中 文 摘 要

整数值时间序列在生产和生活中较为多见. 而基于稀疏算子的整数值自回归过程 (integer - valued autoregressive, 简记为 INAR) 作为经典模型之一经常用来描述整数值时间序列数据. 本文基于这类过程和不同的稀疏算子, 给出两种新型混合整数值自回归过程, 并研究它们的概率性质和参数估计问题.

在实际中, 随着时间变化, 很多数据的统计结构会发生改变. 例如, 某地区的犯罪频率在经过一定的政府管理和社会进步后会发生变化, 而这种变化通常具有随机性, 如若用单一的自回归过程来描述该数据, 结果会有较大偏差. 因此, 本文提出了一种新的混合整数值自回归过程来描述该类型数据. 考虑到实际数据通常具有较大的离散程度, 我们选取一种等度离散和两种过度离散的整数值自回归过程进行混合, 并且用泊松随机变量作为新息项. 随后对这种新型混合自回归过程的概率性质进行了研究, 得到了该过程的平稳性、遍历性、矩和转移概率等结果. 进一步地, 依据这些结论我们给出了模型中未知参数的条件极大似然估计和 Yule - Walker 估计及渐近正态性、相合性等大样本性质, 并用蒙特卡洛方法来对比这两种估计的性能. 最后, 我们将该过程应用到一个犯罪数据中, 并与其它整数值自回归过程作比较, 计算模型的 AIC 和 BIC 值, 做出向前 1 步预测, 得出本文提出的过程拟合及预测效果更好的结论.

此外, 为了能够更好地建模统计结构随时间变化的整数值时间序列数据, 我们进一步研究了一类具有随机系数的混合整数值自回归过程. 在本文中, 我们选取两种过度离散的整数值自回归过程进行混合, 并假设随机系数服从贝塔分布. 随后研究了这种过程的平稳性、遍历性、矩和转移概率, 并依据这些结论对该模型采用条件极大似然和 Yule - Walker 两种方法来估计未知参数, 并在之后给出了数值模拟结果. 同样地, 本文将该模型应用到实例中, 并与两种随机系数一阶整数值自回归过程和另一种随机系数混合模型进行对比, 得出该模型效果更好的结论.

关键词: 混合整数值自回归过程; 等度离散; 过度离散; 稀疏算子; 蒙特卡洛方法; 随机系数.

Abstract

Integer - valued time series are common in production and life. The integer - valued autoregressive process based on thinning operators (abbreviated as INAR) is often used as one of the common models to describe integer - valued time series data. In this thesis, two new mixed integer - valued autoregressive processes are given based on such processes and different thinning operators, and their probabilistic properties and parameter estimation are investigated.

In practice, the statistical structure of many data usually changes as time changes. For example, the frequency of crime in a given area changes after a certain period of government administration and social progress, and this change is usually stochastic in nature. If a single autoregressive process is used to describe the data, the results will be highly biased. Therefore, a new mixed integer - valued autoregressive process is proposed to describe this type of data. Considering the large dispersion of the data in practice, we choose a mixture of one equal - dispersion and two over - dispersion integer - valued autoregressive processes, and use Poisson random variables as innovations. The probabilistic properties of this new hybrid autoregressive process are then investigated, and results on the stationarity, ergodicity, moments and transfer probabilities of the process are obtained. Furthermore, based on these findings, the conditional maximum likelihood estimates and Yule - Walker estimates of the unknown parameters in the model and the consistency are given, and the performance of these two estimates is compared using Monte Carlo simulation. Finally, we apply the model to a crime data and compare it with other existing integer - valued autoregressive procedures, calculate the AIC and BIC values of the models, make 1 - step -ahead predictions, and conclude that the model in this thesis fits better.

In addition, in order to better fit the integer - valued time series data with time - varying statistical structure, we further investigate a new mixed random coefficients integer - valued autoregressive process. In this thesis, we select two over - dispersion processes and let the random coefficients follow the beta distribution. The stationarity, ergodicity, moments, and transfer probabilities of this process are then investigated, and based on these findings, conditional maximum likelihood estimates and Yule - Walker estimates are also performed on the model to estimate the unknown parameters, and numerical simulation results are presented afterwards. Similarly, we apply the model to an example and compare it with two random coefficients first - order integer - valued autoregressive processes and another mixed model with random coefficients, and conclude that our proposed model works better in comparison.

Key words: Mixed Integer - Valued Autoregressive Process; Equal - Dispersion; Over - Dispersion; Thinning Operators; Monte Carlo Simulation; Random Coefficients.

目录

常用符号

符号	含义
$\mathbb{N}_+$	正整数集
$I_{\{A\}}$	事件A的示性函数
a.s.	几乎处处收敛
$\xrightarrow{d}$	依分布收敛
$\xrightarrow{L^2}$	均方收敛
$\xrightarrow{L^1}$	平均收敛
$\overset{\mathrm{d}}{=}$	同分布
$X \sim P(\lambda)$	随机变量X服从参数为λ的泊松分布
$X \sim NB(r,p)$	随机变量X服从参数为r和p的负二项分布
$\sigma(\mathscr{A})$	由$\mathscr{A}$生成的σ域
$I(\theta)$	关于参数θ的Fisher信息阵
$A_t B_t'$	行向量A_t和列向量B_t'的乘积
$\square$	证明结束

第1章 引言

1.1 背景介绍

时间序列在实际生活中非常常见, 在不同的环境中都存在着可以按时间变化来进行观察、测量的事件. 而整数值时间序列在其中也是很普遍的, 例如疾病流行时某地每月的感染人数; 某省份每月的出生人数和死亡人数; 某股票每天的交易人数; 某医院每天的新住院人数; 每一年某地区的公司破产数等等. 尤其在实际经济金融活动中, 存在着大量的整数值时间序列. 研究这些序列的目的不仅仅是解释过去, 还要在此基础之上预测未来, 这就使得充分地去建模不同的模型变得尤为重要. 因此认识这些序列的特征和规律对研究相应现象有着非常重要的影响和意义.

整数值时间序列的特点是构成其序列的随机变量具有离散分布, 例如二项分布、几何分布、负二项分布、泊松分布等. 因此, 用于研究连续值时间序列的传统方法不一定适用于整数值时间序列.

考虑由 Box 和 Jenkins (1970) 提出的 ARIMA 模型对时间序列数据进行建模, 其中要求新息项 ϵ_t 服从标准正态分布, 这样生成的序列就不会完全是整数值, 用其建模会出现较大的误差. 而对于传统一阶自回归模型 AR (1) , 由差分方程 $X_t = \alpha X_{t-1} + \epsilon_t$ 给出. 其中, 为保证 AR (1) 过程的平稳性, 要求 $|\alpha| < 1$, ϵ_t 与 X_{t-1} 独立. 显然, 在给定 X_{t-1} 的条件下, X_t 的值由新息项 ϵ_t 和乘法算子共同决定. 因此, 在建模过程中不仅要考虑新息项, 使其服从离散整值分布, 还要重新考虑乘法算子. 为此, 众多统计学家和计量经济学家做出了不懈努力来寻找合适的模型, 在下一节中, 我们将会简要介绍一些相关的文献和研究结果.

1.2 文献综述

近 30 年中, 对整数值时间序列影响较大的模型有三类: (1) 整数值自回归滑动平均模型; (2) Markov 模型; (3) 稀疏算子模型. Jacobs 和 Lewis (1978a, 1978b, 1978c, 1983) 最早尝试使用简单的过程来刻画整数值时间序列, 提出了整数值自回归滑动平均模型 (DARMA) 用来描述具有相依性的序列. 虽然该

过程结构比较简单, 但是和实际产生的数据过程有些不同, McKenzie (2000) 认为 DARMA 模型对于相关无条件时间序列数据建模比较合适. 此模型的应用主要体现在水文学方面, 比如 Buishand (1978) 等. 参考离散状态的 Markov 理论, Raftery (1985) 提出了 Markov 模型, 之后 MacDonald 和 Zucchini (1997) 还提出了隐 Markov 模型. 这两种模型的共同缺点就是限制过多导致运算量过大, 同时在参数估计过程中保证转移概率非负也比较困难, 特殊的相关结构也令估计结果有时难以解释. 后续也有很多学者研究了 Markov 模型, 具体可参考 Raftery (1985), Hujer 等 (2003), Yang 等 (2013), Davis 等 (2016), Weiss (2018), Adam 等 (2019).

虽然 Zeger (1988) 提出了均值与方差随协变量变化的回归模型, Harvey 和 Fernandes (1989) 提出了状态空间模型等, 但是无论对于理论研究还是实证研究来说, 研究较多且影响较大的模型之一是稀疏算子 (Thinning Operation) 模型. McKenzie (1985, 1988), Al-Osh 和 Alzaid (1987) 各自独立地提出了基于稀疏算子的整数值时间序列模型. McKenzie (1985) 第一次利用稀疏算子建立了最简单的稀疏算子模型—一阶整数值自回归过程 (first - order integer - valued autoregressive processes), 简称 INAR (1) 过程. 该过程的定义需要用到 Steutel 和 Harn (1979) 提出的稀疏算子的概念. 下面我们介绍一下该算子以及一些常见的基于不同稀疏算子的整数值时间序列模型.

设 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 是独立同分布的伯努利随机变量序列, 假定 $P(B_i=1)=\alpha$, X 为与 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 独立的整数值随机变量, 则根据 Harn (1979), 稀疏算子 “$\circ$” 定义为:

$$\alpha\circ X=\sum_{i=1}^{X}B_i\,,$$

其中, $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 常被称为计数过程. 显然, 在 X 给定的条件下, $\alpha\circ X$ 的条件分布为二项分布, 我们通常也称算子 “$\circ$” 为二项稀疏算子. 利用此算子, McKenzie (1985), Al-Osh 和 Alzaid (1987) 提出了类似于 AR (1) 模型的 INAR (1) 模型.

整数值时间序列 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}_+}$ 称为一阶整数值自回归过程 (INAR (1)), 如果满足

$$X_t=\alpha\circ X_{t-1}+\epsilon_t\,,t\in N_+,$$

其中, $\alpha \in (0,\ 1)$, $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{N}_+}$ 是独立同分布且与计数过程 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 独立的非负整数值随机变量序列, 当 $s < t$ 时, ϵ_t 与 X_s 独立. 其自相关函数与 AR (1) 过程类似, 为 $\rho_k \triangleq \alpha^k$ (可参考 Al-Osh 和 Alzaid (1987)), 也呈现指数衰减. 参数 α 可以取值为 0 或 1, 但是此时过程退化成以概率 1 取某常数值的一个序列, 为保持和 AR (1) 形式上的一致, 在这里剔除 0 和 1. 该模型具体的性质可以参考 Silva (2005).

在此之后, Al-Osh 和 Alzaid (1987) 令上述 INAR (1) 模型中的新息项服从参数为 λ 的泊松分布, 即 $\epsilon_t \sim P(\lambda)$, 称其为泊松 INAR (1) 过程 (简记为 POINAR (1)). 我们注意到, POINAR (1) 过程的期望与方差相等, 可以用来描述等度离散的时间序列数据. 随后, 杜金观和李元 (1991) 研究了 p 阶整数值自回归过程 (INAR(p)). 另外, Ding 和 Wang (2016) 研究了 INAR (1) 模型中的参数 α 含协变量的情形, 并给出了其经验似然的研究结果. Ferland 等 (2006) 提出了一种新的稀疏算子 “$\star$” (原文中该算子表示为 “$*$”, 为不与后文产生矛盾, 在此我们用 “$\star$” 来表示)并在论文中介绍了它与 INGARCH (1,1) 模型的关系, 便于应用在具有异方差性的整数值时间序列数据上. 之后许多学者改变 INGARCH (1,1) 模型中的条件分布, Zhu (2011) 提出了负二项 INGARCH 模型. 随后, Zhu (2012a), Chen 和 Lee (2016) 提出了广义泊松模型, Davis 和Liu (2016) 研究了单参数指数族模型. 而 Fernández (2013) 将基于稀疏算子 “$\star$” 定义的一阶整数值自回归过程称为含有泊松稀疏算子的 INAR(1) 过程.

设 $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 是独立同分布的参数为 ξ 的泊松随机变量序列, X 为与其独立的整数值随机变量, 则根据 Ferland 等 (2006), 稀疏算子 “$\star$” 定义为:

$$\xi \star X = \sum_{i=1}^{X} N_i\ ,$$

显然, 给定 $X = x$ 的条件下 $\xi \star X | X = x \sim P(\xi x)$, 因此通常我们称算子 “$\star$” 为泊松稀疏算子. 与算子 “$\circ$” 不同的是, 这里 $\xi \in (0,\ +\infty)$.

整数值时间序列 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}_+}$ 称为含有泊松稀疏算子的 INAR(1) 过程, 如果满足:

$$X_t = \xi \star X_{t-1} + \epsilon_t\ ,\ t \in N_+,$$

为保证序列的平稳性, 要求 $\xi \in (0,\ 1)$. $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{N}_+}$ 是独立同分布且与计数过程 $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 独立的泊松随机变量序列, 当 $s < t$ 时, ϵ_t 与 X_s 独立. 借助 Heinen (2003) 和 Ferland 等 (2006) 对矩的研究并将其应用在该模型上, 可以看到其方差大于期望, 因此可以用来描述过度离散的时间序列数据.

此外, Ristic 和 Bakouch (2009) 提出另一种新的稀疏算子 "$*$", 并建立了相应的模型 NGINAR (1). 设 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 是独立同分布的参数为 $\dfrac{\beta}{1+\beta}$, $\beta \in (0,\ +\infty)$ 的几何随机变量序列, $\dfrac{\beta}{1+\beta}$ 为几何分布中事件未出现的概率, X 为与 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 独立的整数值随机变量, 则稀疏算子 "$*$" 定义为:

$$\beta * X = \sum_{i=1}^{X} W_i\ ,$$

其中, $P(W_i = k) = \dfrac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}},\quad k = 0,\ 1,\ \cdots$. 与算子 "$\star$" 类似的是 $\beta \in (0,\ +\infty)$. 显然, 给定 $X = x$ 的条件下, $\beta * X | X = x \sim NB\left(x, \dfrac{1}{1+\beta}\right)$, 因此通常我们称算子 "$*$" 为负二项稀疏算子.

根据 Ristic 和 Bakouch (2009), 整数值时间序列 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}_+}$ 称为 NGINAR (1) 过程, 如果满足:

$$X_t = \beta * X_{t-1} + \epsilon_t\ ,\ t \in N_+,$$

其中 ϵ_t 的性质和上述过程相似, 为保证其平稳性 $\beta \in (0,\ 1)$. 该过程的方差大于期望, 因此也可以用来描述离散程度较大的数据.

由于稀疏算子的不同, 其定义的过程也描述着不同类型的整数值时间序列数据. 在此基础上, 新息项 ϵ_t 服从的分布特点不同也会影响过程的统计性质. Orozco 等 (2021) 提出了一种新型含泊松新息项的混合一阶整数值自回归过程, 称为 POMINAR (1), 定义为:

$$X_t = \begin{cases} \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t, & p\ , \\ \xi \star X_{t-1} + \epsilon_t, & 1-p\ , \end{cases} \quad t \in N_+.$$

其中, $\epsilon_t \sim P(\lambda)$ 且与 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$, $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 相互独立, 稀疏算子 "$\circ$" 和 "$\star$" 也是相互独立的, 即对任意时间 $i \in \mathbb{N}_+$, B_i 和 N_i 独立. 该模型将两种过程融合在

一起, 能够描述一些结构会随时间变化的数据. 作者也给出了几种模型的退化形式, 说明了该模型既可以描述等度离散的数据也可以描述过度离散的数据, 且该过程为 INAR (1) 和 INARCH (1) 的更一般形式.

为了能更精准地捕捉到数据统计结构随时间变化的特点, Zheng (2007) 提出了随机系数 INAR (1) 过程并称为 RCINAR (1) 过程:

$$X_t = \alpha_t \circ X_{t-1} + \epsilon_t \ , \ t \in N_+,$$

其中, “$\circ$” 为二项稀疏算子, $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{N}_+}$ 为取值于 $(0,\ 1)$ 的独立同分布的随机变量, 且与 X_0, $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{N}_+}$ 相互独立. 该过程中 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 的分布参数为一个随机变量. 随后, Zhang 和 Wang (2015) 对该模型进行了深入的研究. 张海祥 (2009) 将该模型的算子替换成负二项稀疏算子, 称为 NBRCINAR (1) 模型:

$$X_t = \alpha_t * X_{t-1} + \epsilon_t \ , t \in N_+,$$

其中, “$*$” 为负二项稀疏算子. 不同的是

$$\alpha_t * X_{t-1} = \sum_{i=1}^{X_{t-1}} W_i^{(t)},\ P(W_i^{(t)} = x|\alpha_t) = \frac{\alpha_t^x}{(1+\alpha_t)^{1+x}},\ x = 0, 1, \cdots .$$

并在其论文中给出了相应的统计分析. Gomes 等 (2009) 提出了一种广义随机系数模型, 可以将多种算子表达成统一的形式. Wang 等 (2022) 提出了一种基于混合型稀疏算子的随机系数一阶整数值自回归过程, 称为 RCMTINAR (1) 过程. 其中, 混合型稀疏算子 “$\bullet$” 定义为:

$$\alpha \bullet X = \sum_{i=1}^{X} M_i \ ,$$

其中, X 为非负整值随机变量, $\{M_i\}_{i\in N_+}$ 为一个计数过程由下式给出

$$M_i = \begin{cases} B_i \ , & p \ , \\ W_i \ , & 1-p \ . \end{cases}$$

其中, $p \in [0, 1]$, B_i 和 W_i 为上文定义的伯努利随机变量和几何随机变量. 过程 RCMTINAR (1) 定义如下:

$$X_t = \alpha_t \bullet X_{t-1} + \epsilon_t \ , \quad t \in N_+.$$

其中, 对于任意$t \in N_+$, α_t, ϵ_t 互相独立且与 X_{t-1} 独立.

伯努利随机变量的方差小于期望, 而用其构建的 POINAR (1) 过程可以建模等度离散的时间序列数据. 对泊松分布与负二项分布也可作类似讨论. 受 Orozco 等 (2020) 的启发, 我们将上述三种过程融合在一起, 力求能够描述一类范围更广的结构变化的整数值时间序列数据, 随着时间的推移可以以不同概率取这三个过程中的任意一个. 另外, 我们还研究了具有随机系数的混合模型.

在本文中, 我们重新选取了稀疏算子的符号, 选用 "$\star$" 作为泊松稀疏算子, 选用"$*$"作为负二项稀疏算子, 选用"$\circ$"作为二项稀疏算子.

1.3 预备知识

在这一节中, 我们先陈列出后续推导和证明会用到的重要公式和结论. 当文中用到这些结论时, 我们将直接进行引用. 根据缪柏其和胡太忠 (2009), 我们有以下条件方差和条件期望平滑公式:

1. 条件方差

根据条件期望的定义, $E[X|\mathscr{C}]$ 是关于 $\mathscr{C}$可测的, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var[X|\mathscr{C}]} &= E[(X - E[X|\mathscr{C}])^2|\mathscr{C}] \\
&= E[X^2 - 2XE[X|\mathscr{C}] + E^2[X|\mathscr{C}]]|\mathscr{C}] \\
&= E[X^2|\mathscr{C}] - E^2[X|\mathscr{C}]\,.
\end{aligned}$$

2. 条件期望平滑公式

在概率空间 (Ω, $\mathscr{A}$, P) 中, 设 $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ 是 $\mathscr{A}$ 的两个子 σ 域, 且满足 $\mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{C}_2 \subseteq \mathscr{A}$, Y 和 Z 是满足 $E[YZ]$ 和 $E[Y]$ 都存在的两个随机变量, 且 Z 为$\mathscr{C}_2$ 可测的, 则

$$E[YZ|\mathscr{C}_1] = E\{ZE[Y|\mathscr{C}_2]|\mathscr{C}_1\}, \quad a.s.$$

由上述重要公式可得到如下推论:

在概率空间 (Ω, $\mathscr{A}$, P) 中, 设 $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ 是 $\mathscr{A}$ 的两个子 σ 域, 若 $E[Y]$ 存在, 则

$$E[Y|\mathscr{C}_1] = E\{E[Y|\mathscr{C}_1]|\mathscr{C}_2\} = E\{E[Y|\mathscr{C}_2]|\mathscr{C}_1\}, \quad a.s.$$

3. 三种随机变量序列及三种稀疏算子模型的矩

(1) 我们定义 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 为参数为 α 的伯努利随机变量序列. 对于随机变量 B_i 而言, 其概率分布为 $P(B_i=1)=\alpha,\ P(B_i=0)=1-\alpha$, 通常用来描述试验结果为对立事件的随机试验, 比如被保险人生存和死亡, 某人是否感染某疾病等等.

定义 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 为参数为 $\dfrac{\beta}{1+\beta}$ 的几何分布随机变量序列. 对于随机变量 W_i 而言, 其概率分布为 $P(W_i=k)=\dfrac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}},\ k=0,\ 1,\ \cdots$. 该随机变量分成两种解释: 其一是进行 w 次伯努利试验其中最后一次伯努利试验感兴趣的事件发生 w 的概率分布, 事件发生概率为 $\dfrac{1}{1+\beta}$; 其二是为得到一次伯努利试验中感兴趣的事件发生, 而在此之前进行 w 次伯努利试验时 w 的概率分布, 事件发生概率也为 $\dfrac{1}{1+\beta}$. 不同的是, 第一种情况 $n=1,\ 2,\ \cdots$, 而第二种情况 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$. 在本文中, 我们选取第二种情况, 这样容易得到 $E[W_i]=\beta,\ \mathrm{Var}[W_i]=\beta^2+\beta$.

定义 $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ 为参数为 λ 的泊松随机变量序列. 对于随机变量 N_i 而言, 其概率分布为 $P(N_i=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. 泊松分布通常用来描述单位时间内随机事件发生次数, 例如一定时间内通过路口的车辆数, 某时间段医院就医次数等等.

(2) 根据 Al-Osh 和 Alzaid (1987), 设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}_+}$ 为 POINAR (1) 过程: $X_t=\alpha\circ X_{t-1}+\epsilon_t,\ \epsilon_t\sim P(\lambda)$, 则

i. $E[X_t]=\mathrm{Var}[X_t]=\gamma_0=\dfrac{\lambda}{1-\alpha}$;

ii. $E[X_t|X_{t-1}]=\alpha X_{t-1}+\lambda$;

iii. $\mathrm{Var}[X_t|X_{t-1}]=\alpha(1-\alpha)X_{t-1}+\lambda$;

iv. $\gamma_k=\mathrm{Cov}(X_{t-k},\ X_t)=\alpha^k\gamma_0,\quad k=0,\ 1,\ \cdots$;

v. $\rho_k=\dfrac{\gamma_k}{\gamma_0}=\alpha^k,\quad k=0,\ 1,\ \cdots$ ..

(3) 根据 Ristic 和 Bakouch (2009), 设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}_+}$ 为 NGINAR(1) 过程: $X_t=\beta * X_{t-1}+\epsilon_t,\quad \epsilon_t\sim P(\lambda)$, 则

i. $E[X_t]=\dfrac{\lambda}{1-\beta}$;

ii. $E[X_t^2]=\dfrac{\lambda+\lambda^2+\lambda\beta^2+\lambda^2\beta}{(1-\beta)^2(1+\beta)}$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/378004047132006042