专题 04 灵活运用周期性、单调性、奇偶性、对称性解决函数性质问题

目 录

题型 01 函数单调性的综合应用

1.（2023·山东青岛·高三山东省青岛第十九中学校考期中）定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，且$f(2)=4$，则不等式$f(x)-2x>0$的解集为（   ）

A．$(2,+\infty)$　　B．$(0,2)$　　C．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

【答案】B

【解析】根据定义域为$(0,+\infty)$且$\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$可知$\frac{x_1x_2\left[\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right]}{x_1-x_2}<0$，

又$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，所以对$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$\frac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1-x_2}<0$恒成立；

即可知函数$y=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减；

又$f(2)=4$，可得$\frac{f(2)}{2}=2$，

不等式$f(x)-2x>0$可化为$\frac{f(x)}{x}>2=\frac{f(2)}{2}$，解得$0<x<2$，

可得不等式$f(x)-2x>0$的解集为$(0,2)$.

故选：B

2.（2023·云南大理·高三云南省下关第一中学校考期中）已知函数$f(x)=\begin{cases}(a-2)x,x\geq 2\\ -\frac{1}{8}x-\frac{1}{2},x<2\end{cases}$，满足对任意的实数$x_1\neq x_2$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，则实数$a$的取值范围为（   ）

A．$(-\infty,2)$　　B．$\left(-\infty,\frac{13}{8}\right)$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$\left(-\infty,\frac{13}{8}\right]$

【答案】D

【解析】因为函数$f(x)$满足对任意的实数$x_1\neq x_2$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，

不妨设$x_1<x_2$，则$x_1-x_2<0$，则$f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$，

则函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上为减函数，则$\begin{cases}a-2<0\\ 2(a-2)\leq -\frac{1}{8}\times 2-\frac{1}{2}\end{cases}$，解得$a\leq\frac{13}{8}$，

因此，实数a的取值范围是$\left(-\infty,\frac{13}{8}\right]$，

故选：D.

3．（2023·四川泸州·高三泸州老窖天府中学校考阶段练习）已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且

$f(\sin\omega)+f(-\cos\omega)>f(-\sin\omega)+f(\cos\omega)$，其中 ω 是锐角，并且使得 $g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减．则 ω 的取值范围是（　）

A．$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\right]$　　B．$\left[\frac{5}{4},\frac{\pi}{2}\right)$　　C．$\left[\frac{1}{2},\frac{\pi}{4}\right)$　　D．$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$

【答案】A

【解析】若 $\frac{\pi}{2}>\omega>\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}\sin\omega>\cos\omega\\-\cos\omega>-\sin\omega\end{cases}$，由函数单调性可知 $\begin{cases}f(\sin\omega)>f(\cos\omega)\\f(-\cos\omega)>f(-\sin\omega)\end{cases}$，

此时显然 $f(\sin\omega)+f(-\cos\omega)>f(-\sin\omega)+f(\cos\omega)$，符合题意；

若 $\frac{\pi}{4}\geq\omega>0\Rightarrow\begin{cases}\sin\omega\leq\cos\omega\\-\cos\omega\leq-\sin\omega\end{cases}$，由函数的单调性知 $\begin{cases}f(\sin\omega)\leq f(\cos\omega)\\f(-\cos\omega)\leq f(-\sin\omega)\end{cases}$，

则 $f(\sin\omega)+f(-\cos\omega)\leq f(-\sin\omega)+f(\cos\omega)$ 不符合题意.

故 $\frac{\pi}{2}>\omega>\frac{\pi}{4}$，可排除 C、D 选项，

又 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，

此时 $g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，

则 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\geq\frac{\pi}{2}\\\omega\pi+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\omega\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$，

综上可知 $\omega\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\right]$.

故选：A

4．（2023·河南开封·高三通许县第一高级中学校考阶段练习）实数 a,b,c 分别满足

$a^{2023}=\mathrm{e},2023^{b}=2024,2022c=2023$，则 a,b,c 的大小关系为（　）

A．$a>b>c$　　B．$c>a>b$

C．$a>c>b$　　D．$b>a>c$

【答案】B

【解析】因为 $a^{2023}=\mathrm{e}$，所以 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{2023}}$，则 $\frac{1}{a}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2023}}$.

因为 $2022c=2023$,所以 $\frac{1}{c}=\frac{2022}{2023}$.

令 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-1$， 则 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-1$，

当 $x>0$ 时 $f'\left(x\right)>0$， 则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调增；

当 $x<0$ 时 $f'\left(x\right)<0$， 则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调减.

所以 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-1\geq f\left(0\right)=0$， 即 $\mathrm{e}^{x}\geq x+1$.

所以 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{2023}}>\frac{1}{2023}+1=\frac{2024}{2023}$ 且 $\frac{1}{a}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2023}}>-\frac{1}{2023}+1=\frac{2022}{2023}=\frac{1}{c}>0$，

则可得 $a<c$.

因为 $2023^{b}=2024$,所以 $b=\log_{2023}2024=\frac{\ln 2024}{\ln 2023}>1$

令 $g\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$,则 $g'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^{2}}$,

当 $x>\mathrm{e}$时， $g'\left(x\right)<0$,所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left(\mathrm{e},+\infty\right)$ 单调减,

所以可得 $\frac{\ln 2023}{2023}>\frac{\ln 2024}{2024}$,即 $\frac{2024}{2023}>\frac{\ln 2024}{\ln 2023}$,

又 $a>\frac{2024}{2023}$,所以 $a>\frac{2024}{2023}>\frac{\ln 2024}{\ln 2023}=b$,

所以 $c>a>b$.

故选:B.

5.（2023·江苏宿迁·高三沭阳如东中学校考期中）若对任意的 $x_1,x_2\in\left(k,+\infty\right)$，且当 $x_1<x_2$ 时，都有 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{5}{x_1x_2}$，则实数 k 的最小值是（　）

A． e　　B． $\frac{1}{5}$　　C． 5　　D． $\frac{1}{\mathrm{e}^{2}}$

【答案】C

【解析】由题设知： $k>0$ 且 $\ln\frac{1}{x_2}-\frac{5}{x_2}<\ln\frac{1}{x_1}-\frac{5}{x_1}$， $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$，

令 $f(x)=\ln x-5x$ 且 $x\in(0,\frac{1}{k})$， 即 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{k})$ 上递增，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-5\geq 0$ 在 $(0,\frac{1}{k})$ 上恒成立， 而 $f'(x)$ 递减，

所以 $f'(\frac{1}{k})=k-5\geq 0\Rightarrow k\geq 5$， 故实数 k 的最小值是 5.

故选：C

题型 02 函数的奇偶性的综合应用

6.（2023·河南·高三校联考阶段练习）已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，则不等式 $\left|f\left(2x-3\right)\right|+\ln\frac{2}{\mathrm{e}}\leq 0$ 的解集为（其中 e 为自然对数的底数）（　）

A. $\left(-\infty,\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]\cup\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2,+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 2,\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\right]$　　D. $\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 2,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2,+\infty\right)$

【答案】B

【解析】因为当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，

所以 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-1\geq \mathrm{e}^{0}-1=0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(x)\geq f(0)=0$，

又因为 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $f(x)<f(0)=0$，

又因为 $y=|f(x)|$ 为偶函数，

所以 $y=|f(x)|$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增；

$f(\ln 2)=\mathrm{e}^{\ln 2}-\ln 2-1=1-\ln 2$

$\left|f\left(2x-3\right)\right|+\ln\frac{2}{\mathrm{e}}\leq 0\Leftrightarrow\left|f\left(2x-3\right)\right|\leq -\ln\frac{2}{\mathrm{e}}=1-\ln 2=f(\ln 2)$，

所以 $-\ln 2\leq 2x-3\leq \ln 2$，

解得 $\frac{1}{2}(3-\ln 2)\leq x\leq\frac{1}{2}(\ln 2+3)$.

故选：B.

7.（2023·全国·校联考模拟预测）已知函数 $f(x)=\cos x+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^{2}$，则关于 x 的不等式 $f\left(2x-1\right)<f\left(3+x\right)$ 的解集为（　）

A. $\left(-1,2\right)$　　B. $(-\frac{2}{3},4)$　　C. $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$　D. $(-\infty,-\frac{2}{3})\cup(4,+\infty)$

【答案】B

【解析】因为 $f(-x)=\cos\left(-x\right)+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\left(-x\right)^{2}=\cos x+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}x^{2}=f\left(x\right)$，

所以函数 $f(x)$ 为偶函数，

当$x\quad 0$时，有 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}-\sin x-x$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}-\sin x-x$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-\cos x-1\quad 2\sqrt{\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}}-\cos x-1=1-\cos x\quad 0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)\quad g(0)=0$，即 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，又函数 $f(x)$ 为偶函数，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

所以关于 x 的不等式 $f(2x-1)<f(3+x)$ 可转化为 $|3+x|>|2x-1|$，解得 $-\frac{2}{3}<x<4$.

关于 x 的不等式 $f\left(2x-1\right)<f\left(3+x\right)$ 的解集为 $(-\frac{2}{3},4)$，

故选：B.

8.（2023 • 四川遂宁 • 高二统考期末）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，若不等式 $f\left(\sqrt{16-x^{2}}\right)+f\left(2\sqrt{3}-k(x+2)\right)\leq 0$ 的解集为区间 $\left[a,b\right]$，且 $b-a=2$，则 $k=$（　）

A．$-\sqrt{3}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．2　　　　D．-2

【答案】B

【解析】∵函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，

∴函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，又 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，

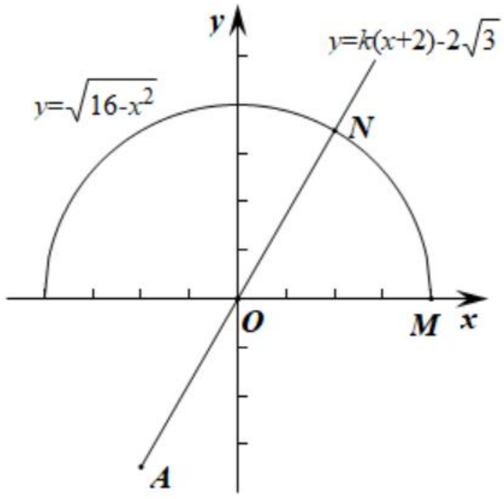
∴函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数且在 R 上的增函数，

由 $f\left(\sqrt{16-x^{2}}\right)+f\left(2\sqrt{3}-k(x+2)\right)\leq 0$，可得

$f\left(\sqrt{16-x^{2}}\right)\leq -f\left(2\sqrt{3}-k(x+2)\right)=f\left(-2\sqrt{3}+k(x+2)\right)$，

∴ $\sqrt{16-x^{2}}\leq k(x+2)-2\sqrt{3}$ 的解集为区间 $\left[a,b\right]$，且 $b-a=2$，

作出函数 $y=\sqrt{16-x^{2}}$ 与 $y=k(x+2)-2\sqrt{3}$ 的图象，



函数 $y=\sqrt{16-x^2}$ 表示圆心在原点，半径为 4 的圆的上半部分，$y=k(x+2)-2\sqrt{3}$ 表示过定点 $A\left(-2,-2\sqrt{3}\right)$ 的直线，

由图象结合条件可知 $b=4$，又 $b-a=2$，

$\therefore a=2$，即直线与半圆的交点 N 的横坐标为 2，故 $N\left(2,2\sqrt{3}\right)$，

$\therefore k=\dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2+2}=\sqrt{3}$.

故选：B.

9.（2023•江苏泰州•模拟预测）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^{|x|}}-\dfrac{1}{2}|x|$，则 $f(x)f(x+2)\le 0$ 的解集为（　）

A．$[-3,1]$　　B．$[-1,1]$　　C．$[-3,-1]$　　D．$[-3,+\infty)$

【答案】A

【解析】显然，函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数.

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2^x}-\dfrac{1}{2}x$，所以 $f(x)$ 是减函数，且 $f(1)=0$；

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)$ 是增函数，且 $f(-1)=0$.

因此，当 $x\le -1$ 或 $x\ge 1$ 时，$f(x)\le 0$；当 $-1\le x\le 1$ 时，$f(x)\ge 0$.

所以，$f(x)f(x+2)\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le 0 \\ f(x+2)\ge 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x+2)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1\text{或}x\ge 1 \\ -1\le x+2\le 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x+2\le -1\text{或}x+2\ge 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -3\le x\le -1$ 或 $-1\le x\le 1 \Leftrightarrow -3\le x\le 1$.

故 $f(x)f(x+2)\le 0$ 的解集为 $[-3,1]$.

故选：A.

10.（2023·河南·高三开封高中校联考期中）已知函数 $f\left(x\right)=\log_2|x|+x^2$，则不等式 $f\left(\ln x\right)+f\left(-\ln x\right)<2$ 的解集为（ ）

A．$\left(\frac{1}{e},1\right)$ B．$\left(\frac{1}{e},e\right)$ C．$\left(1,e\right)$ D．$\left(\frac{1}{e},1\right)\cup\left(1,e\right)$

【答案】D

【解析】由题可知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，

$\because f\left(-x\right)=\log_2|-x|+\left(-x\right)^2=\log_2|x|+x^2=f\left(x\right)$，

$\therefore f\left(x\right)$ 是偶函数，

$\therefore$ 由 $f\left(\ln x\right)+f\left(-\ln x\right)<2$ 可得 $2f\left(\ln x\right)<2$，即 $f\left(\ln x\right)<1$.

当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=\log_2 x+x^2$，$\because y=\log_2 x$ 和 $y=x^2$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上都是单调递增的，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，又因 $f\left(x\right)$ 是偶函数，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递减.

又 $\because f\left(1\right)=1=f\left(-1\right)$，由函数 $f\left(x\right)$ 的定义域知 $f\left(\ln x\right)$ 有 $\ln x\neq 0$，

$\therefore$ 由 $f\left(\ln x\right)<1=f\left(1\right)$ 可得 $0<\ln x<1$，解得：$1<x<e$；

由 $f\left(\ln x\right)<1=f\left(-1\right)$ 可得 $-1<\ln x<0$，解得：$\frac{1}{e}<x<1$.

综上，不等式的解集为 $\left(\frac{1}{e},1\right)\cup\left(1,e\right)$.

故选：D.

题型 03 已知 f(x)=奇函数+M

11.（2023·全国·高三专题练习）函数 $f\left(x\right)=\frac{\left(2^x+1\right)^2+x\cdot 2^{x+1}}{x\cdot 2^x}$ 在 $\left[-2019,0\right)\cup\left(0,2019\right]$ 上的最大值为 M，最小值为 N，则 $M+N=$（ ）

A．4038 B．4 C．2 D．0

【答案】B

【解析】 $f\left(x\right)=\dfrac{\left(2^{x}+1\right)^{2}+x\cdot 2^{x+1}}{x\cdot 2^{x}}=\dfrac{\left(2^{x}+1\right)^{2}}{x\cdot 2^{x}}+2$

设 $g(x)=\dfrac{\left(2^{x}+1\right)^{2}}{x\cdot 2^{x}}$ 则 $g(-x)=\dfrac{\left(2^{-x}+1\right)^{2}}{-x\cdot 2^{-x}}=\dfrac{\left(2^{x}+1\right)^{2}}{-x\cdot 2^{x}}=-g(x)$, 为奇函数.

$f\left(x\right)_{\max}=g(x)_{\max}+2$， $f\left(x\right)_{\min}=g(x)_{\min}+2$

即 $M+m=g(x)_{\max}+g(x)_{\min}+4=4$

故选 B

12．（2023·全国·高三专题练习）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}+sinx$（$e$ 为自然对数的底数）在区间[－1，1]上的最大值和最小值之和等于___.

【答案】2

【解析】 $f\left(x\right)=\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}+\sin x\Rightarrow f\left(x\right)-1=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}+\sin x$，

设 h（x）$=f$（x）－1，x∈[－1，1]，

则 $h\left(-x\right)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}+\sin\left(-x\right)=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}-\sin x=-h\left(x\right)$，所以 h（x）为奇函数，

h'（x）$=f'$（x）$=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^{2}}+\cos x>0$，

因此函数 h（x）在 x∈[－1，1]上单调递增.

∴h（x）的最大值和最小值之和＝h（1）+h（－1）＝0，

故 f（x）在区间[－1，1]上的最大值和最小值之和为 2.

故答案为：2.

13．（2023·全国·高三专题练习）设函数 $f\left(x\right)=2018\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)+2019\sin x+2020, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$的最大值为 M ,最小值为 N ,那么 $M+N=$____________.

【答案】4040

【解析】令 $g\left(x\right)=2018\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)+2019\sin x$， $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，

因为 $2018\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)+2018\ln\left(\sqrt{\left(-x\right)^{2}+1}+x\right)=2018\ln 1=0$ ，

$2019\sin\left(-x\right)+2019\sin x=0$，

故 $g\left(x\right)+g\left(-x\right)=0$， 所以 $g\left(x\right)$ 为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的奇函数，

故 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=0$.

又 $M=g(x)_{\max}+2020$， $N=g(x)_{\min}+2020$，

故 $M+N=4040$.

故答案为： 4040.

14.（2023·河南·河南省淮阳中学校联考模拟预测）已知函数 $f(x)=\left(\frac{2}{e^{x+\pi}+1}-1\right)\cdot\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-3$，则 $f(x)$ 在 $[-2\pi,0]$ 上的最大值与最小值之和为______.

【答案】-6

【解析】$f(x)=\left(\frac{2}{e^{x+\pi}+1}-1\right)\cdot(-\cos x)-3=\left(\frac{2}{e^{x+\pi}+1}-1\right)\cdot\cos(x+\pi)-3$；

令 $t=x+\pi$，当 $x\in[-2\pi,0]$时， $t\in[-\pi,\pi]$， $\therefore f(t)=\left(\frac{2}{e^{t}+1}-1\right)\cdot\cos t-3$；

令 $g(t)=f(t)+3=\left(\frac{2}{e^{t}+1}-1\right)\cdot\cos t=\frac{1-e^{t}}{e^{t}+1}\cdot\cos t$， $t\in[-\pi,\pi]$，

$\because g(-t)=\frac{1-e^{-t}}{e^{-t}+1}\cdot\cos(-t)=\frac{e^{t}-1}{e^{t}+1}\cdot\cos t=-g(t)$，

$\therefore g(t)$ 为定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数， $\therefore g(t)_{\max}+g(t)_{\min}=0$，

$\therefore f(t)_{\max}+3+f(t)_{\min}+3=0$， 即 $f(t)_{\max}+f(t)_{\min}=-6$，

\ $f(x)$ 在 $[-2\pi,0]$ 上的最大值和最小值之和为 -6.

故答案为： -6.

15.（2023·广西桂林·统考一模）$f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ 为奇函数，则 $f(2023)+f(-2022)=$（ ）

A. －1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】A

【解析】$f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数， $f\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ 为奇函数，则

$f\left(-x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=-\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]\Rightarrow f\left(-x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-1$.

$\therefore f(2023)+f(-2022)=f\left(\frac{4045}{2}+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{4045}{2}+\frac{1}{2}\right)=-1$.

故选： A

16.（2023 春·河南洛阳·高一孟津县第一高级中学校考阶段练习）已知关于 x 的函数

$f\left(x\right)=\dfrac{5x^3+tx^2+3x+\sin x+t^2}{x^2+t}$在$\left[-2022,2022\right]$上的最大值为$M$，最小值$N$，且$M+N=2022$，则实数$t$的值是（　）

A．674　　　　B．1011　　　　C．2022　　　　D．4044

【答案】B

【解析】$\because f\left(x\right)=\dfrac{5x^3+tx^2+3x+\sin x+t^2}{x^2+t}=\dfrac{t\left(x^2+t\right)+5x^3+3x+\sin x}{x^2+t}=t+\dfrac{5x^3+3x+\sin x}{x^2+t}$，$x\in\left[-2022,2022\right]$，

$\therefore$令$g\left(x\right)=\dfrac{5x^3+3x+\sin x}{x^2+t}$，$x\in\left[-2022,2022\right]$，则$f\left(x\right)=g\left(x\right)+t$，

$g\left(x\right)$定义域关于原点对称，且$g\left(-x\right)=\dfrac{5(-x)^3+3(-x)+\sin(-x)}{(-x)^2+t}=\dfrac{-5x^3-3x-\sin x}{x^2+t}=-g(x)$，

所以$g\left(x\right)$为奇函数，

$\therefore g\left(x\right)_{\max}+g\left(x\right)_{\min}=0$（奇函数的性质），

$\therefore M+N=f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=g\left(x\right)_{\max}+t+g\left(x\right)_{\min}+t=2022$，

$\therefore 2t=2022$，即$t=1011$．

故选：B

17．（2023·全国·高三专题练习）设函数$f\left(x\right)=2018\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+2019\sin x+2020,x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$的最大值为$M$,最小值为$N$,那么$M+N=$___________.

【答案】4040

【解析】令$g\left(x\right)=2018\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+2019\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，

因为$2018\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+2018\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}+x\right)=2018\ln 1=0$，

$2019\sin\left(-x\right)+2019\sin x=0$，

故$g\left(x\right)+g\left(-x\right)=0$，所以$g\left(x\right)$为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的奇函数，

故$g\left(x\right)_{\max}+g\left(x\right)_{\min}=0$．

又$M=g\left(x\right)_{\max}+2020$，$N=g\left(x\right)_{\min}+2020$，

故$M+N=4040$．

故答案为：4040．

18．（2023·河南·河南省淮阳中学校联考模拟预测）已知函数$f\left(x\right)=\left(\dfrac{2}{e^{x+\pi}+1}-1\right)\cdot\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)-3$，则$f\left(x\right)$在

$[-2\pi,0]$上的最大值与最小值之和为______.

【答案】-6

【解析】$f(x)=\left(\frac{2}{e^{x+\pi}+1}-1\right)\cdot(-\cos x)-3=\left(\frac{2}{e^{x+\pi}+1}-1\right)\cdot\cos(x+\pi)-3$；

令$t=x+\pi$，当$x\in[-2\pi,0]$时，$t\in[-\pi,\pi]$，$\therefore f(t)=\left(\frac{2}{e^{t}+1}-1\right)\cdot\cos t-3$；

令$g(t)=f(t)+3=\left(\frac{2}{e^{t}+1}-1\right)\cdot\cos t=\frac{1-e^{t}}{e^{t}+1}\cdot\cos t$，$t\in[-\pi,\pi]$，

$\because g(-t)=\frac{1-e^{-t}}{e^{-t}+1}\cdot\cos(-t)=\frac{e^{t}-1}{e^{t}+1}\cdot\cos t=-g(t)$，

$\therefore g(t)$为定义在$[-\pi,\pi]$上的奇函数，$\therefore g(t)_{\max}+g(t)_{\min}=0$，

$\therefore f(t)_{\max}+3+f(t)_{\min}+3=0$，即$f(t)_{\max}+f(t)_{\min}=-6$，

\ $f(x)$在$[-2\pi,0]$上的最大值和最小值之和为-6.

故答案为：-6.

题型 04 利用轴对称解决函数问题

19.（2023·四川成都·高三统考期中）已知$f(x)=e^{x}+e^{2-x}+x^{2}-2x$，则不等式$f(2x+1)<f(x)$的解集为（ ）

A．$\left(\frac{1}{3},1\right)$ B．$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$

C．$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ D．$(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

【答案】B

【解析】函数$f(x)=e^{x}+e^{2-x}+x^{2}-2x$的定义域为R，

显然$f(2-x)=e^{2-x}+e^{x}+(2-x)^{2}-2(2-x)=e^{x}+e^{2-x}+x^{2}-2x=f(x)$，则函数$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，

当$x>1$时，$f'(x)=e^{x}-e^{2-x}+2x-2$，显然$x>2-x$，$e^{x}>e^{2-x}$，于是$f'(x)>0$，即函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上递增，

则不等式$f(2x+1)<f(x)$等价于$|2x+1-1|<|x-1|$，即$|2x|<|x-1|$，整理得$3x^{2}+2x-1<0$，解得$-1<x<\frac{1}{3}$，

所以不等式$f(2x+1)<f(x)$的解集为$(-1,\frac{1}{3})$.

故选：B

20.（2023·四川遂宁·高三四川省蓬溪中学校校考阶段练习）已知定义在R上的奇函数$f(x)$满足：$f(x)$的图象是连续不断的且$y=f(x+2)$为偶函数.若$\forall x_1,x_2\in[2,4]$有$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$，则下面结论正确

的是（   ）

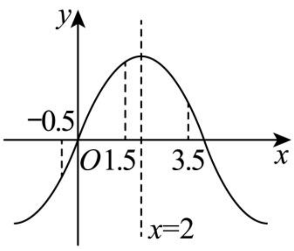
A．$f(65.5)<f(-24.5)<f(83.5)$　　B．$f(-24.5)<f(65.5)<f(83.5)$

C．$f(65.5)<f(83.5)<f(-24.5)$　　D．$f(-24.5)<f(83.5)<f(65.5)$

【答案】D

【解析】∵ $y=f(x+2)$ 为偶函数，

∴ $f(-x+2)=f(x+2)$ 且 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称，



∵ $f(x)$ 为奇函数，∴ $f(x)$ 的图象关于 $(0,0)$ 对称，

∴ $f(x)$ 为周期函数，$T=8$，

∵ $\forall x_1,x_2\in[2,4]$ 有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$，∴ $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调性递减，

∴由 $f(x)$ 的图象的连续性以及单调性、对称性可得其草图如上所示：

∵ $f(-24.5)=f(-0.5)$，$f(83.5)=f(3.5)$，$f(65.5)=f(1.5)$，

∴ $f(-24.5)<f(83.5)<f(65.5)$，

故选：D.

21.（2023 •贵州黔东南 •高三校考阶段练习）已知函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=2$ 对称，且对任意 x_1，$x_1\in(2,+\infty)$，都有 $[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)<0$，设 $a=f(-1)$，$b=f(\pi)$，$c=f(\mathrm{e})$，则（   ）

A．$a<c<b$　　B．$a<b<c$

C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

【答案】B

【解析】函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=2$ 对称，且对任意 x_1，$x_1\in(2,+\infty)$，都有 $[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)<0$，

则函数在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,2)$ 上单调递增

又$|-1-2|=3,|\pi-2|=\pi-2,|e-2|=e-2$，且$3>\pi-2>e-2$

所以$f(-1)<f(\pi)<f(e)$，即$a<b<c$.

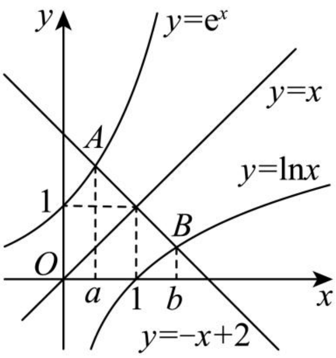
故选：B.

22.（2023·黑龙江哈尔滨·高三哈尔滨三中校考阶段练习）已知函数$y=e^x$和$y=\ln x$的图象与直线$y=2-x$交点的横坐标分别a，b，则$a+b=$（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B

【解析】作出函数$y=e^x$和$y=\ln x$的图象以及直线$y=2-x$的图象，如图，



由函数$y=e^x$和$y=\ln x$的图象与直线$y=2-x$交点A,B的横坐标分别为a，b，

由题意知$A(a,e^a),B(b,\ln b)$，也即$A(a,2-a),B(b,2-b)$，

由于函数$y=e^x$和$y=\ln x$互为反函数，

二者图像关于直线$y=x$对称，

而A,B为$y=e^x$和$y=\ln x$的图象与直线$y=2-x$的交点，

故A,B关于$y=x$对称，

故$a=2-b,\therefore a+b=2$.

故选：B.

23.（2023·四川绵阳·四川省绵阳南山中学校考模拟预测）已知定义在R上的函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，且$f(x+1)$是偶函数，则满足$f(2x)<f(x+2)$的x的取值范围为（　）

A．$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$　　B．$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

C．$(0,2)$　　D．$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

【答案】C

【解析】因为函数 $f(x+1)$ 是偶函数，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

又 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

由 $f(2x)<f(x+2)$，得 $|2x-1|<|x+2-1|$，即 $|2x-1|<|x+1|$，

平方并化简，得 $x^2-2x<0$，解得 $0<x<2$，即 x 的取值范围为 $(0,2)$.

故选：C

题型 05 利用中心对称解决函数问题

24.（2023·重庆沙坪坝·高三重庆一中校考阶段练习）已知函数 $f(x)=(x+1)^3+1$，正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{1012}=e^{-1}$，则 $\sum_{k=1}^{2023} f(\ln a_k)$ =（ ）

A．2023 B．$\frac{2023}{2}$ C．2022 D．4046

【答案】A

【解析】用倒序相加法：令 $f(\ln a_1)+f(\ln a_2)+\cdots+f(\ln a_{2023})=S$ ①，

则也有 $f(\ln a_{2023})+f(\ln a_{2022})+\cdots+f(\ln a_2)+f(\ln a_1)=S$ ②，

由 $f(x)+f(-2-x)=(x+1)^3+1+(-2-x+1)^3+1=2$ 知函数 $f(x)$ 关于 $(-1,1)$ 对称，

而 $a_1a_{2023}=a_2a_{2022}=\cdots=a_{1012}^2=e^{-2}$，

即 $\ln a_1+\ln a_{2023}=\ln a_2+\ln a_{2022}=\cdots=2\ln a_{1012}=-2$，

所以 $f(\ln a_1)+f(\ln a_{2023})=f(\ln a_2)+f(\ln a_{2022})=\cdots=2$，

则 $2S=2\times 2023 \Rightarrow S=2023$.

故选：A

25.（2023·四川绵阳·绵阳中学校考一模）若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)+f(a-x)=2b$，则说 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称，则函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\ldots+\frac{x+2021}{x+2022}+\frac{x+2022}{x+2023}$ 的对称中心是（ ）

A．$(-1011,2022)$ B．$(1011,2022)$ C．$(-1012,2023)$ D．$(1012,2023)$

【答案】C

【解析】函数定义域为 $\{x \mid x\neq -1, x\neq -2\ldots,\ldots x\neq -2022, x\neq -2023\}$，

定义域的对称中心为 $(-1012,0)$，所以可猜 $a=-1012$，

则 $f(-1012+x)=\frac{-1012+x}{-1011+x}+\frac{-1011+x}{-1010+x}+\frac{-1010+x}{-1009+x}+\ldots+\frac{1009+x}{x+1010}+\frac{1010+x}{1011+x}$，

$$f(-1012-x)=\frac{-1012-x}{-1011-x}+\frac{-1011-x}{-1010-x}+\frac{-1010-x}{-1009-x}+\ldots+\frac{1009-x}{1010-x}+\frac{1010-x}{1011-x}$$

$$=\frac{1012+x}{1011+x}+\frac{1011+x}{1010+x}+\frac{1010+x}{1009+x}+\ldots+\frac{1009-x}{1010-x}+\frac{1010-x}{1011-x},$$

故 $f(-1012+x)+f(-1012-x)$

$$=\left(\frac{1010+x}{1011+x}+\frac{1012+x}{1011+x}\right)+\left(\frac{1009+x}{x+1010}+\frac{1011+x}{1010+x}\right)\cdots+\left(\frac{-1012+x}{-1011+x}+\frac{1010-x}{1011-x}\right)$$

$$=2\times2023=4046$$

所以 $y=f\left(x\right)$ 的对称中心为 $(-1012,2023)$，

故选：C．

26．（2023·全国·校联考模拟预测）对于三次函数 $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq0\right)$ 给出定义：设 $f'\left(x\right)$ 是函数 $y=f\left(x\right)$ 的导数，$f''\left(x\right)$ 是 $f'\left(x\right)$ 的导数，若方程 $f''\left(x\right)=0$ 有实数解 x_0，则称点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 为函数 $y=f\left(x\right)$ 的“拐点”，同学经过探究发现：任何一个三次函数都有“拐点”；任何一个三次函数都有对称中心，且拐点就是对称中心，若 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$，请你根据这一发现计算：

$f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2}{2024}\right)+f\left(\frac{3}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{2023}{2024}\right)=$（　）

A．2021　　　B．2022　　　C．2023　　　D．2024

【答案】C

【解析】由题意可知 $f'(x)=x^2-x+3$，所以 $f''\left(x\right)=2x-1$，令 $f''\left(x\right)=2x-1=0$，则 $x=\frac{1}{2}$，

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{12}=1$，由题意可知函数 $f\left(x\right)$ 的对称中心为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，

所以 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)=2$，即 $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=2$，

所以 $f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2023}{2024}\right)=f\left(\frac{2}{2024}\right)+f\left(\frac{2022}{2024}\right)=\cdots=f\left(\frac{2023}{2024}\right)+f\left(\frac{1}{2024}\right)=2$，

所以 $2\left[f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2}{2024}\right)+f\left(\frac{3}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{2023}{2024}\right)\right]$

$$=\left[f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2023}{2024}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2024}\right)+f\left(\frac{2022}{2024}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2023}{2024}\right)+f\left(\frac{1}{2024}\right)\right]$$

$=2\times2023=4046$，

所以 $f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2}{2024}\right)+f\left(\frac{3}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{2023}{2024}\right)=4046\times\frac{1}{2}=2023$．

故选：C