

2023-2024 学年高三上学期期末考试

数学学科试题

一、单选题：本题共 8 个小题，在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

$$z = \frac{1-i}{i(1+i)}$$

1. 已知 i 为虚数单位，若复数 $z = \frac{1-i}{i(1+i)}$ ，则 ()

A. 复数 z 实部为 1

B. 复数 z 虚部为 0

C. $|z| = \sqrt{2}$

D. 在复平面内 z 对应的点位于第二象限

【答案】B

【解析】

【分析】首先利用复数的运算求得 $z = -1$ ，再结合复数的相关概念即可得答案。

【详解】由题意得：
$$z = \frac{1-i}{i(1+i)} = \frac{1-i}{i-1} = -1,$$

所以复数 z 的实部为 -1 ，虚部为 0 ，即 A 错误，B 正确；

$|z| = 1$ ，故 C 错误，在复平面内 z 对应的点为 $(-1, 0)$ ，故 D 错误，

故选：B.

2. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $B = \{y \mid y = x^2 - 2x, x \in A\}$ ，则集合 $B =$ ()

A. $\{-1, 0\}$ B. $\{-1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 3\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意计算，直接得出集合 B.

【详解】由题意知，当 $x = -1$ 时， $y = x^2 - 2x = 3$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = x^2 - 2x = 0$ ，

当 $x = 1$ 时， $y = x^2 - 2x = -1$ ，

当 $x = 2$ 时， $y = x^2 - 2x = 0$ ，

所以 $B = \{y \mid y = x^2 - 2x, x \in A\} = \{-1, 0, 3\}$.

故选：D

3. 已知直线 m, n ，平面 α, β ， $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ， $\alpha \perp \beta = l$ ， $m \perp l$ ，则 $m \perp n$ 是 $\alpha \perp \beta$ 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用线面垂直的判定、面面垂直的性质，结合充分条件、必要条件的定义判断作答.

【详解】依题意，由 $m \perp l$ ， $m \perp n$ ，当 $n // l$ 时，不能证得 $m \perp \beta$ ，从而不能证得 $\alpha \perp \beta$ ，

当 $\alpha \perp \beta$ ， $m \perp l$ 时，由已知及面面垂直的性质知 $m \perp \beta$ ，而 $n \subset \beta$ ，因此 $m \perp n$ ，

所以 $m \perp n$ 是 $\alpha \perp \beta$ 的必要不充分条件.

故选：B

4. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$)，已知方程 $|f(x)| = 1$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 2 个根，则 ω 的取值范

围是 ()

- A. $\left(0, \frac{3}{4}\right]$
- B. $\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$
- C. $\left[\frac{7}{8}, \frac{11}{8}\right)$
- D. $\left[\frac{7}{8}, \frac{11}{8}\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】由题意知函数 $y = |f(x)|$ 图象与直线 $y = 1$ 在 $[0, 2\pi]$ 上仅有 2 个交点，由 $x \in [0, 2\pi]$ 得

$-\frac{\pi}{4} \leq \omega x - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi\omega - \frac{\pi}{4}$ ，所以 $\frac{3\pi}{2} \leq 2\pi\omega - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{2}$ ，解之即可求解.

【详解】由题意知， $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $-1 \leq \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ ，即 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $|f(x)| \leq 1$ ，

又 $x \in [0, 2\pi]$ ，方程 $|f(x)| = 1$ 有且仅有 2 个实根，

所以函数 $y = |f(x)|$ 图象与直线 $y = 1$ 在 $[0, 2\pi]$ 上仅有 2 个交点，

由 $x \in [0, 2\pi]$ ，得 $-\frac{\pi}{4} \leq \omega x - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi\omega - \frac{\pi}{4}$ ，

所以 $\frac{3\pi}{2} \leq 2\pi\omega - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{2}$ ，解得 $\frac{7}{8} \leq \omega < \frac{11}{8}$ ，

即实数 ω 的取值范围为 $[\frac{7}{8}, \frac{11}{8})$.

故选: C

5. 下列函数的图象不可能与直线 $y = 2x + m, m \in \mathbf{R}$ 相切的是 ()

A. $f(x) = x^2 + x$ B. $f(x) = x^3 + e^x$

C. $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$ D. $f(x) = \sqrt{x} + 2x$

【答案】D

【解析】

【分析】题目转化为函数 $f'(x) = 2$ 有解, 则直线 $y = 2x + m$ 就可以为该函数图象的切线, 则逐项检验即可得出结论.

【详解】若导函数 $f'(x) = 2$ 有解, 则直线 $y = 2x + m$ 就可以为该函数图象的切线.

对于选项 A, 令 $f'(x) = 2x + 1 = 2$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 满足条件;

对于选项 B, 因为 $f'(x) = 3x^2 + e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f'(0) = 1 < 2$, $f'(2) = 12 + e^2 > 2$, 所

以方程 $f'(x) = 3x^2 + e^x = 2$ 有解, 满足条件;

对于选项 C, 令 $f'(x) = \frac{1}{x} + x = 2$, 解得 $x = 1$, 满足条件;

对于选项 D, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 > 2$, 不满足条件.

故选: D.

6. 已知函数 $f(x) = 2^{-x}(1 - a^x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是奇函数, 则 $a =$ ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $f(-1) = -f(1)$ 求出 a , 然后验证即可.

【详解】因为 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数,

所以 $f(-1) = -f(1)$, 即 $2(1 - a^{-1}) = -2^{-1}(1 - a)$, 解得 $a = 1$ (舍去) 或 $a = 4$,

则 $f(x) = 2^{-x}(1 - 2^{2x}) = 2^{-x} - 2^x$,

因为 $f(-x) = 2^x - 2^{-x} = -(2^{-x} - 2^x) = -f(x)$,

所以 $a = 4$ 时, $f(x)$ 为奇函数.

故选: D

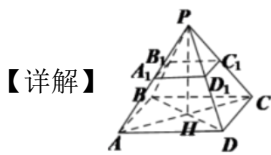
7. 过正四棱锥 $P-ABCD$ 的高 PH 的中点作平行于底面 $ABCD$ 的截面 $A_1B_1C_1D_1$, 若四棱锥 $P-ABCD$ 与四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积之比为 $\frac{12}{11}$, 则直线 PA 与底面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据题意知 A_1, B_1, C_1, D_1 分别为 PA, PB, PC, PD 的中点, 设正方形 $ABCD$ 的边长为 $a, PA = b$, 然后表示四棱锥 $P-ABCD$ 与四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积, 由表面积之比为 $\frac{12}{11}$, 得到 a, b 的关系, 确定线面角, 求解即可.



依题意过正四棱锥 $P-ABCD$ 的高 PH 的中点作平行于底面 $ABCD$ 的截面 $A_1B_1C_1D_1$,

则 A_1, B_1, C_1, D_1 分别为 PA, PB, PC, PD 的中点,

设正方形 $ABCD$ 的边长为 $a, PA = b$,

所以正方形 $ABCD$ 的面积为 a^2 , 正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 $\frac{1}{4}a^2$,

正四棱锥的侧面积为 $4 \times \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$,

四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面积为 $4 \left(\frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right) = \frac{3}{2}a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$,

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积为 $a^2 + 2a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$,

四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积为 $a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{4}a^2 + \frac{3}{2}a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$,

$$\text{所以 } \frac{a^2 + 2a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{5}{4}a^2 + \frac{3}{2}a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{12}{11},$$

$$\text{解得 } b = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

由 $PH \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $\angle PAH$ 为直线 PA 与底面 $ABCD$ 所成角，

$$\text{所以 } \cos \angle PAH = \frac{AH}{PA}, \text{ 又 } AH = \frac{\sqrt{2}}{2}a, PA = b = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\text{所以 } \cos \angle PAH = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

故选：A.

8. 在平面直角坐标系 Oxy 中， A 为直线 $l: y = 2x$ 上在第一象限内的点， $B(5, 0)$ ，以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D . 若 $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ ，则 A 点的横坐标为 ()

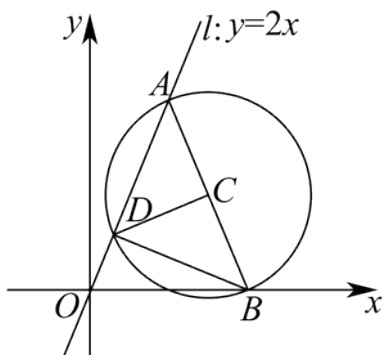
A. -1 B. 3 C. 3 或 -1 D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】由已知得 $BD \perp l$ ，求得 BD 的方程，进而得 $D(1, 2)$ ，设 $A(a, 2a)$ ，则 $C\left(\frac{5+a}{2}, a\right)$ ，从而根据平面向量的数量积求出结果.

【详解】如图，由已知得 $BD \perp l$ ，则 $k_{BD} = -\frac{1}{2}$ ，所以 BD 的方程为 $y = -\frac{1}{2}(x - 5)$.



$$\text{由 } \begin{cases} y = 2x, \\ y = -\frac{1}{2}(x - 5), \end{cases} \text{ 解得 } D(1, 2).$$

设 $A(a, 2a), a > 0$, 则 $C\left(\frac{5+a}{2}, a\right)$, 从而 $\overrightarrow{AB} = (5-a, -2a), \overrightarrow{CD} = \left(\frac{-3-a}{2}, 2-a\right)$.

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (5-a) \cdot \frac{-3-a}{2} - 2a(2-a) = 0$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -1$.

又 $a > 0$, 所以 $a = 3$, 即点 A 的横坐标为 3.

故选: B.

二、多选题: 本题共 4 个小题, 在每个小题给出的选项中, 有多个符合题目要求.

9. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆内部, 点 Q 在椭圆上, 则以下说法正确的是 ()

A. 离心率的取值范围为 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

B. $|QF_1| \cdot |QF_2|$ 的最小值为 4

C. 不存在点 Q , 使得 $\overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$

D. 当 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 以点 P 为中点的椭圆的弦的斜率为 1

【答案】 AC

【解析】

【分析】 根据点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆内部求 b 的范围, 然后可得离心率范围, 可判断 A; 利用椭圆定义和基本不等式判断 B; 当点 Q 为短轴端点时 $\angle F_1 Q F_2$ 最大, 然后利用余弦定理判断 $\angle F_1 Q F_2$ 的最大值, 然后可判断 C; 利用点差法求解即可判断 D.

【详解】 因为点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆内部, 所以 $\frac{2}{4} + \frac{1}{b^2} < 1$, 得 $b^2 > 2$,

因为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}}$, 所以 $0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2}$, A 正确;

因为点 Q 在椭圆上, 所以 $|QF_1| + |QF_2| = 2a = 4$,

所以 $|QF_1| \cdot |QF_2| \leq \left(\frac{|QF_1| + |QF_2|}{2}\right)^2 = 4$, 当且仅当 $|QF_1| = |QF_2|$ 时等号成立,

所以, $|QF_1| \cdot |QF_2|$ 有最大值 4, B 错误;

由椭圆性质可知，当点 Q 为短轴端点时 $\angle F_1 Q F_2$ 最大，

$$\text{此时， } \cos \angle F_1 Q F_2 = \frac{a^2 + a^2 - (2c)^2}{2a^2} = 1 - 2e^2,$$

因为 $0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\cos \angle F_1 Q F_2 = 1 - 2e^2 > 0$ ，

即 $\angle F_1 Q F_2$ 的最大值为锐角，故不存在点 Q ，使得 $\overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$ ，C 正确；

$$\text{当 } e = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时，有 } \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}，\text{ 得 } c = \frac{2\sqrt{3}}{3}，\text{ 所以 } b^2 = \frac{8}{3}，$$

易知，当点 P 为弦中点时斜率存在，记直线斜率为 k ，与椭圆的交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 由点差法得 } \frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)} = -\frac{b^2}{4} = -\frac{2}{3},$$

$$\text{又 } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 + x_1 = 2\sqrt{2}, y_2 + y_1 = 2,$$

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{2}}{2} k = -\frac{2}{3}, \text{ 即 } k = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ D 错误.}$$

故选：AC

10. 下列判断正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数，若 $x < 0$ 时， $f(x) = -\ln(-x)$ ，则 $x > 0$ 时， $f(x) = -\ln x$

B. 若 $\log_a \frac{1}{2} < 1$ ，则 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

C. 为了得到函数 $y = \log_2 \sqrt{x-1}$ 的图象，可将函数 $y = \log_2 x$ 图象上所有点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，横坐标不变，再向右平移 1 个单位长度

D. 设 x_1 满足 $x + \ln x = 2$ ， x_2 满足 $\ln(1-x) - x = 1$ ，则 $x_1 + x_2 = 1$

【答案】CD

【解析】

【分析】根据函数奇偶性可求得当 $x > 0$ 时其解析式为 $f(x) = \ln x$ ，可知 A

错误；利用对数函数单调性分类讨论参数 a 解不等式可得 $0 < a < \frac{1}{2}$ 或 $a > 1$ ，即 B 错误；利用含图像变换规则以及对数运算法则可知 C 正确；由函数与方程的思想可得 $x_1, 1-x_2$ 是函数 $f(x) = x + \ln x - 2$ 的两个零点，由单调性可得 D 正确.

【详解】对于 A，若 $x < 0$ 时， $f(x) = -\ln(-x)$ ，

则 $x > 0$ 时， $-x < 0$ ， $f(-x) = -\ln x$ ，

又因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，所以 $f(-x) = -\ln x = -f(x)$ ，可得 $f(x) = \ln x$ ，即 A 错误；

对于 B，若 $\log_a \frac{1}{2} < 1$ ，当 $0 < a < 1$ 时，可知 $y = \log_a x$ 单调递减，所以 $\log_a \frac{1}{2} < 1 = \log_a a$ ，解得

$$0 < a < \frac{1}{2}；$$

当 $a > 1$ 时，可知 $y = \log_a x$ 单调递增，所以 $\log_a \frac{1}{2} < 1 = \log_a a$ ，解得 $a > \frac{1}{2}$ ，所以 $a > 1$ ；

综上可得 $0 < a < \frac{1}{2}$ 或 $a > 1$ ，即 B 错误；

对于 C，将函数 $y = \log_2 x$ 图象上所有点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，横坐标不变，可得

$$y = \frac{1}{2} \log_2 x = \log_2 \sqrt{x}，$$

再向右平移 1 个单位长度可得 $y = \log_2 \sqrt{x-1}$ ，因此 C 正确；

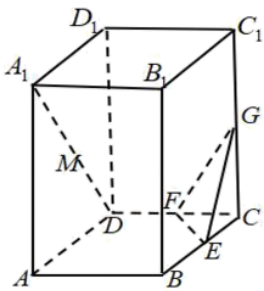
对于 D，将 $\ln(1-x) - x = 1$ 变形可得 $\ln(1-x) + 1 - x = 2$ ，即 x_2 满足 $\ln(1-x) + 1 - x = 2$ ，

又 x_1 满足 $x + \ln x = 2$ ，可知 $x_1, 1-x_2$ 满足方程 $x + \ln x = 2$ ，

又因为函数 $f(x) = x + \ln x - 2$ 单调递增，且 $f(x_1) = f(1-x_2)$ ，所以 $x_1 = 1-x_2$ ，即 $x_1 + x_2 = 1$ ，D 正确.

故选：CD

11. 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = \lambda AB$ ，点 E, F, G 分别是 BC, CD, CC_1 的中点，点 M 是线段 A_1D 上的动点，则下列说法正确的是 ()



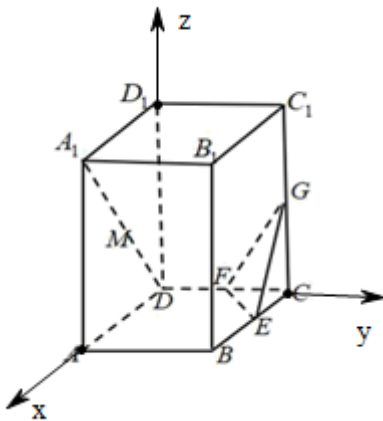
- A. 存在 M ，使得 $AM \perp$ 平面 EFG
- B. 当 $\lambda > 1$ 时，存在 M ，使得 $CM \perp$ 平面 EFG
- C. 存在 M ，使得平面 $MBC_1 \perp$ 平面 EFG
- D. 存在 λ ，使得平面 $MB_1C \perp$ 平面 EFG

【答案】ACD

【解析】

【分析】建系：A 设面 EFG 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，由直线 AM 和平面 EFG 同时垂直于法向量求出 k ；B 若 $CM \perp$ 平面 EFG ，则 $\vec{CM} \parallel \vec{n}$ ，解出 $\lambda = k = 1$ ；C 证明平面 $M(D)BC_1 \perp$ 平面 EFG 即可；D 设平面 MB_1C 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，用 $\vec{m} \cdot \vec{n} = -1^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ 即可。

【详解】以 D 为原点， DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 建立空间直角坐标系，如图：



设 $AB = 2$ ，则 $AA_1 = 2\lambda$ ，则 $A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0)$ ，

又点 E, F, G 分别是 BC, CD, CC_1 的中点，

所以 $E(1, 2, 0), F(0, 1, 0), G(0, 2, \lambda)$ ，

A: 设平面 EFG 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ， $\vec{EF} = (-1, -1, 0), \vec{EG} = (-1, 0, \lambda)$ ，

所以 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EF} = -x - y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{EG} = -x + \lambda z = 0 \end{cases}$, 取 $z=1$, 解得 $\vec{n} = (\lambda, -\lambda, 1)$,

设 $DM = kDA_1$,

Q $A_1(2, 0, 2)$, $\vec{DA_1} = (2, 0, 2)$, $\vec{DM} = (2k, 0, 2/k)$, $M(2k, 0, 2/k)$, $\vec{AM} = (2k - 2, 0, 2/k)$, 若

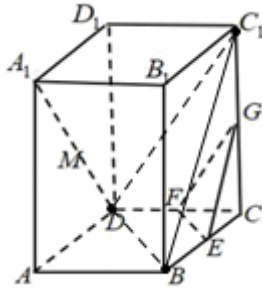
$AM \perp$ 平面 EFG , 则 $\vec{AM} \perp \vec{n}$,

所以 $l(2k - 2) + 2/k = 0 \Rightarrow l(4k - 2) = 0$,

所以当 $k = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = 0$ (舍) 成立, 此时 M 为 A_1D 的中点; 故 A 正确;

B: 延用 A 中的解答, $\vec{CM} = (2k, -2, 2/k)$, 若 $CM \perp$ 平面 EFG , 则 $\vec{CM} \parallel \vec{n}$,

则 $\frac{2k}{l} = \frac{-2}{-l} = \frac{2/k}{1}$, 当且仅当 $\lambda = k = 1$ 时成立, 故 B 错误;



C:

当 M 与 D 重合时, 因为 $EG \parallel BC_1, FG \parallel DC_1, EG \cap FG = G, BC_1 \cap DC_1 = C_1$, 且 $EG, FG \subset$ 面

$EFG, BC_1, DC_1 \subset$ 面 BDC_1 , 此时平面 $M(D)BC_1 \perp$ 平面 EFG , 故 C 正确;

D: 延用 A 中的解答, $M(2k, 0, 2/k)$, 则 $\vec{CM} = (2k, -2, 2/k)$, 因为

$B_1(2, 2, 2)$, $\vec{CB_1} = (2, 0, 2)$,

设平面 MB_1C 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{CM} = 2kx - 2y + 2k\lambda z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{CB_1} = 2x + 2\lambda z = 0 \end{cases}$, 取 $z=1$, 得 $\vec{m} = (-l, 0, 1)$,

若平面 $MB_1C \perp$ 平面 EFG , 则 $\vec{m} \cdot \vec{n} = -l^2 + 1 = 0 \Rightarrow l = 1$, 故 D 正确;

故选: ACD

12. 已知数列 $\{a_n\}, b_n = a_{n+1} + (-1)^n a_n$, 则 ()

A. 当 $a_n = n$ 时, 数列 $\{b_{2n}\}$ 是公差为 2 的等差数列

B. 当 $a_n = n$ 时, 数列 $\{b_n\}$ 的前 16 项和为 160

C. 当 $b_n = n$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 前 16 项和等于 72

D. 当 $b_n = n$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的项数为偶数时, 偶数项的和大于奇数项的和

【答案】BCD

【解析】

【分析】由题意可得 $b_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ 2n+1, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 进而得 $b_{2n} = 4n+1$, 根据等差数列的通项公式即可判断 A;

分别求出数列 $\{b_n\}$ 前 16 项和中奇数项和与偶数项和, 即可判断 B; 由 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = n$ 得

$a_{2k+1} + a_{2k} = 2k$ 、 $a_{2k} - a_{2k-1} = 2k-1$ 、 $a_{2k+2} - a_{2k+1} = 2k+1$, 进而得 $a_{2k-1} + a_{2k} + a_{2k+1} + a_{2k+2} = 4k+2$, 计算

即可判断 C; 由选项 C 知 $a_{2k} - a_{2k-1} = 2k-1$, 利用累加法求出数列 $\{a_n\}$ 前 $2k$ 项和中偶数项和与奇数项和之差, 即可判断 D.

【详解】由题意知, $b_n = \begin{cases} a_{n+1} - a_n, n \text{ 为奇数} \\ a_{n+1} + a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

A: 当 $a_n = n$ 时, $b_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ 2n+1, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 所以 $b_{2n} = 4n+1$,

数列 $\{b_{2n}\}$ 是以 4 为公差的等差数列, 故 A 错误;

B: 当 $a_n = n$ 时, $b_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ 2n+1, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 所以数列 $\{b_n\}$ 前 16 项和中奇数项和为 8,

偶数项和为 $2(2+4+\dots+16)+8 \times 1 = 152$, 则数列 $\{b_n\}$ 前 16 项和为 160, 故 B 正确;

C: 当 $b_n = n$ 时, $a_{n+1} + (-1)^n a_n = n$, 令 $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^*$ 得 $a_{2k+1} + a_{2k} = 2k$ ①,

令 $n = 2k-1$, 得 $a_{2k} - a_{2k-1} = 2k-1$ ②, 令 $n = 2k+1$, 得 $a_{2k+2} - a_{2k+1} = 2k+1$ ③,

①-②, 得 $a_{2k+1} + a_{2k-1} = 1$, ①+③, 得 $a_{2k+2} + a_{2k} = 4k+1$,

所以 $a_{2k-1} + a_{2k} + a_{2k+1} + a_{2k+2} = 4k+2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 前 16 项和为 $4(1+3+5+7)+8 = 72$, 故 C 正确;

D: 由选项 C 可知 $a_{2k} - a_{2k-1} = 2k-1$,

当数列 $\{a_n\}$ 的项数为偶数时, 令项数为 $2k$ ($k \in \mathbf{N}^*$),

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/385040324041011130>