

摘 要

传染病的发生, 极大危及着人类的生命健康. 为了更有效地了解传染病, 人们可以建立适当的数学模型, 利用理论分析和计算机仿真, 以制定合理的管控策略来阻断疾病的传染, 并尽最大努力地来降低疾病对人类的危害. 本文内容主要包括两部分, 分别对具有复发效应的 SEAIR 传染病模型和具有媒体效应的 SIQR 时滞模型展开研究.

第一部分, 我们研究了一类具有复发效应的 SEAIR 模型. 首先, 通过模型的阈值证明了两类平衡点的存在性. 其次, 运用 LaSalle 不变集原理和构造 Lyapunov 函数的方法分析了两类平衡点的稳定性. 然后, 作为模型的应用, 选取湖北已报道的新冠肺炎 (COVID-19) 累计病例数, 利用模型拟合数据, 并对疾病发展趋势进行了数值模拟. 最后, 对参数进行敏感性分析, 研究了不同的复发率对新冠的影响. 结果显示, 复发率越高, COVID-19 越严重. 研究结果表明政府应采取严格的隔离措施, 个人需通过戴口罩以减少感染率和二次复发.

第二部分, 我们研究了一类具有媒体效应的 SIQR 时滞模型. 首先, 通过模型的阈值证明了两类平衡点的存在性. 其次, 利用 Hurwitz 判据等方法分析了由媒体报道产生的时滞 τ 的影响下两类平衡点的稳定性, 并得到 Hopf 分支的存在条件. 最后, 对模型进行了数值模拟. 研究表明, 当 τ 固定时, 随着媒体报道下易感者对疾病信息认识的偏差程度 δ 不断增大, 模型由周期性振荡转为平衡. 而随着媒体报道对有效接触率的最大削减作用 β_0 和 β_{00} 的不断增大, 模型又由平衡状态转为周期性振荡. 通过研究重要参数对传染病发展的影响, 给出结论: 媒体对传染病信息的广泛报道以及提高信息的准确率可降低疾病传播, 有利于控制传染病.

关键词: 复发效应, 新冠肺炎, 媒体报道, 稳定性, Hopf 分支

Abstract

The occurrence of infectious diseases is a great threat to human life and health. In order to understand infectious diseases more effectively, people can establish appropriate mathematical models, use theoretical analysis and computer simulation to formulate reasonable control strategies to block the transmission of diseases, and do our best to reduce the harm of diseases to human beings. The content of this paper mainly consists of two parts, which respectively study the SEAIR infectious disease model with relapse effect and the SIQR time-delay model with media effect.

In the first part, we studied an SEAIR model with relapse effect. Firstly, the existence of two kinds of equilibrium points is proved by the threshold of the model. Secondly, the stability of two kinds of equilibrium points is analyzed by using the LaSalle invariant set principle and the method of constructing the Lyapunov function. Then, as an application of the model, the cumulative number of COVID-19 cases reported in Hubei province is selected in this study. The model is fitted with reported data and simulated the development trend of the disease. Finally, the sensitivity analysis of the parameters is analyzed, and the effect of different relapse rates on the COVID-19 is studied. The results show that the higher the recurrence rate of COVID-19 becomes, the more severe the disease will be. The results of the study indicate that the government should take strict isolation measures, and individuals need to wear masks to reduce the infection rate and secondary relapse.

In the second part, a delayed SIQR epidemic model with media effect is established. Firstly, the existence of two kinds of equilibrium points is proved by the threshold of the model. Secondly, the stability of the two types of equilibrium points under the influence of the delay τ caused by media reports is analyzed by using the Hurwitz criterion and other methods, and the existence conditions of the Hopf branch are obtained. Finally, the model is simulated numerically. The research results show that when τ is fixed, as the degree of deviation δ of the susceptible persons' understanding of disease information under media reports increases continuously, the model will change from periodic oscillation to equilibrium point. With the increasing of the maximum reduction effect of media coverage on the effective contact rate, the model changes from equilibrium to periodic oscillation. By studying the impact of important

parameters on the development of infectious diseases, the conclusion is given: it is beneficial for the media to widely report the information of infectious diseases and improve the information accuracy so as to reduce the spread of infectious diseases and effectively control the outbreak of infectious diseases.

Key words: Relapse, COVID-19, Stability, Media coverage, Hopf bifurcation

目 录

| | |
|------------------------------------|----|
| 第一章 绪论 | 1 |
| 1.1 研究背景 | 1 |
| 1.2 研究现状 | 2 |
| 1.3 本文安排 | 4 |
| 第二章 预备知识 | 6 |
| 2.1 基本概念 | 6 |
| 2.2 稳定性判定方法 | 7 |
| 第三章 一类具有复发效应的 SEAIR 模型分析 | 9 |
| 3.1 模型建立 | 9 |
| 3.2 平衡点的存在性 | 10 |
| 3.3 疾病消亡平衡点的稳定性 | 12 |
| 3.4 疾病的一致持久性 | 18 |
| 3.5 模型应用 | 20 |
| 3.5.1 数据 | 20 |
| 3.5.2 模型参数估计 | 20 |
| 3.5.3 新冠流行趋势 | 21 |
| 3.5.4 参数的敏感性分析 | 22 |
| 3.6 本章小结 | 24 |
| 第四章 一类具有媒体效应的 SIQR 时滞传染病模型分析 | 26 |
| 4.1 模型的建立 | 26 |
| 4.2 平衡点的存在性和稳定性 | 28 |
| 4.3 地方病平衡点的 Hopf 分支 | 31 |
| 4.4 疾病的持久性 | 34 |
| 4.5 数值模拟 | 36 |
| 4.6 本章小结 | 40 |
| 总结与展望 | 41 |

| | |
|---------------------|----|
| 总结 | 41 |
| 展望 | 41 |
| 参考文献 | 43 |
| 攻读学位期间取得的研究成果 | 49 |
| 致 谢 | 50 |

第一章 绪论

1.1 研究背景

传染病从古至今依然是人类无法忽略的劲敌，长期以来严重危害了人们的生活和身体健康，不仅给人们造成巨大的灾害，同时给世界卫生组织也带来了重大挑战。1347-1353年间在欧亚非流行的黑死病，是有史以来影响人类健康最严重的瘟疫^[1,2]。14世纪40年代，黑死病开始散布于欧洲全境，因该病死亡的人口数在世界范围内达到约7500万至2亿，也是有史以来带来人口死亡最多的流行病^[3-6]。据统计，中世纪欧洲人大约有30%-60%的人死于黑死病^[7]。1988-2020年，全球至少有30种突发性传染病出现，如2003年的SARS、2009年的甲型H1N1、2014年的登革热和Ebola、2019年的COVID-19，而COVID-19被公认为是目前世界上人们遭受的最大的风险之一^[8]。2002年11月，SARS在中国广东省的顺德首发，并蔓延至整个东南亚地区以及世界各地。该病平均造成了7%至15%的病人死亡。根据世界卫生组织报道，此病在45到64岁死亡率约为15%，而65岁以上的死亡率则约为55%^[9]。2002年11月1日至2003年7月31日期间全球病例数为8096例，死亡782例，其中中国共感染5327例，死亡349例^[10]。登革热在110多个国家中都很常见^[11]。全球范围内每年大约有少至5000万多至5亿人感染此病，其中50万人因此病住院^[12,13]。大约25000人因此病死亡^[14]。我国禽流感H7N9在2013年爆发，截至2017年5月13日，出现感染病例1486例，死亡人口数量占13.66%^[15]。2019年的COVID-19疫情爆发，截至2022年1月19日，全球220多个国家和地区累计因COVID-19死亡超过550万，并且仍在持续扩散。

有的传染病治愈后有免疫性而有的传染病经过治愈后会二次感染。近年来，研究人员发现许多疾病（如疟疾、狂犬病、艾滋病等）在治疗后会再度发作或反复发作，这就称之为复发。同样地，对于某些传染病，如结核病，疱疹^[16,17]，也会出现复发现象。乙肝病毒在手术后5年和8年的复发率分别为8%和21%，而肝移植后仅用免疫球蛋白和拉米夫定治疗的乙肝复发率为9%^[18]。在HIV-1联合感染的患者中，甚至是在观察近两年丙型肝炎病毒（HCV）控制期的患者中，复发性病毒血症复发的发生率也很高，可达24%^[19]。实际上，疾病的复发对传染病的传播、扩散和控制都会产生较大影响。复发是引起二次扩散的主要原因，因此是研究某些传染病传播规律时不可忽视的一个重要因素。

同时, 传染病可以通过空气、食物、接触、母体、血液等形式进行传播, 而每一种传染病的特点又大不相同. 在信息爆炸的时代, 媒体在紧急反映过程中发挥协同作用. 通过媒体对各类传染病进行报道逐渐形成主流趋势. 媒体报道的越及时、准确, 内容越广泛, 人们对于传染病的了解越深入, 才能不断增强自我防护措施, 从而减少与他人的接触. 因此目前很多科研工作者考虑了将媒体报道作为影响因素加入到不同的传染病模型中, 讨论媒体报道对各类传染病的影响程度.

1.2 研究现状

关于复发模型也有很多研究工作, 朱承澄^[20]建立一类具有复发的 SIR 扩散传染病模型, 考虑在空间异质环境中考察复发因素的影响, 研究了具有复发的反应扩散 SIR 传染病模型的行波解和传播速度问题. 进一步探讨了具有复发的传染病模型在非局部扩散下的行波解问题. 穆宇光、徐瑞^[21]研究了一类具有复发的随机 SIRI 模型, 证明了该随机系统具有唯一的全局正解, 并得到了疾病的灭亡和持久性. Yan 等^[22]建立了两个斑块环境下具有复发的类 SIR 时滞传染病模型, 研究了两种不同假设情况下模型的动力学性质, 得到存在边界平衡的条件. Feng 等^[23]建立了具有多种群复发率的 SEIR 模型, 用 matrix-theoretic 方法证明了当阈值小于 1 时, 无病平衡点的全局稳定性, 当阈值大于 1 时, 通过应用新的组合恒等式, 将一个有 $3n$ (或 $2n+m$) 个顶点的图转化为一个有 n 个顶点的图, 从而处理局部平衡的全局稳定性. Driessche 等^[24]在 2007 年提出了一类具有一般复发可能性的疾病的 SEIR 数学模型. 证明了当阈值小于 1 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的. 如果在潜伏类中存活概率被假定为负指数分布, 那么阈值等于 1 则是判断疾病消亡和形成地方病的关键. 如果假定时滞微分方程概率密度函数为阶跃函数, 则得到一个非线性系统. 对于该系统得到当感染人数接近或振荡于地方病水平时, 该病具有一致持久性. Ding^[25]研究了一类具有复发率和双线性发生率的反应-扩散 SIRI 模型的自由边界问题, 研究了有复发和无复发两种情况下解的(全局)存在性和唯一性, 并且讨论了疾病传播-消失的充分条件. 由以上文献可知, 很多学者已经对 SEIR 或 SIR 类型的复发模型进行了广泛的研究, 并且从理论上分析具有复发效应的模型的一些性质, 但并未对特定传染病进行计算机仿真分析. 同时冠状病毒因其流行性强、传染性较广, 受到各领域学者的广泛关注. 而通过临床医学证明, 新冠肺炎的确存在复发现象^[26,27], 具有研究意义,

但并未从理论分析结合数值模拟方面研究复发对累计病例的影响程度。根据以上表述，在本文第三章中，对 SEIR 类模型进行拓展，建立一类具有复发效应的 SEAIR 模型并考虑在新冠肺炎中的应用。

除了复发现象，研究发现，影响疾病传播的因素有很多，如环境卫生状况、人口密度、媒体报道、疫苗接种、人口迁移、气候变化等。在如今的信息化时代，大众媒体与传染病的传播和控制之间存在一种复杂而密切的关联。每当一种疾病在人群中爆发时，有关这种疾病的病例数和死亡人数信息就会通过大众媒体、电视、报纸、网络等方式被人们所知。据观察，这些信息会使得个人的行为发生变化，通过采取保护措施，如戴口罩、使用消毒液、保持社交距离等来保护自己，从而有助于减少传染病的传播和蔓延。近些年很多学者从不同角度建立了具有媒体报道的传染病模型^[28-32]。最基本的具有媒体报道的 SIR 模型如下：

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - f(S(t), I(t), M(t))S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = f(S(t), I(t), M(t))S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \end{cases}$$

用媒体函数 $f(S(t), I(t), M(t))$ 表示媒体的影响，把媒体函数嵌入到接触传播率或者发生率中。Cui 等^[33]取 $f(S(t), I(t), M(t)) = \beta e^{-mI}$ ，Li 等^[34]取 $f(S(t), I(t), M(t)) = \beta_1 - \beta_2 f(I)$ ，Liu 等^[35]取 $f(S(t), I(t), M(t)) = \beta e^{-\alpha_1 E - \alpha_2 I - \alpha_3 H}$ 。媒体函数不仅取决于感染人数的数量，也取决于它的变化率^[36-38]。这些模型都是间接的通过媒体报道量反应个体行为改变对传染病的影响，Yan 等^[39]主要用统计模型方法，直观刻画媒体报道对个体行为改变的影响，然后把它与传染病动力学模型相耦合。随后又根据 COVID-19 特点建立了 SEIR 类型的传染病模型^[40]，用戴口罩比例的函数 $e^{-kp(t)}$ 作为媒体函数嵌入到感染强度中，以刻画个体行为改变对 COVID-19 疫情的影响。通过参数估计对人类行为常数 k ，接触率 c 以及隔离率 q 做敏感性分析，说明媒体报道和控制措施通过降低传播率（增加个体行为变化常数）、接触率、未感染接触者的隔离期、增加接触者的隔离率，可以降低累计病例数。证实了个人对媒体报道响应的重要性，以及专家和政府在促进公众自我隔离方面的关键作

用. 考虑到媒体报道量随着疫情和时间是在不断发生改变的, 因此将其视为变量, 所得的数学模型与现实情形更加相近.

由于传染病的传播不但受当前状态的影响, 还和此时刻以前的状态有关. 所以对某些传染病模型 (HIV-1 感染模型、非典型肺炎、禽流感等) 而言时滞作为主要因素被广泛研究^[41]. 近年来, 许多研究人员发现媒体报道存在时间滞后现象, 因此将时滞引入了具有媒体报道的传染病动力学的数学模型中, 研究结果不仅呈现了更加复杂的动力学现象, 而且扩展了时滞微分方程的应用范围^[42-44]. 由于媒体报道存在时间延迟, 根据以上叙述, 将 Li 所构造的媒体影响因子进行改进, 把时滞作用引入到媒体影响因子中. 近年来, 学者们对具有时滞作用的媒体因子研究甚少, 故在本文第四章建立了一类受媒体报道影响的时滞 SIQR 传染病模型.

1.3 本文安排

第一章, 介绍复发和媒体报道的传染病模型的研究背景和意义及研究现状.

第二章, 介绍传染病模型动力学行为所涉及的数学概念及方法.

第三章, 建立了一类具有复发效应的 SEAIR 模型, 给出了模型的阈值, 证明了当 $R_0 < 1$ 时疾病消亡平衡点全局渐近稳定, $R_0 > 1$ 时疾病消亡平衡点不稳定且疾病是一致持久的. 结合模型的特点, 考虑复发效应在新冠肺炎 (COVID-19) 的影响. 通过参数估计后对 COVID-19 趋势进行了预测, 并利用偏秩相关系数法 (PRCCs) 研究了不同参数对 COVID-19 的影响以及对阈值的依赖性, 对抑制 COVID-19 的传播和爆发提出了合理化建议.

第四章, 研究因媒体报道的延迟效应所产生的时滞对疾病发展的影响, 建立了一类具有媒体效应的 SIQR 时滞模型, 给出了模型的阈值, 证明对于任意时滞 $\tau \geq 0$, 当 $R_0 < 1$ 时, 疾病消亡平衡点稳定性, 当 $R_0 > 1$ 时, 疾病消亡平衡点不稳定. 若 $\tau = 0$, 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点局部渐近稳定. 根据模型特点, 分析当媒体报道引起的时滞 τ 经过一系列临界值时, 会出现 Hopf 分支, 并讨论产生分支的存在条件. 由于时滞的出现, 讨论媒体影响因子对模型稳定性的变化, 针对参数分析结果给出控制疾病传播的合理化建议, 分析其对传染病发展的影响.

第五章，对论文的主要内容加以归纳总结，分析相较于其他同类论文的创新点以及需要进一步完善的地方，并对今后的科研工作加以展望。

第二章 预备知识

2.1 基本概念

一般地, 将常微分方程组简写为

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

其中, $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续. 通常称方程组(2.1)为自治系统^[45].

考虑如下时滞系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau), & t \in [0, +\infty), \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, A , B 表示 n 阶矩阵, 时滞 $\tau > 0$, $\psi(t)$ 表示 $[-\tau, 0]$ 上的非负连续函数.

基本再生数^[46]: 在没有其他因素作用下, 基本再生数表示疾病流行初期, 当人群中全是易感者时, 一个染病者在其平均患病期内所传染的人数. 一般用 R_0 表示, $R_0=1$ 是疾病是否流行的阈值. 当 $R_0 < 1$ 时, 即一个病人在平均患病期能传染的最大人数小于 1, 疾病会逐渐消失; 反之若 $R_0 > 1$ 时, 疾病将始终存在而形成地方病.

Lyapunov 函数^[46]: 设 $G \subset D$ 为一开集, $V \in C^1(G, \mathbb{R})$. 若 $t \rightarrow \infty$ 沿系统(2.1)的所有轨线的全导数

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2.1)} = \text{grad}V(x) \cdot f(x) \leq 0, \quad x \in G,$$

则称 V 是系统(2.1)的 Lyapunov 函数.

Routh-Hurwitz 判据^[46]: 考虑一元 n 次多项式方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (2.3)$$

当 $H_k > 0$ 时, 方程(2.3)的所有根均存在负实部. 其中

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix},$$

$k = 1, 2, \dots, n$. 当 $j > n$ 时, 补充定义 $a_j = 0$.

持久性^[46]: 若存在正常数 m_i 和 M_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 对 $(t_0, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, 一定存在对任意 $T = T(t_0, \varphi)$ 使得当 $t > t_0 + T$ 时, 有 $m_i \leq x_i(t) \leq M_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 这里 $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ 是 (2.1) 的解, 则称 (2.1) 是持久的.

LaSalle's 不变集原理^[47]: 设 V 是系统 (2.1) 的 Lyapunov 函数且下有界, 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$ 时, $V \rightarrow +\infty$. 则系统 (2.1) 的任意正半轨是有界的, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 该轨线趋于 $E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\}$ 中的不变集 M . 特别的, 若 $M = \{\mathbf{x}^*\}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, 则平衡点 \mathbf{x}^* 全局渐近稳定.

奇点^[48]: 若点 $\mathbf{x}^* \in D$, 使 $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, 则称 \mathbf{x}^* 为 (2.1) 的奇点.

平衡点^[48]: 从动力学的观点来看, 在奇点 \mathbf{x}^* 处运动的速度 $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, 从而质点不运动, 因而奇点也称为系统的平衡点.

不变集^[48]: 设有集合 B , 若对 $\forall P \in B$, 均有系统 (2.1) 过 P 点的整条轨线 $L_P \in B$, 则称 B 是系统 (2.1) 的一个不变集.

2.2 稳定性判定方法

引理 1^[48] 若系统 (2.1) 的线性化系统为 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{n \times n}$, 其中 $a_{i,j}$ 是实数 ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}_+^n$. 矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则有

(i) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 均有负实部, 则系统 (2.1) 的零解局部渐近稳定;

(ii) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 中至少存在一个正实部, 则系统(2.1)的零解不稳定;

(iii) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 存在非正实部, 且其零实部的特征值仅对应单重初等因子, 则系统(2.1)的零解局部渐近稳定.

引理 2^[48] 对于系统(2.1)的 Lyapunov 函数 $V(x)$ 满足: $V(x)$ 为一正定函数且 $f(\bar{x}) = 0 (A\bar{x} + B\bar{x} = 0)$, 则有

(i) 若对任意的 $x \in D$, $\frac{dV}{dt} \leq 0$, 则 \bar{x} 是稳定的;

(ii) 若对任意的 $x \in D$, $\frac{dV}{dt} < 0$, 则 \bar{x} 是渐近稳定的;

(iii) 若对任意的 $x \in D$, $\frac{dV}{dt} > 0$, 则 \bar{x} 是不稳定的.

引理 3^[49] 对系统(2.2)的特征方程为

$$\det(\lambda E - A - B e^{-\lambda\tau}) = 0, \quad (2.4)$$

则系统(2.2)的零解局部渐近稳定的充要条件是方程(2.4)的每个根均具有负实部.

第三章 一类具有复发效应的 SEAIR 模型分析

现实生活中，受到某些因素的影响，会导致有些疾病在初愈阶段再次发作。复发的次数越多，恢复就越不彻底，效果就越差，容易对人体产生危害。所以疾病的复发不容忽视。而传染病作为危害比较大的一种疾病，对于传染病的复发研究显得尤为重要。为了使复发模型更符合实际意义，我们将在本章中以新冠肺炎作为模型的应用，来研究复发对于新冠肺炎的影响。

3.1 模型建立

将某一区域内 t 时刻的总人口数 $N(t)$ 分成易感者 $S(t)$ 、潜伏者 $E(t)$ 、无症状感染者 $A(t)$ 、有症状感染者 $I(t)$ 和恢复者 $R(t)$ ，建立了一类具有二次复发的 SEAIR 模型，传染病模型仓室图见图 3.1。

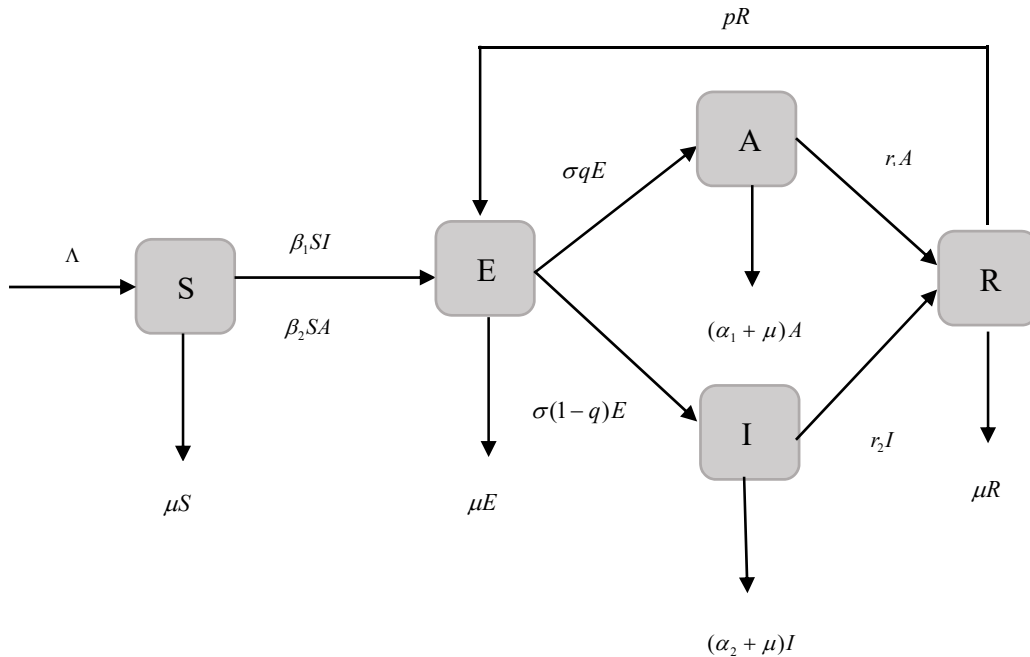


图 3.1 模型(3.1)的仓室图

传染病模型如下：

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta_1 S(t)I(t) - \beta_2 S(t)A(t) - \mu S(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 S(t)A(t) - (\sigma + \mu)E(t) + pR(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = \sigma q E(t) - (r_1 + \alpha_1 + \mu)A(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \sigma(1-q)E(t) - (r_2 + \alpha_2 + \mu)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = r_1 A(t) + r_2 I(t) - (p + \mu)R(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 Λ 表示人口的常数输入, μ 表示自然死亡率, β_1 表示有症状感染者的传染率, β_2 表示无症状感染者的传染率, σ 表示潜伏者到感染者的转移率, α_1 表示无症状感染者因病死亡率, α_2 表示有症状感染者因病死亡率, r_1 表示无症状感染者恢复率, r_2 表示有症状感染者恢复率, 潜伏者分别以 q 和 $1-q$ 的比率进入到无症状期和有症状期, p 表示疾病复发率.

根据文献[50]可知模型(3.1)的解具有非负性, 并将(3.1)的 5 个方程相加得

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) - (r_1 + \alpha_1)A(t) - (r_2 + \alpha_2)I(t) \leq \Lambda - \mu N(t),$$

则模型(3.1)的最大正向不变集为

$$X = \{(S, E, A, I, R) \in \mathbb{R}_+^5 : S + E + A + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}. \quad (3.2)$$

接下来将在 X 中研究模型(3.1)解的动力学性质.

3.2 平衡点的存在性

研究模型(3.1)的动力学性质首先要确定平衡点, 故本节将讨论疾病消亡平衡点和地方病平衡点的存在性.

模型(3.1)总存在疾病消亡的疾病消亡平衡点 $P_0(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0)$. 根据文献[51]中再生

矩阵方法, 得模型(3.1)的阈值:

$$R_0 = \frac{\beta_2 \Lambda \sigma q}{\mu M_0 M_1} + \frac{\beta_1 \Lambda \sigma (1-q)}{\mu M_0 M_2} + \frac{p \sigma q M_2 r_1 + p \sigma (1-q) M_1 r_2}{M_0 M_1 M_2 (p + \mu)},$$

其中 $M_0 = \sigma + \mu$, $M_1 = r_1 + \alpha_1 + \mu$, $M_2 = r_2 + \alpha_2 + \mu$. 关于模型(3.1)平衡点的存在性, 有如下结论.

定理 3.1 当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(3.1)仅存在疾病消亡平衡点 $P_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$; 当 $R_0 > 1$

时, 除了疾病消亡平衡点外, 模型(3.1)还存在唯一的地方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, A^*, I^*, R^*)$.

证明 只需证明当 $R_0 > 1$ 时, 模型(3.1)存在地方病平衡点 P^* . 令模型(3.1)的右端等于 0, 地方病平衡点 P^* 若存在, 则满足代数方程组

$$\begin{cases} \Lambda - \beta_1 S^* I^* - \beta_2 S^* A^* - \mu S^* = 0, \\ \beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* A^* - (\sigma + \mu) E^* + p R^* = 0, \\ \sigma q E^* - (r_1 + \alpha_1 + \mu) A^* = 0, \\ \sigma(1-q) E^* - (r_2 + \alpha_2 + \mu) I^* = 0, \\ r_1 A^* + r_2 I^* - (p + \mu) R^* = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

由方程组(3.3)的第三和第四个方程可得

$$\sigma q E^* = (r_1 + \alpha_1 + \mu) A^* = M_1 A^*,$$

$$\sigma(1-q) E^* = (r_2 + \alpha_2 + \mu) I^* = M_2 I^*,$$

所以

$$A^* = \frac{\sigma q}{M_1} E^*, \quad I^* = \frac{\sigma(1-q)}{M_2} E^*. \quad (3.4)$$

将式(3.4)代入方程组(3.3)可得

$$\frac{r_1 \sigma q}{M_1} E^* + \frac{r_2 \sigma(1-q)}{M_2} E^* = (p + \mu) R^*,$$

所以

$$R^* = \frac{1}{p + \mu} \left(\frac{r_1 \sigma q}{M_1} + \frac{r_2 \sigma(1-q)}{M_2} \right) E^*. \quad (3.5)$$

结合式(3.5), 并将方程组(3.3)的第二个方程代入第一个方程可得

$$\Lambda - M_0 E^* + \frac{p}{p + \mu} \left(\frac{r_1 \sigma q}{M_1} + \frac{r_2 \sigma(1-q)}{M_2} \right) E^* = \mu S^*,$$

所以

$$S^* = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\mu + p)M_0M_1M_2 - r_1p\sigma qM_2 - r_2p\sigma(1-q)M_1}{\mu(p + \mu)M_1M_2} E^*. \quad (3.6)$$

将式(3.4)、(3.5)、(3.6)代入方程组(3.3)的第二个方程可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta_1\sigma(1-q)}{M_2} + \frac{\beta_2\sigma q}{M_1} \right) E^* \times \left\{ \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\mu + p)M_0M_1M_2 - r_1p\sigma qM_2 - r_2p\sigma(1-q)M_1}{\mu(p + \mu)M_1M_2} E^* \right\} \\ & - M_0E^* + \frac{p}{p + \mu} \left(\frac{r_1\sigma q}{M_1} + \frac{r_2\sigma(1-q)}{M_2} \right) E^* = 0. \end{aligned}$$

所以

$$E^* = \frac{\mu M_0 M_1^2 M_2^2 (p + \mu)}{\{(p + \mu)M_0M_1M_2 - [pr_1\sigma qM_2 + pr_2\sigma(1-q)M_1]\} [M_1\beta_1\sigma(1-q) + M_2\beta_2\sigma q]} (R_0 - 1).$$

于是，本文只需证 $(p + \mu)M_0M_1M_2 - [pr_1\sigma qM_2 + pr_2\sigma(1-q)M_1]$ 为正即可。直接计算可得

$$\begin{aligned} & (p + \mu)M_0M_1M_2 - [pr_1\sigma qM_2 + pr_2\sigma(1-q)M_1] \\ & > p\sigma M_1M_2 - p\sigma\{qr_1M_2 + (1-q)r_2M_1\} \\ & = p\sigma[(qM_1M_2 - qr_1M_2) + (1-q)M_1M_2 - (1-q)r_2M_1] \\ & > 0. \end{aligned}$$

从而，模型(3.1)疾病消亡平衡点和地方病平衡点的存在性得证。

3.3 疾病消亡平衡点的稳定性

疾病消亡平衡点稳定说明易感者的比例最终会趋于一个常数，无症状感染者、有症状感染者最终会趋于零。平衡点的稳定可以给疾病控制提供有力的参考价值，故本节将从理论上讨论其稳定性。

定理 3.2 当 $R_0 < 1$ 时，如果 $p < \min\{r_1 + \alpha_1, r_2 + \alpha_2\}$ ，则疾病消亡平衡点 P_0 在区域 X 上局部渐近稳定；当 $R_0 > 1$ 时， P_0 不稳定。

证明 模型(3.1)的右端在 $P_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$ 处的雅可比矩阵为

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -M_0 & \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & p \\ 0 & \sigma q & -M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(1-q) & 0 & -M_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & r_2 & -(p+\mu) \end{pmatrix}.$$

记

$$J_1(P_0) = \begin{pmatrix} -M_0 & \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \\ \sigma q & -M_1 & 0 \\ \sigma(1-q) & 0 & -M_2 \end{pmatrix}.$$

当 $R_0 < 1$ 时,

$$\frac{\beta_2 \Lambda \sigma q}{\mu M_0 M_1} < 1 \Leftrightarrow \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} < M_0 M_1,$$

$$\frac{\beta_1 \Lambda \sigma(1-q)}{\mu M_0 M_2} < 1 \Leftrightarrow \sigma(1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} < M_0 M_2.$$

令 $J_1(P_0)$ 的特征方程为 $f(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$, 其中

$$a_1 = M_0 + M_1 + M_2 > 0,$$

$$\begin{aligned} a_2 &= M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + M_2(M_0 + M_1) - \sigma(1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \\ &= M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + M_1 M_2 + M_0 M_2 - \sigma(1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= M_2(M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu}) - \sigma(1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} M_1 \\ &= M_0 M_1 M_2 \left(1 - \frac{\beta_2 \Lambda \sigma q}{\mu M_0 M_1} - \frac{\beta_1 \Lambda \sigma(1-q)}{\mu M_0 M_2}\right) > 0. \end{aligned}$$

由于在后面证明过程要用到 $f(\lambda)$ 的 Routh-Hurwitz 判据, 因此先需要计算出

$$a_1 a_2 - a_3.$$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &= (M_0 + M_1 + M_2) \left[M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + M_2 (M_0 + M_1) - \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right] \\ &\quad - \left[M_2 (M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu}) - \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} M_1 \right] \\ &= (M_0 + M_1) \left[M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + M_2 (M_0 + M_1) - \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right] \\ &\quad + M_2 \left[M_2 (M_0 + M_1) - \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right] + \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} M_1 \\ &> 0. \end{aligned}$$

记 $J(P_0)$ 的特征方程为 $(\lambda + d)g(\lambda) = 0$, 其中

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 \\ &= (\lambda + p + \mu)(\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3) - pr_1 \sigma q (\lambda + M_2) - pr_2 \sigma (1-q) (\lambda + M_1) \\ &= (\lambda + p + \mu) f(\lambda) - pr_1 \sigma q (\lambda + M_2) - pr_2 \sigma (1-q) (\lambda + M_1) = 0, \\ b_1 &= a_1 + p + \mu > 0, \quad b_2 = a_1(p + \mu) + a_2 > 0, \\ b_3 &= a_2(p + \mu) + a_3 - pr_1 \sigma q - pr_2 \sigma (1-q) \\ &= \left[M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + M_1 M_2 + M_0 M_2 - \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right] (p + \mu) \\ &\quad + \frac{1}{p + \mu} \left[M_2 (M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu}) - \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} M_1 \right] (p + \mu) \\ &\quad - \frac{1}{p + \mu} pr_1 \sigma q (p + \mu) - \frac{1}{p + \mu} pr_2 \sigma (1-q) (p + \mu) \\ &> \left[M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + M_1 M_2 + M_0 M_2 - \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right] (p + \mu) \\ &\quad + \frac{1}{p + \mu} \left[M_2 (M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu}) - \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} M_1 \right] (p + \mu) \\ &\quad - \frac{1}{p + \mu} pr_1 \sigma q M_2 - \frac{1}{p + \mu} pr_2 \sigma (1-q) M_1 \\ &= \left[M_0 M_1 - \sigma q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + M_1 M_2 + M_0 M_2 - \sigma (1-q) \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right] (p + \mu) \\ &\quad + M_0 M_1 M_2 (1 - R_0) \\ &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_4 &= a_3(p + \mu) - pr_1\sigma qM_2 - pr_2\sigma(1 - q)M_1 \\
 &= (p + \mu)M_0M_1M_2(1 - R_0) \\
 &> 0,
 \end{aligned}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
 b_1b_2 - b_3 &= (a_1 + p + \mu)[a_1(p + \mu) + a_2] - a_2(p + \mu) - a_3 + pr_1\sigma q + pr_2\sigma(1 - q) \\
 &= a_1a_2 + a_1^2(p + \mu) + a_1(p + \mu)^2 + a_2(p + \mu) + pr_1\sigma q + pr_2\sigma(1 - q) \\
 &\quad - a_2(p + \mu) - a_3 \\
 &= a_1a_2 - a_3 + a_1^2(p + \mu) + a_1(p + \mu)^2 + pr_1\sigma q + pr_2\sigma(1 - q) > 0,
 \end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}
 &(b_1b_2 - b_3)b_3 - b_1^2b_4 \\
 &= [a_1a_2 - a_3 + a_1^2(p + \mu) + a_1(p + \mu)^2 + pr_1\sigma q + pr_2\sigma(1 - q)][a_2(p + \mu) + a_3 - pr_1\sigma q - pr_2\sigma(1 - q)] \\
 &\quad - (a_1 + p + \mu)^2[a_3(p + \mu) - pr_1\sigma qM_2 - pr_2\sigma(1 - q)M_1] \\
 &= (a_1a_2 - a_3)a_2(p + \mu) + (a_1a_2 - a_3)a_3 + a_1^2a_2(p + \mu)^2 + a_1^2a_3(p + \mu) + a_1a_2(p + \mu)^3 + a_1a_3(p + \mu)^2 \\
 &\quad + a_2(p + \mu)p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)] + a_3p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)] + (a_1 + p + \mu)^2p\sigma[r_1qM_2 + r_2(1 - q)M_1] \\
 &\quad - (a_1a_2 - a_3)p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)] - a_1^2(p + \mu)p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)] - a_1(p + \mu)^2p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)] \\
 &\quad - \{p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)]\}^2 - a_1^2a_3(p + \mu) - a_3(p + \mu)^3 - 2a_1a_3(p + \mu)^2 \\
 &= b_3p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)] + (a_1a_2 - a_3)b_3 + a_1^2(p + \mu)(a_1a_2 - a_3) + (a_1a_2 - a_3)(p + \mu)^3 \\
 &\quad + (a_1 + p + \mu)^2p\sigma[r_1qM_2 + r_2(1 - q)M_1] - a_1(p + \mu)(a_1 + p + \mu)p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)] \\
 &= b_3p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)] + (a_1a_2 - a_3)b_3 + a_1^2(p + \mu)(a_1a_2 - a_3) + (a_1a_2 - a_3)(p + \mu)^3 \\
 &\quad + (a_1 + p + \mu)p\sigma\{(a_1 + p + \mu)[r_1qM_2 + r_2(1 - q)M_1] - a_1(p + \mu)[r_1q + r_2(1 - q)]\} \\
 &= b_3p\sigma[r_1q + r_2(1 - q)] + (a_1a_2 - a_3)b_3 + a_1^2(p + \mu)(a_1a_2 - a_3) + (a_1a_2 - a_3)(p + \mu)^3 \\
 &\quad + (a_1 + p + \mu)p\sigma\{[a_1(r_2 + \alpha_2) + (p + \mu)M_2 - a_1p]r_1q + [a_1(r_1 + \alpha_1) + (p + \mu)M_1 - a_1p]r_2(1 - q)\},
 \end{aligned}$$

当 $p < \min\{r_1 + \alpha_1, r_2 + \alpha_2\}$ 时, 有 $(b_1b_2 - b_3)b_3 - b_1^2b_4 > 0$.

根据 Routh-Hurwitz 判据, 即疾病消亡平衡点 P_0 在区域 X 上局部渐近稳定. 当 $R_0 > 1$

时,

$$\begin{aligned}
 b_4 &= a_3(p + \mu) - pr_1\sigma qM_2 - pr_2\sigma(1 - q)M_1 \\
 &= [M_2(M_0M_1 - \sigma q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu}) - \sigma(1 - q)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} M_1](p + \mu) - pr_1\sigma qM_2 - pr_2\sigma(1 - q)M_1 \\
 &= (p + \mu)M_0M_1M_2[1 - \frac{\sigma q\beta_2\Lambda}{\mu M_0M_1} - \frac{\sigma(1 - q)\beta_1\Lambda}{\mu M_0M_2} - \frac{pr_1\sigma q}{(p + \mu)M_0M_1} - \frac{pr_2\sigma(1 - q)}{(p + \mu)M_0M_2}] \\
 &= (p + \mu)M_0M_1M_2(1 - R_0) \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

所以当 $R_0 > 1$ 时, $J(P_0)$ 有一个正特征根, 因此疾病消亡平衡点不稳定.

定理 3.3 当 $R_0 < 1$ 时, P_0 全局渐近稳定; 当 $R_0 = 1$ 时, P_0 全局吸引.

证明 当 $R_0 < 1$ 时有

$$(1-q) \left[\frac{\beta_1 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_2} + \frac{p \sigma r_2}{M_0 M_2 (p + \mu)} \right] + q \left[\frac{\beta_2 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_1} + \frac{p \sigma r_1}{M_0 M_1 (p + \mu)} \right] < 1,$$

故存在 ρ_1, ρ_2 使得

$$(1-q) \left[\frac{\beta_1 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_2} + \frac{p \sigma r_2}{M_0 M_2 (p + \mu)} \right] < \rho_1 < 1, \quad q \left[\frac{\beta_2 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_1} + \frac{p \sigma r_1}{M_0 M_1 (p + \mu)} \right] < \rho_2 < 1,$$

且 $\rho_1 + \rho_2 < 1$, 因此

$$\frac{p + \mu}{p} \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + r_2 < \frac{\rho_1 (p + \mu)}{p \sigma (1 - q)} M_0 M_2, \quad \frac{p + \mu}{p} \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + r_1 < \frac{\rho_2 (p + \mu)}{p \sigma q} M_0 M_1,$$

进而

$$(1-q) \left[\frac{\beta_1 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_2} + \frac{p \sigma r_2}{M_0 M_2 (p + \mu)} \right] + q \left[\frac{\beta_2 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_1} + \frac{p \sigma r_1}{M_0 M_1 (p + \mu)} \right] \leq \rho_1 + \rho_2 \leq 1,$$

构造 Liapunov 函数

$$V = \frac{\rho_1 M_0 (p + \mu)}{p \sigma (1 - q)} I + \frac{\rho_2 M_0 (p + \mu)}{p \sigma q} A + \frac{p + \mu}{p} E + R.$$

求 $V(t)$ 关于模型(3.1)的全导数:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\rho_1 M_0 (p + \mu)}{p \sigma (1 - q)} [\sigma (1 - q) E - M_2 I] + \frac{\rho_2 M_0 (p + \mu)}{p \sigma q} (\sigma q E - M_1 A) \\ &\quad + \frac{p + \mu}{p} (\beta_1 S I + \beta_2 S A - M_0 E + p R) + [r_1 A + r_2 I - (p + \mu) R] \\ &\leq \frac{\rho_1 M_0 (p + \mu)}{p \sigma (1 - q)} [\sigma (1 - q) E - M_2 I] + \frac{\rho_2 M_0 (p + \mu)}{p \sigma q} (\sigma q E - M_1 A) \\ &\quad + \frac{p + \mu}{p} \left(\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} I + \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} A - M_0 E + p R \right) + [r_1 A + r_2 I - (p + \mu) R] \\ &= \left[\frac{\rho_1 M_0 (p + \mu)}{p \sigma (1 - q)} \sigma (1 - q) + \frac{\rho_2 M_0 (p + \mu)}{p \sigma q} \sigma q - \frac{p + \mu}{p} M_0 \right] E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{p+\mu}{p} \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + r_2 - \frac{\rho_1(p+\mu)}{p\sigma(1-q)} M_0 M_2 \right) I \\
 & + \left(\frac{p+\mu}{p} \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + r_1 - \frac{\rho_2(p+\mu)}{p\sigma q} M_0 M_1 \right) A \\
 & = (\rho_1 + \rho_2 - 1) \frac{p+\mu}{p} M_0 E + \left(\frac{p+\mu}{p} \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + r_2 - \frac{\rho_1(p+\mu)}{p\sigma(1-q)} M_0 M_2 \right) I \quad (3.7) \\
 & + \left(\frac{p+\mu}{p} \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + r_1 - \frac{\rho_2(p+\mu)}{p\sigma q} M_0 M_1 \right) A \\
 & \leq 0.
 \end{aligned}$$

令 $\Omega = \left\{ (S, E, A, I, R) \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \left\{ (S, E, A, I, R) \mid A = I = E = 0 \right\}$, 在 Ω 内当 $t \rightarrow \infty$ 时, $S \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}$, 所以 $\{P_0\}$ 是 Ω 的最大 ω 不变集. 由 LaSalle 不变集原理知, X 内的任何轨线都趋于 P_0 , 因此疾病消亡平衡点 P_0 全局渐近稳定.

当 $R_0 = 1$ 时, 有

$$(1-q) \left[\frac{\beta_1 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_2} + \frac{p\sigma r_2}{M_0 M_2 (p+\mu)} \right] + q \left[\frac{\beta_2 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_1} + \frac{p\sigma r_1}{M_0 M_1 (p+\mu)} \right] = 1,$$

故存在 ρ_1, ρ_2 使得

$$(1-q) \left[\frac{\beta_1 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_2} + \frac{p\sigma r_2}{M_0 M_2 (p+\mu)} \right] \leq \rho_1 \leq 1 \quad (3.8)$$

和

$$q \left[\frac{\beta_2 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_1} + \frac{p\sigma r_1}{M_0 M_1 (p+\mu)} \right] \leq \rho_2 \leq 1 \quad (3.9)$$

则存在以下 3 种情形:

$$\text{(i) } (1-q) \left[\frac{\beta_1 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_2} + \frac{p\sigma r_2}{M_0 M_2 (p+\mu)} \right] = 1, q \left[\frac{\beta_2 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_1} + \frac{p\sigma r_1}{M_0 M_1 (p+\mu)} \right] = 0;$$

$$\text{(ii) } (1-q) \left[\frac{\beta_1 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_2} + \frac{p\sigma r_2}{M_0 M_2 (p+\mu)} \right] = 0, q \left[\frac{\beta_2 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_1} + \frac{p\sigma r_1}{M_0 M_1 (p+\mu)} \right] = 1;$$

$$(iii) (1-q) \left[\frac{\beta_1 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_2} + \frac{p \sigma r_2}{M_0 M_2 (p + \mu)} \right] < 1, q \left[\frac{\beta_2 \Lambda \sigma}{\mu M_0 M_1} + \frac{p \sigma r_1}{M_0 M_1 (p + \mu)} \right] < 1.$$

对于情形(i), 可得存在 ρ_1, ρ_2 使得 $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0$. 根据式(3.7)可得

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{p + \mu}{p} \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + r_1 - \frac{\rho_2 (p + \mu)}{p \sigma q} M_0 M_1 \right) A \leq 0.$$

令 $\Omega_1 = \left\{ (S, E, A, I, R) \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \{(S, E, A, I, R) \mid A = E = 0\}$, 在 Ω_1 内当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$I \rightarrow 0, R \rightarrow 0, S \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}.$$

对于情形(ii), 可得存在 ρ_1, ρ_2 使得 $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1$. 进而根据(3.7)可得

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{p + \mu}{p} \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + r_2 - \frac{\rho_1 (p + \mu)}{p \sigma (1 - q)} M_0 M_2 \right) I \leq 0.$$

令 $\Omega_2 = \left\{ (S, E, A, I, R) \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \{(S, E, A, I, R) \mid I = E = 0\}$, 在 Ω_2 内当 $t \rightarrow \infty$ 时 $A \rightarrow 0$,

$R \rightarrow 0, S \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}$. 情形(iii)与 $R_0 < 1$ 时证明过程基本类似, 可以得到 $\{P_0\}$ 是最大 ω 不变

集, 由 LaSalle 不变集原理知, 疾病消亡平衡点 P_0 全局吸引.

3.4 疾病的一致持久性

地方病平衡点的存在性在第二节已经给出证明, 本节将给出疾病的一致持久性的证明.

定理 3.4 当 $R_0 > 1$ 时, 存在一个正数 m , 使得模型(3.1)的所有正解 $(S(t), E(t), A(t), I(t), R(t))$ 满足

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} A(t), \liminf_{t \rightarrow \infty} I(t), \liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) \right\} > \varepsilon,$$

即疾病是一致持久的.

证明 令 $X_0 = \{(S, E, A, I, R) \in X | E, I, A, R > 0\}$, $\partial X_0 = X \setminus X_0$, X 的定义见式(3.2).

由模型(3.1)的第二个方程可知

$$E(t) \geq E(t_0)e^{-(\sigma+\mu)(t-t_0)} > 0. \quad (3.10)$$

由模型(3.1)的第三个方程可知

$$A(t) \geq A(t_0)e^{-(\eta+\alpha_1+\mu)(t-t_0)} > 0. \quad (3.11)$$

由模型(3.1)的第四个方程可知

$$I(t) \geq I(t_0)e^{-(\rho+\alpha_2+\mu)(t-t_0)} > 0. \quad (3.12)$$

由模型(3.1)的第五个方程可知

$$R(t) \geq R(t_0)e^{-(\rho+\mu)(t-t_0)} > 0. \quad (3.13)$$

所以 X_0 是正不变集. ∂X_0 在 X 中是相对闭集, 另外模型(3.1)是点耗散的. 令

$$\Omega_\partial = \{(S(0), E(0), A(0), I(0), R(0)) | (S(t), E(t), A(t), I(t), R(t)) \in \partial X_0, \forall t \geq 0\},$$

下证

$$\Omega_\partial = \{(S(0), 0, 0, 0, 0) | S(0) \geq 0\}.$$

显然

$$\{(S(0), 0, 0, 0, 0) | S(0) \geq 0\} \subseteq \Omega_\partial,$$

只需证明

$$\Omega_\partial \subseteq \{(S(0), 0, 0, 0, 0) | S(0) \geq 0\}. \quad (3.14)$$

假设 $(S(0), E(0), A(0), I(0), R(0)) \in \Omega_\partial$, 证明对任意的 $t \geq 0$ 时, $A(t) = 0$, $I(t) = 0$,

$R(t) = 0$, $E(t) = 0$. 若假设不成立, 存在 $t_0 \geq 0$, 使下列之一成立:

$$(i) A(t_0) > 0, \quad (ii) I(t_0) > 0, \quad (iii) R(t_0) > 0, \quad (iv) E(t_0) > 0.$$

若 (i) 成立, 对不等式(3.11)形式求解可知, 对于所有的 $t > t_0$, 都有 $A(t) > 0$. 进而由模型(3.1)可得 $E(t) > 0$, $I(t) > 0$, $R(t) > 0$. 所以 $(S(t), E(t), A(t), I(t), R(t))$ 不属于 ∂X_0 , 这

与 $(S(0), E(0), A(0), I(0), R(0)) \in \Omega_\circ$ 相矛盾. 对于 (ii) 和 (iii) 的情况, 也可以推出类似矛盾.

若 (iv) 成立, 则 $\forall t > t_0$, 有

$$A(t) = A(t_0)e^{-(r_1+\alpha_1+\mu)(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \sigma q E e^{(r_1+\alpha_1+\mu)t} dt.$$

所以对 $\forall t > t_0$, 当 $E(t) > 0$ 时, 有 $A(t) > 0$. 同理可得 $I(t)$ 的形式解为

$$I(t) = I(t_0)e^{-(r_2+\alpha_2+\mu)(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \sigma(1-q)E e^{(r_2+\alpha_2+\mu)t} dt.$$

对 $\forall t > t_0$, 有 $I(t) > 0$. 由模型(3.1)的第五个方程可得

$$R(t) = R(t_0)e^{-(p+\mu)(t-t_0)} + \int_{t_0}^t (r_1 A + r_2 I) e^{(p+\mu)t} dt.$$

对 $\forall t > t_0$, 有 $R(t) > 0$. 故 $(S(t), E(t), A(t), I(t), R(t))$ 不属于 ∂X_0 , 产生矛盾. 因此得出式

(3.14)成立, 模型(3.1)的疾病消亡平衡点 P_0 是全局渐近稳定, 显然在 Ω_\circ 里只有一个平衡

点 P_0 . 根据上述结论, 推出 P_0 是 X 中的单点集, $W^s(P_0) \cap X_0 = \emptyset$. 在 Ω_\circ 中的每个轨道

都收敛于 P_0 , P_0 在 Ω_\circ 中是非环的. 由文献[52]的定理 4.6 知, 疾病关于 $(X_0, \partial X_0)$ 是一致

持久的. 由文献[53]的定理 2.4 得到模型(3.1)有一个平衡点 $(S^*, E^*, A^*, I^*, R^*)$ 属于 X_0 , 但

事实上只需说明 $S^* > 0$. 假设 $S^* = 0$, 根据模型(3.1)得 $E^* = A^* = I^* = R^* = 0$, 推出矛盾,

因此 $P^* = (S^*, E^*, A^*, I^*, R^*)$ 是模型(3.1)的一个正平衡点.

3.5 模型应用

根据模型(3.1)的特点, 本节应用模型(3.1)对新冠肺炎进行研究.

3.5.1 数据

本文搜集了从 1 月 11 日到 25 日的湖北省累计病例数据^[54,55](见图 3.2).

3.5.2 模型参数估计

湖北省已知人口约为 11081000 人^[56], 因此假设 $S(0) = 11081000$. 根据报道^[57]可知,

新冠肺炎的潜伏期约为 7 天，因此 $\sigma = \frac{1}{7}$ 。根据武汉市统计局在 2020 年 3 月 29 日发布的《2019 年武汉市国民经济和社会发展统计公报》中得知死亡率为 0.0057，出生率为 0.0128，故常数输入 $\Lambda = 11081000 \times 0.0128 = 141836.8$ 。

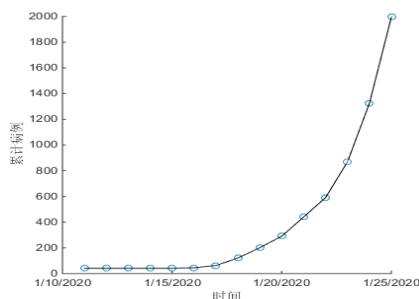


图 3.2 1 月 11 日到 25 日的湖北省累计病例

通过对湖北省从 1 月 11 日到 1 月 25 日的新冠肺炎累计病例数进行数据拟合(见图 3.3)，得到其他未知参数，参数的估计值见表 3-1。

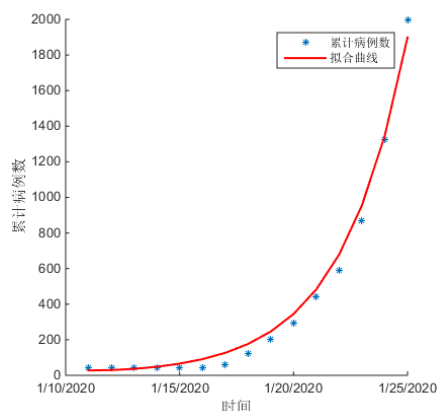


图 3.3 模型拟合

3.5.3 新冠流行趋势

从 1 月下旬开始国家已经采取了严格的防控措施，人为干预会对累计病例数产生很大影响，所以不能对模型进行较长时间段的预测，进而只对模型(3.1)未来 4 天进行预测。对 2020 年 1 月 26 日至 1 月 29 日湖北省累计感染病例数的预测如图 3.4。从观察到的数据来看，新冠肺炎的疫情越来越严重，很大原因是由于在春节期间返乡人员导致疫

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/385342031041011111>