) = \Gamma^n$。

证明 不失一般性的，只证明(b)。

(b) 当 $m < n$时，令 $\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$，$\hat{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}_{n\times n}$。

得到 $\hat{A} + \hat{B}C = \begin{pmatrix} A + BC_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \hat{N}$。又因为 $N_r(\hat{A}) = N_r(A)$，

所以 $N_r(A) \oplus N_r(C) = R^n$等价于 $N_r(\hat{A}) \oplus N_r(C) = \Gamma^n$。又由

$$P_{R_r(\hat{B}),N_r(\hat{B}^*)} + P_{R_r(\hat{A}),N_r(\hat{A}^*)} = \begin{pmatrix} BB^\dagger + AA^\dagger & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{R_r(B),N_r(B^*)} + P_{R_r(A),N_r(A^*)} & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

所以，$P_{R_r(\hat{B}),N_r(\hat{B}^*)} + P_{R_r(\hat{A}),N_r(\hat{A}^*)}$ 与 $P_{R_r(B),N_r(B^*)} + P_{R_r(A),N_r(A^*)}$具有相同的奇异性。

由引理4.2.3，当 $dimR_r(\hat{B}) + dimR_r(\hat{A}) = n$时，

$$R_r(\hat{B}) \oplus R_r(\hat{A}) = \Gamma^n \Leftrightarrow P_{R_r(\hat{B}),\cdot} + P_{R_r(\hat{A}),\cdot}\text{非奇异。}$$

同样由引理4.2.3，当 $dimR_r(B) + dimR_r(A) = m$时，

$$R_r(B) \oplus R_r(A) = R^m \Leftrightarrow P_{R_r(B),\cdot} + P_{R_r(A),\cdot}\text{非奇异。}$$

另一方面，因为 $\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$，$\hat{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}_{n\times n}$。

所以 $dimR_r(\hat{B}) + dimR_r(\hat{A}) = n$ 等价于 $dimR_r(B) + dimR_r(A) = m$。

从而有 $R_r(\hat{B})\oplus R_r(\hat{A})=\Gamma^n$ 等价于 $R_r(B)\oplus R_r(A)=\Gamma^m$。
由定理4.2.1可知 $\hat{N}^{-1}\in\hat{A}\{1\}$，所以

$$\hat{A}\hat{N}^{-1}\hat{A}=\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}(N_1,N_2)\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AN_1A\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}$$

即 $AN_1A=A$，$N_1\in A\{1\}$。

4.3 P-除环上矩阵$A^{(2)}_{T,S}$-逆的代数扰动

由广义逆理论可知，常用的特殊广义逆，如：M-P逆，群逆，Drazin逆都是给定值域和零空间的{2}-逆，即 $A^{(2)}_{T,S}$-逆。[23]中讨论了 $A^{(2)}_{T,S}$-逆的代数扰动。本节中，我们将结果推广到P-除环上。

引理4.3.1 [30] 设 $A\in\Gamma_r^{m\times n}$，T，S分别是 Γ^n，Γ^m上的右子空间，则 $A^{(2)}_{T,S}$-逆唯一存在的充要条件为

$$AT\oplus S=\Gamma^m,\ dimT=s,\ dimS=m-s,\ 0\leq s\leq r。$$

由引理4.1.4，4.2.2，以及推论4.1.2，4.1.3，类似[30]中的证明，可知下面两个引理在P-除环上也成立。

引理4.3.2 设 $A\in\Gamma_r^{n\times n}$，L，K是 Γ^n的右子空间，$dimL=s\leq r$，$dimK=n-s$，$AL\oplus K=\Gamma^n$，$B,C^*\in\Gamma_{n-s}^{n\times(n-s)}$，满足 $R_r(B)=K$，$N_r(C)=L$，设E是任意满足 $E\oplus L=R^n$的右子空间，令 $T=A+BC-AP_{E,L}$，
则 $\begin{pmatrix}T&B\\C&0\end{pmatrix}$非奇异，且其逆矩阵为 $\begin{pmatrix}A^{(2)}_{L,K}&P_{E,L}C^\dagger\\B^\dagger P_{K,AL}&-I_{n-s}\end{pmatrix}$。

引理4.3.3 设分块矩阵 $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$是 Γ上的满秩阵，则其逆矩阵为

$$\begin{pmatrix}A_{11,2}^{-1}&-A_{11,2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11,2}^{-1}&A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1}A_{21}A_{11,2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\end{pmatrix},$$

其中$A_{11,2}=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$。

以下是本节的主要定理。

定理4.3.1 设 $A\in\Gamma_r^{m\times n}$，L，K分别是 Γ^n，Γ^m上的右子空间，且 $dimL=s\le r$，$dimK=m-s$，$AL\oplus K=\Gamma^m$，$B\in\Gamma_{m-s}^{m\times(m-s)}$，$C^*\in\Gamma_{n-s}^{n\times(n-s)}$，满足 $R_r(B)=K$，$N_r(C)=L$，设 E是任意满足 $E\oplus L=\Gamma^n$的右子空间。

(a) 当 $m=n$时，令 $T=A+BC-AP_{E,L}$，则 $A_{L,K}^{(2)}=T^{-1}-P_{E,L}C^\dagger B^\dagger P_{K,AL}$。

(b) 当 $m>n$时，设 $B=(B_1,B_2)$，$B_1\in\Gamma_{n-s}^{m\times(n-s)}$，

令 $M=(A+B^1C-AP_{E,L},B_2)$，则 M非奇异，且设

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix},\ M_1\in\Gamma_n^{n\times m},\ B^\dagger=\begin{pmatrix}\hat{B}_1\\\hat{B}_2\end{pmatrix},\ \hat{B}_1\in\Gamma_{n-s}^{(n-s)\times m}$$

则有 $A_{L,K}^{(2)}=M_1-P_{E,L}C^\dagger\hat{B}_1P_{K,AL}$。

(c) 当 $m<n$时，设 $C=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$，$C_1\in\Gamma_{m-s}^{(m-s)\times n}$，

令 $N=\begin{pmatrix}A+BC_1-AP_{K,AL}\\C_2\end{pmatrix}$。则 N非奇异，且设

$$N^{-1}=(N_1,N_2),\ N_1\in\Gamma_m^{n\times m},\ C^\dagger=(\hat{C}_1,\hat{C}_2),\ \hat{C}_1\in R_{n-s}^{(n-s)\times m}$$

则有 $A_{L,K}^{(2)}=N_1-P_{E,L}\hat{C}_1B^\dagger P_{K,AL}$。

证明 (a) 当 $m=n$时，由引理4.3.2，4.3.3可知：

$$\begin{pmatrix}T&B\\C&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{L,K}^{(2)}&P_{E,L}C^\dagger\\B^\dagger P_{K,AL}&-I_{n-s}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(A_{L,K}^{(2)}+P_{E,L}C^\dagger B^\dagger P_{K,AL})^{-1}&*\\ *&*\end{pmatrix},$$

得到 $T=(A_{L,K}^{(2)}+P_{E,L}C^\dagger B^\dagger P_{K,AL})^{-1}$，即 $A_{L,K}^{(2)}=T^{-1}-P_{E,L}C^\dagger B^\dagger P_{K,AL}$。

(b) 当 $m>n$时，令

$$\hat{A}=(A,\ 0)_{m\times m},\ \hat{C}=\begin{pmatrix}C&0\\0&I_{m-n}\end{pmatrix}_{n\times n},\ \hat{L}=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}:\ x\in L,\ 0\in R^{(n-m)}\right\}$$

所以得到 $N_r(\hat{C})=\hat{L}$。

设 $e_1,\ldots,e_{n-s}\in\Gamma^n$，$E=R_r([e_1,\ldots,e_{n-s}])$，

令 $\hat{e}_i=\begin{pmatrix}e_i\\0\end{pmatrix}\in\Gamma^m$，$i=1,\ldots,n-s$，

令 $\hat{e}_j$，$j=n-s+1,\ldots,m-s$是第j个分量为1的单位向量，$\hat{E}=R_r([\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_{m-s}])$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/397132054063006030