专题 03 一网打尽指对幂等函数值比较大小问题

目 录

题型 01 直接利用单调性

1．（2023·安徽·高三校联考阶段练习）已知 $a=\log_2 3$， $b=\log_4 6$， $c=\log_8 9$，则 a、b、c 的大小顺序为（　　）

A． $a<b<c$　　B． $a<c<b$　　C． $c<b<a$　　D． $b<c<a$

【答案】C

【解析】$b=\log_4 6=\log_2\sqrt{6}$，又 $c=\log_8 9=\log_2\sqrt[3]{9}$，因为 $3>\sqrt{6}>\sqrt[3]{9}$， $y=\log_2 x$ 单调递增，所以 $c<b<a$.

故选：C

2．（2023·甘肃·模拟预测）三个数 $1.3^{\frac{2}{3}}$， $0.3^{\frac{2}{3}}$， $0.3^{\frac{3}{4}}$ 的大小顺序是（　）

A． $1.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{3}{4}}>0.3^{\frac{2}{3}}$　　B． $0.3^{\frac{2}{3}}>1.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{3}{4}}$

C． $1.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{3}{4}}$　　D． $0.3^{\frac{3}{4}}>1.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{2}{3}}$

【答案】C

【解析】由函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $1.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{2}{3}}$

又由于 $y=0.3^x$ 在 R 上单调递减，则 $0.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{3}{4}}$

故 $1.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{2}{3}}>0.3^{\frac{3}{4}}$

故选：C

3．（2023·安徽·高三校联考阶段练习）已知 $a=\log_2 3$， $b=\log_3 4$， $c=\sqrt{2}$，则 a、b、c 的大小顺序为（　　）

A． $a<b<c$　　B． $a<c<b$　　C． $c<b<a$　　D． $b<c<a$

【答案】D

【解析】由 $a=\log_2 3=\log_2\sqrt{9}>\log_2\sqrt{8}=\frac{3}{2}>\sqrt{2}$， 故 $a>c$，

因为 $a\cdot b=\log_2 3\cdot\log_3 4=2$， 所以 $b=\frac{2}{a}$，

因为 $a>\sqrt{2}$，所以 $\frac{1}{a}<\frac{1}{\sqrt{2}}$， 所以 $\frac{2}{a}<\sqrt{2}$， 即 $b<\sqrt{2}$

$b<c<a$

故选：D

题型 02 引入媒介值

4．（2023·高三新疆石河子一中校考阶段练习）设 $a=2^{0.3}, b=0.3^2, c=\log_2 0.3$，则 a，b，c 的大小顺序是（　　）

A． $c<a<b$　　B． $c<b<a$

C． $a<c<b$　　D． $b<c<a$

【答案】B

【解析】Q $a=2^{0.3}>2^0=1$，$b=0.3^2=0.09<1$，$c=\log_2 0.3<\log_2 1=0$；

$\therefore c<b<a$.

故选：B.

5.（2023·辽宁·高三东北育才学校校联考期末）已知$a=\log_2 0.4$，$b=\log_5\frac{6}{5}$，$c=3^{\frac{1}{10}}$，则a，b，c的大小顺序为（　）

A．$c>b>a$　　B．$b>a>c$　　C．$a>b>c$　　D．$c>a>b$

【答案】A

【解析】$\log_2 0.4<0$，$0<\log_5\frac{6}{5}<1$，$3^{\frac{1}{10}}>1$，所以$c>b>a$.

故选：A

6.（2023·浙江嘉兴·高一校联考期中）已知$a=\log_2 2.8$，$b=\log_{0.8}2.8$，$c=2^{-0.8}$试比较a，b，c的大小为（　）

A．$b<a<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<b<a$　　D．$a<c<b$

【答案】B

【解析】∵$a=\log_2 2.8>\log_2 2=1$，

$b=\log_{0.8}2.8<\log_{0.8}1=0$，

$0<c=2^{-0.8}<2^0=1$，

∴$b<c<a$.

故选：B.

7.（2023·天津红桥·天津三中校考一模）设$a=2^{0.3}$，$b=\log_{0.3}2$，$c=0.3^2$，则三者的大小顺序是（　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$c>b>a$　　D．$b>a>c$

【答案】B

【解析】因为$a=2^{0.3}>1$，$b=\log_{0.3}2<0$，$c=0.3^2\in(0,1)$，

所以$a>c>b$，

故选：B.

8.（2023·全国·高三校联考阶段练习）已知$a=\log_3 10$，$b=\lg 27$，$c=\sqrt{3}$.则a，b，c的大小顺序为（　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<b<a$　　D．$b<c<a$

【答案】D

【解析】因为$a=\log_3 10>\log_3 9=2>\sqrt{3}$，所以$a>c$，$0<\frac{c}{a}<1$

又$a\cdot b=\log_3 10\cdot\lg 27=3=c^2$，$b=\dfrac{c^2}{a}=c\cdot\dfrac{c}{a}<c$，

所以$b<c<a$.

故选：D

9.（2023·浙江嘉兴·高一统考期中）$0.3^2,\log_2 0.3,2^{0.3}$这三个数的大小顺序是（　）

A．$0.3^2<2^{0.3}<\log_2 0.3$　　B．$0.3^2<\log_2 0.3<2^{0.3}$

C．$\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$　　D．$\log_2 0.3<2^{0.3}<0.3^2$

【答案】C

【解析】因为$0<0.3^2<0.3^0=1$，$\log_2 0.3<\log_2 1=0$，$2^{0.3}>2^0=1$，

所以$\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$，

故选：C.

10.（2023·新疆阿勒泰·高三阶段练习）$a=0.4^{0.6},b=\log_{0.4}4,c=4^{0.4}$这三个数的大小顺序是　（ ）

A．$a>b>c$　B．$c>b>a$　C．$c>a>b$　D．$b>a>c$

【答案】C

【解析】$\because a=0.4^{0.6}\in(0,1),b=\log_{0.4}4<0,c=4^{0.4}>1\therefore c>a>b$，选 C.

题型 03 含变量问题

11.（2023·江苏盐城·高一江苏省响水中学校考阶段练习）已知正数x,y,z，满足$3^x=4^y=6^z$，则下列说法不正确的是（　）

A．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{z}$　　B．$3x>4y>6z$

C．$x+y>(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2})z$　　D．$xy>2z^2$

【答案】B

【解析】设$3^x=4^y=6^z=m>1$，则$x=\log_3 m,y=\log_4 m,z=\log_6 m$

$\therefore\dfrac{1}{x}=\log_m 3,\dfrac{1}{y}=\log_m 4,\dfrac{1}{z}=\log_m 6$

对 A：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\log_m 3+\dfrac{1}{2}\log_m 4=\log_m 3+\log_m 2=\log_m 6=\dfrac{1}{z}$，A 正确；

对 B：由题意可得：$3x=\frac{1}{\frac{1}{3x}}=\frac{1}{\frac{\log_m 3}{3}}$，同理可得：$4y=\frac{1}{\frac{\log_m 4}{4}},6z=\frac{1}{\frac{\log_m 6}{6}}$

$\because \frac{\log_m 3}{3}-\frac{\log_m 4}{4}=\frac{4\log_m 3-3\log_m 4}{12}=\frac{\log_m 81-\log_m 64}{12}>0$

$\frac{\log_m 4}{4}-\frac{\log_m 6}{6}=\frac{3\log_m 4-2\log_m 6}{12}=\frac{\log_m 64-\log_m 36}{12}>0$

$\therefore \frac{\log_m 3}{3}>\frac{\log_m 4}{4}>\frac{\log_m 6}{6}>0$，则 $3x<4y<6z$，B 错误；

对 C：$\because \frac{x+y}{z}=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=\frac{\log_3 m}{\log_6 m}+\frac{\log_4 m}{\log_6 m}=\frac{\lg 6}{\lg 3}+\frac{\lg 6}{\lg 4}=\frac{3}{2}+\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{1}{2}\times\frac{\lg 3}{\lg 2}>\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

$\therefore x+y>(\frac{3}{2}+\sqrt{2})z$，C 正确；

对 D：$\frac{xy}{z^2}=\frac{\log_3 m}{\log_6 m}\times\frac{\log_4 m}{\log_6 m}=\frac{\lg 6}{\lg 3}\times\frac{\lg 6}{\lg 4}=\frac{(\lg 2+\lg 3)^2}{2\lg 2\times\lg 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\lg 3}{\lg 2}+\frac{\lg 2}{\lg 3}+2\right)>2$

$\therefore xy>2z^2$，D 正确；

故选：B.

12.（2023 •广西 •统考模拟预测）已知正数 x,y,z 满足 $y=e^x$，且 x,y,z 成等比数列，则 x,y,z 的大小关系为（　）

A．$x>y>z$　　　　B．$y>x>z$

C．$x>z>y$　　　　D．$z>y>x$

【答案】D

【解析】令 $f(x)=y-x=e^x-x,x>0$，则 $f'(x)=e^x-1$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)=e^x-x>e^0=1$，所以 $e^x>x$，故 $y>x$，

因为正数 x,y,z 成等比数列，所以 $y^2=xz$ 即 $e^{2x}=xz$，故 $z=\frac{e^{2x}}{x}$，

所以 $\frac{z}{y}=\frac{e^{2x}}{xe^x}=\frac{e^x}{x}>1$，故 $z>y$，

综上所述，$z>y>x$，

故选：D

13.（2023 • 湖南岳阳 • 高三统考阶段练习）已知正数 a,b,c，满足 $a\ln b=b\cdot e^c=c\cdot a$，则 a,b,c 的大小关系为（　）

A．$a<b<c$　　　　B．$a<c<b$

C．$b<c<a$　　　　D．$c<b<a$

【答案】D

【解析】a,b,c 均为正数，

因为 $a\ln b=c\cdot a$，所以 $c=\ln b$，设 $a\ln b=b\cdot e^{c}=c\cdot a=t\left(t>0\right)$，

则 $a=\dfrac{t}{\ln b},b=\dfrac{t}{\mathrm{e}^{c}}=\dfrac{t}{b},c=\ln b$，

令 $f\left(x\right)=\ln x-x\left(x>0\right)$，则 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，当 $0<x<1$ 时 $f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增，当 $x>1$ 时 $f'\left(x\right)<0$，

$f\left(x\right)$ 单调递减，所以 $f\left(x\right)\le f\left(1\right)=-1<0$，

即 $\ln x<x$，所以 $\ln b<b$，可得 $a>b$，

又 $c=\ln b$ 得 $c<b$，综上，$c<b<a$.

故选：D.

14.（2023 •湖北 •高三校联考开学考试）已知 a,b,c 均为不等于 1 的正实数，且 $\ln c=a\ln b,\ln a=b\ln c$，则 a,b,c 的大小关系是（　）

A．$c>a>b$　　　　B．$b>c>a$

C．$a>b>c$　　　　D．$a>c>b$

【答案】D

【解析】$\because \ln c=a\ln b,\ln a=b\ln c$ 且 a、b、c 均为不等于1的正实数，

则 $\ln c$ 与 $\ln b$ 同号，$\ln c$ 与 $\ln a$ 同号，从而 $\ln a$、$\ln b$、$\ln c$ 同号.

①若 a、b、$c\in\left(0,1\right)$，则 $\ln a$、$\ln b$、$\ln c$ 均为负数，

$\ln a=b\ln c>\ln c$，可得 $a>c$，$\ln c=a\ln b>\ln b$，可得 $c>b$，此时 $a>c>b$；

②若 a、b、$c\in\left(1,+\infty\right)$，则 $\ln a$、$\ln b$、$\ln c$ 均为正数，

$\ln a=b\ln c>\ln c$，可得 $a>c$，$\ln c=a\ln b>\ln b$，可得 $c>b$，此时 $a>c>b$.

综上所述，$a>c>b$.

故选：D.

15.（2023 • 全国 • 高三专题练习）已知实数 a，b，c 满足 $\dfrac{\ln a}{\mathrm{e}^{a}}=\dfrac{\ln b}{b}=-\dfrac{\ln c}{c}<0$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

A．$b<a<c$　　B．$c<b<a$　　C．$a<b<c$　　D．$c<a<b$

【答案】C

【解析】由题意知 $a>0,b>0,c>0$，由 $\dfrac{\ln a}{e^{a}}=\dfrac{\ln b}{b}=-\dfrac{\ln c}{c}<0$，得 $0<a<1,0<b<1,c>1$，

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$f^{'}(x)>0, f(x)$ 单调递增，因 $e^x \geq x+1$，

当且仅当 $x=0$ 时取等号，故 $e^a>a(0<a<1)$，

又 $\ln a<0$，所以 $\frac{\ln a}{e^a}>\frac{\ln a}{a}$，故 $\frac{\ln b}{b}>\frac{\ln a}{a}$，

$\therefore f(b)>f(a)$，则 $b>a$，即有 $0<a<b<1<c$，故 $a<b<c$.

故选:C.

题型 04 构造函数

16.（2023·福建莆田·高二统考期末）设 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$b=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$，$c=\frac{4(4-\ln 4)}{\mathrm{e}^4}$，则（　）

A．$b<a<c$　　　　B．$b<c<a$

C．$c<a<b$　　　　D．$c<b<a$

【答案】D

【解析】$a=\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，$b=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}$，$c=\frac{4(4-\ln 4)}{\mathrm{e}^4}=\frac{\ln\frac{\mathrm{e}^4}{4}}{\frac{\mathrm{e}^4}{4}}$，

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $a=f(\mathrm{e}), b=f(4), c=f\left(\frac{\mathrm{e}^4}{4}\right)$，

由 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，得 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f¢(x)>0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上递减，

因为 $\mathrm{e}<4<\frac{\mathrm{e}^4}{4}$，所以 $f(\mathrm{e})>f(4)>f\left(\frac{\mathrm{e}^4}{4}\right)$，

所以 $a>b>c$，

故选：D

17.（2023·江苏·校联考模拟预测）已知 $a=\mathrm{e}^{-0.1}$，$b=\ln\frac{10\mathrm{e}}{11}$，$c=0.1^{0.1}$，则（　）

A．$b<c<a$　　B．$c<b<a$　　C．$c<a<b$　　D．$a<c<b$

【答案】B

【解析】由$b=\ln\frac{10\text{e}}{11}=\ln\frac{1}{1+0.1}+1=-\ln\left(1+0.1\right)+1$.

设$f\left(x\right)=\text{e}^{-x}+\ln\left(1+x\right)-1\left(x>0\right)$,

则$f'\left(x\right)=-\text{e}^{-x}+\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{\text{e}^{x}}+\frac{1}{1+x}$,

设$g\left(x\right)=\text{e}^{x}-1-x\left(x>0\right)$,

则$g'\left(x\right)=\text{e}^{x}-1>0$,

所以函数$g\left(x\right)=\text{e}^{x}-1-x$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增,

所以$g\left(x\right)>g\left(0\right)=0$, 即$\text{e}^{x}-1-x>0$,

即$\text{e}^{x}>1+x>0$, 即$\frac{1}{\text{e}^{x}}<\frac{1}{1+x}$,

所以$f'\left(x\right)=-\frac{1}{\text{e}^{x}}+\frac{1}{1+x}>0$,

则函数$f\left(x\right)=\text{e}^{-x}+\ln\left(1+x\right)-1$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增,

所以$f\left(0.1\right)>f\left(0\right)=0$, 即$\text{e}^{-0.1}+\ln\left(1+0.1\right)-1>0$,

即$\text{e}^{-0.1}>-\ln\left(1+0.1\right)+1$, 即$a>b$;

设$u\left(x\right)=\ln x-x+1\left(x>1\right)$,

则$u'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}<0$,

所以函数$u\left(x\right)=\ln x-x+1$在$\left(1,+\infty\right)$上单调递减,

则$u\left(x\right)<u\left(1\right)=0$, 即$\ln x-x+1<0$,

即$\ln x<x-1\left(x>1\right)$, 即$\ln 1.1<1.1-1=0.1$,

所以$b=-\ln 1.1+1>0.9$,

又$0.9^{10}=\left(0.9^{2}\right)^{5}=0.81^{5}>0.8^{5}=0.32768>0.1$,

所以$0.9>0.1^{0.1}$, 即$b>c$,

所以$c<b<a$.

故选：B.

18.（2023·甘肃张掖·高台县第一中学校考模拟预测）已知 $a=\ln 1.3$， $b=\frac{3}{13}$， $\ln(c+1)=0.3$，则（　）

A． $a<b<c$　　　　B． $c<a<b$

C． $b<a<c$　　　　D． $c<b<a$

【答案】C

【解析】由 $\ln(c+1)=0.3$，得 $c=e^{0.3}-1$．

设 $f(x)=\ln(x+1)-x(x>-1)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$，

故当 $-1<x<0$ 时， $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当 $x>0$ 时， $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减．

所以 $f(x)$在 $x=0$ 处取得极大值，也是最大值，

即 $f(x)=\ln(x+1)-x\le f(0)=0$，即 $\ln(x+1)\le x$，

所以 $x+1\le e^x$，所以 $\ln(x+1)\le x\le e^x-1$（当且仅当 $x=0$ 时取等号），

所以 $\ln 1.3=\ln(1+0.3)<0.3<e^{0.3}-1$，即 $a<c$．

设 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}(x>0)$，则当 $x>0$ 时，

$g'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}>0$，所以 $g(x)$单调递增，

所以 $g(x)>\ln 1-0=0$，故 $g(0.3)=\ln(0.3+1)-\frac{0.3}{0.3+1}>0$，

所以 $\ln 1.3>\frac{3}{13}$，即 $b<a$，所以 $b<a<c$．

故选：C.

19.（2023·北京·高三校考开学考试）已知 $a=\sin\frac{1}{3}$， $b=\lg 3$， $c=2^{\frac{1}{3}}$，比较 a，b，c 的大小：__________（用“<”连接）

【答案】 $a<b<c$

【解析】令 $f(x)=x-\sin x$， $f'(x)=1-\cos x\ge 0$ 恒成立，当且仅当 $x=2k\pi(k\in Z)$ 取等号，所 $f(x)=x-\sin x$ 是增函数，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f(x)=x-\sin x>f(0)=0$，即 $x>\sin x$，所以 $a=\sin\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，

又 $b-\frac{1}{3}=\lg 3-\frac{1}{3}=\lg 3-\lg 10^{\frac{1}{3}}$，又因为 $27>10$，所以 $3>10^{\frac{1}{3}}$，故由 $y=\lg x$ 的单调性知， $\lg 3>\lg 10^{\frac{1}{3}}$，所以

$b-\frac{1}{3}>0$，从而 $b>a$，

又易知 $b<1$，又由函数 $y=2^x$ 的单调性知，$c=2^{\frac{1}{3}}>2^0=1$，所以 $a<b<c$.

故答案为：$a<b<c$

20.（2023·浙江杭州·高三浙江省杭州第二中学校考阶段练习）已知 $a=\left(\frac{2023}{2024}\right)^{2024}, b=\frac{1}{e}, c=\left(\frac{521}{2023}\right)^{\frac{1314}{2023}}$，则下列有关 a,b,c 的大小关系比较正确的是（　）

A．$c<b<a$　　B．$b<a<c$　　C．$a<b<c$　　D．$a<c<b$

【答案】C

【解析】因为 $f(x)=x-\ln(1+x)$，$x\in(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f¢(x)>0$，则函数 $f(x)$ 单调递增，

则当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值，即最小值为 0，

所以 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，即 $x>\ln(1+x)$，

$$\ln a=\ln\left(\frac{2023}{2024}\right)^{2024}=2024\ln\frac{2023}{2024}=2024\ln\left(1-\frac{1}{2024}\right)<2024\cdot\left(-\frac{1}{2024}\right)=-1,$$

则 $\ln a<-1$，而 $\ln b=\ln\frac{1}{e}=-1$，所以 $a<b$，

又 $\ln c=\ln\left(\frac{521}{2023}\right)^{\frac{1314}{2023}}=\frac{1314}{2023}\ln\left(\frac{521}{2023}\right)$，则 $\ln c-\ln b=\frac{1314}{2023}\ln\left(\frac{521}{2023}\right)+1$，

令 $g(x)=1314x\ln(521x)+1$，则 $g'(x)=1314\cdot\ln(521x)+1314=1314[\ln(521x)+1]$，

令 $g'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{512e}$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{512e}\right)$ 时，$g'(x)<0$，则函数 $g(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\frac{1}{512e},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 单调递增，

所以当 $x=\frac{1}{512e}$ 时，$g(x)$ 有极小值，即最小值为 $g\left(\frac{1}{512e}\right)=1-\frac{1314}{512e}>0$，

所以 $g\left(\frac{1}{2023}\right)>0$，即 $\ln c-\ln b=g\left(\frac{1}{2023}\right)>0$，则 $c>b$，所以 $c>b>a$.

故选：C

21.（2023·江苏无锡·统考模拟预测）已知 $a=\ln\sqrt[3]{3}, b=\mathrm{e}^{-1}, c=(9-3\ln 3)\mathrm{e}^{-3}$，则 a，b，c 的大小为（　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

【答案】C

【解析】令函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x\ge \mathrm{e})$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，求导得：$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，

则函数 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，又 $a=\dfrac{\ln 3}{3}=f(3)$，$b=\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=f(\mathrm{e})$，$c=\dfrac{3(3-\ln 3)}{\mathrm{e}^3}=\dfrac{\ln\frac{\mathrm{e}^3}{3}}{\frac{\mathrm{e}^3}{3}}=f(\dfrac{\mathrm{e}^3}{3})$，

显然 $\mathrm{e}<3<\dfrac{\mathrm{e}^3}{3}$，则有 $f(\dfrac{\mathrm{e}^3}{3})<f(3)<f(\mathrm{e})$，所以 $c<a<b$.

故选：C

22.（2023·湖北·鄂南高中校联考模拟预测）下列大小比较中，错误的是（　）

A．$3^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^3<\pi^{\mathrm{e}}$　　B．$\mathrm{e}^3<\pi^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^{\pi}$　　C．$\pi^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^{\pi}<3^{\pi}$　　D．$\pi^3<\mathrm{e}^{\pi}<3^{\pi}$

【答案】D

【解析】对于选项D,构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

所以当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)\le f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.（当且仅当 $x=\mathrm{e}$ 时取等）

则令 $x=\dfrac{\mathrm{e}^2}{\pi}$，则 $\dfrac{\ln\frac{\mathrm{e}^2}{\pi}}{\frac{\mathrm{e}^2}{\pi}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，化简得 $\ln\pi>2-\dfrac{\mathrm{e}}{\pi}$，故 $3\ln\pi>6-\dfrac{3\mathrm{e}}{\pi}>6-\mathrm{e}>\pi$，

故 $\ln\pi^3>\pi$，故 $\pi^3>\mathrm{e}^{\pi}$，所以选项D错误；

对于选项A，$3^{\mathrm{e}}<\pi^{\mathrm{e}}, f(3)<f(\mathrm{e}),\therefore\dfrac{\ln 3}{3}<\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}},\therefore 3^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^3$，

在 $f(x)\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 中，令 $x=\dfrac{\mathrm{e}^2}{\pi}$，则 $\dfrac{\ln\frac{\mathrm{e}^2}{\pi}}{\frac{\mathrm{e}^2}{\pi}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，化简得 $\ln\pi>2-\dfrac{\mathrm{e}}{\pi}$，故

$\mathrm{e}\ln\pi>\mathrm{e}(2\text{-}\dfrac{\mathrm{e}}{\pi})>2.7\times(2-\dfrac{2.72}{3.1})>2.7\times(2-0.88)=3.024>3$，

所以 $\mathrm{e}\ln\pi>3,\therefore\ln\pi^{\mathrm{e}}>\ln\mathrm{e}^3,\therefore\pi^{\mathrm{e}}>\mathrm{e}^3$. 所以 $3^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^3<\pi^{\mathrm{e}}$，所以选项A正确；

对于选项B,在 $f(x)\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 中，令 $x=\pi$，则 $\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}},\therefore\pi^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^{\pi}$，所以 $\mathrm{e}^3<\pi^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^{\pi}$，所以选项B正确；

对于选项C，$e^{\pi}<3^{\pi}$，所以$\pi^{e}<e^{\pi}<3^{\pi}$，所以选项C正确.

故选：D

23．（2023·云南大理·高二统考期末）若$a=\sin 3, b=\frac{1}{5}, c=e^{-\frac{4}{5}}$，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$

C．$b<c<a$　　D．$b<a<c$

【答案】A

【解析】设$f(x)=x-\sin x(0<x<\frac{\pi}{2})$，$f'(x)=1-\cos x>0$，则$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上为增函数，故

$f(x)=x-\sin x>f(0)=0$，即$x>\sin x(0<x<\frac{\pi}{2})$.

又$y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上为增函数，且$0<\pi-3<\frac{1}{5}<\frac{\pi}{2}$，则有$\sin 3=\sin(\pi-3)<\sin\frac{1}{5}<\frac{1}{5}$，即$\sin 3<\frac{1}{5}$，故$a<b$.

设$g(x)=e^{x-1}-x, x\in(0,1)$，则$g'(x)=e^{x-1}-1<0$，故$g(x)=e^{x-1}-x, x\in(0,1)$为减函数，$g(x)>g(1)=0$，即

$e^{x-1}>x, x\in(0,1)$，故$\frac{1}{5}<e^{\frac{1}{5}-1}=e^{-\frac{4}{5}}$，即$b<c$.

综合可得：$a<b<c$.

故选：A

24．（2023·安徽阜阳·高二统考期末）设$a=e^{-0.8}, b=\ln 1.2, c=2^{-0.8}$，则（　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$

C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

【答案】C

【解析】设$f(x)=e^{x}-x-1$，则$f'(x)=e^{x}-1$，

当$x>0$时，$f'(x)>0$，当$x<0$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0)$上单调递减，

所以$f(x)_{\min}=f(0)=0$，

所以$f(x)\geq 0, \therefore e^{x}-x-1\geq 0, \therefore e^{x}\geq x+1$在R上恒成立，

所以$a=e^{-0.8}>-0.8+1=0.2$.

设$g(x)=\ln x-x+1$，则$g'(x)=\frac{1}{x}-1$，

当$x>1$时，$g'(x)<0$，当$0<x<1$时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\ln 1-1+1=0$，

所以 $g(x)\le 0, \therefore \ln x-x+1\le 0, \therefore \ln x\le x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $b=\ln 1.2<1.2-1=0.2<a$.

函数 $y=x^{0.8}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.8}>\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{0.8}$，即 $2^{-0.8}>\mathrm{e}^{-0.8}, c>a$.

从而有 $c>a>b$，

故选：C.

25.（2023·福建龙岩·高二统考期末）若 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$b=\frac{2}{5}(\ln 5-\ln 2)$，$c=\left(\frac{2022}{2023}\right)^{2022}$，则（　）

A．$b<c<a$　　B．$b<a<c$　　C．$c<b<a$　　D．$a<c<b$

【答案】B

【解析】由 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，$b=\frac{2}{5}(\ln 5-\ln 2)=\frac{\ln\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}$，令 $\boldsymbol{f(x)=\frac{\ln x}{x}}$ 且 $x\in(0,\mathrm{e}]$，

则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，故 $(0,\mathrm{e}]$ 上 $f'(x)\ge 0$，此时 $f(x)$ 单调递增，故 $f(\frac{5}{2})<f(\mathrm{e})$，

所以 $b<a$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$ 且 $x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，即此时 $g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=0$，则 $\mathrm{e}^x>x+1$，

令 $x=\frac{1}{2022}$ 得：$\mathrm{e}^{\frac{1}{2022}}>\frac{2023}{2022}$，故 $\mathrm{e}>(\frac{2023}{2022})^{2022}$，则 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}<c=\left(\frac{2022}{2023}\right)^{2022}$，

综上 $b<a<c$.

故选：B

26.（2023·海南·高二统考期末）若 $a=\frac{1}{9}$，$b=\ln\frac{10}{9}$，$c=\frac{2}{19}$，则（　）

A．$a>c>b$　　B．$b>a>c$　　C．$c>b>a$　　D．$a>b>c$

【答案】D

【解析】对于 $a-b=\frac{1}{9}-\ln(1+\frac{1}{9})$，令 $y=x-\ln(1+x)$，$x\in(0,1)$，

所以 $y'=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$，即 $y=x-\ln(1+x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，

故 $y>0-\ln(1+0)=0$，即 $x>\ln(1+x)$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，所以 $a>b$；

由 $b=-\ln 0.9=-\ln(1-0.1)$，$c=\frac{0.2}{1.9}=\frac{2\times 0.1}{2-0.1}$，则 $b-c=-\ln(1-0.1)-\frac{2\times 0.1}{2-0.1}$，

令 $f(x)=-\ln(1-x)-\frac{2x}{2-x}=2+\frac{4}{x-2}-\ln(1-x)$，且 $0<x<1$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x^2}{(1-x)(x-2)^2}>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，

所以 $f(0.1)>f(0)=2+\frac{4}{0-2}-\ln(1-0)=0$，即 $b>c$.

综上，$a>b>c$.

故选：D

27.（2023 •重庆沙坪坝 •高三重庆一中校考开学考试）已知实数 a,b,c 满足：$a=3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}},b=\frac{1}{2}\ln 3,c=4-2\sqrt{3}$，则（　）

A．$a>b>c$　　B．$b>c>a$　　C．$b>a>c$　　D．$c>a>b$

【答案】A

【解析】令 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，$x>1$，

故 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

故 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)>f(1)=0$，即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$，$x>1$，

所以 $\ln\sqrt{3}>\frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 3>4-2\sqrt{3}$，$b>c$，

令 $g(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t$，$t>1$，

则 $g'(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}-1=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

故 $g(t)<g(1)=0$，所以 $2\ln t<t-\frac{1}{t}$，

设 $x_1>x_2>0$，则 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}>1$，

故 $2\ln\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}<\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$，所以 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$，

即 $\ln x_1-\ln x_2<\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$，由于 $x_1-x_2>0$， $\ln x_1-\ln x_2>0$，

故 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}$，取 $x_1=\sqrt{3},x_2=1$ 得： $\frac{\sqrt{3}-1}{\ln\sqrt{3}}>\sqrt[4]{3}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 3<3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}$.

所以 $a>b>c$.

故选：A

题型 05 数形结合

28.（2023•河南•校联考模拟预测）已知 $a=\ln\pi,b=\log_3\pi,c=\sqrt{\pi}\ln 2$，则 a,b,c 的大小关系是（　）

A． $b<a<c$　　B． $a<b<c$　　C． $c<b<a$　　D． $b<c<a$

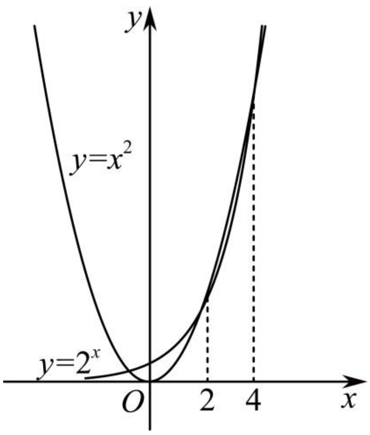
【答案】A

【解析】$\because e<3<\pi$， $\therefore a=\log_e\pi>\log_3\pi=b>\log_3 3=1$，即 $a>b>1$，

$\because a=\ln\pi=\ln\left(\sqrt{\pi}\right)^2$, $c=\sqrt{\pi}\ln 2=\ln 2^{\sqrt{\pi}}$，

下面比较 $\left(\sqrt{\pi}\right)^2$ 与 $2^{\sqrt{\pi}}$ 的大小，构造函数 $y=x^2$ 与 $y=2^x$，

由指数函数 $y=2^x$ 与幂函数 $y=x^2$ 的图像与单调性可知，



当 $x\in(0,2)$ 时， $x^2<2^x$；当 $x\in(2,4)$ 时， $x^2>2^x$

由 $x=\sqrt{\pi}\in(0,2)$，故 $\left(\sqrt{\pi}\right)^2<2^{\sqrt{\pi}}$，故 $\ln\pi<\ln 2^{\sqrt{\pi}}$，即 $a<c$，

所以 $b<a<c$，

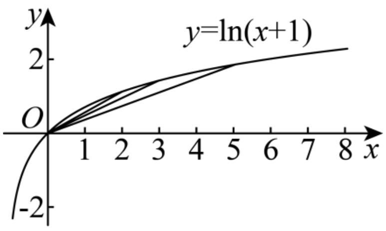
故选：A

29.（2023•全国•高三专题练习）设 $a=\frac{\ln 3}{2},b=\frac{\ln 4}{3},c=\frac{\ln 6}{5}$，则（　）

A． $a<b<c$　　B． $c<b<a$　　C． $c<a<b$　　D． $b<a<c$

【答案】B

【解析】构造斜率函数 $k=\dfrac{\ln(x+1)-\ln 1}{x-0}$ ，即 $y=\ln(x+1)$ 上点与 $(0,\ln 1)$ 所成直线的斜率，



由题设，构造的斜率都是正数，

由图象知：倾斜角越大，斜率越大，即原式的值越大，

可得：$\dfrac{\ln(5+1)-\ln 1}{5-0}<\dfrac{\ln(3+1)-\ln 1}{3-0}<\dfrac{\ln(2+1)-\ln 1}{2-0}$，即 $c<b<a$.

故选：B

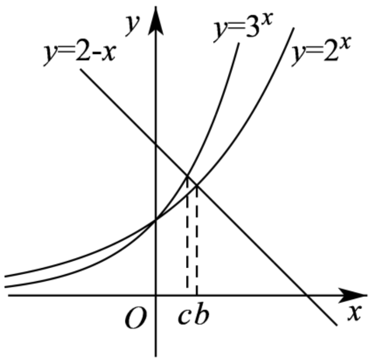
30.（2023·福建龙岩·高三统考期中）以 a、b、c 依次表示方程 $2^x+x=1$、$2^x+x=2$、$3^x+x=2$ 的根，则 a、b、c 的大小顺序为

A．$a<b<c$　　B．$a>b>c$

C．$a<c<b$　　D．$b>a>c$

【答案】C

【解析】因方程 $2^x+x=1$ 的解 $a=0$，故在同一平面直角坐标系 xOy 中画出函数 $y=2^x$，$y=3^x$ 及函数 $y=2-x$ 的图象，结合图象可以看出 $a<c<b$，故应选答案 C.



31.（2023·浙江杭州·高一杭十四中校考期末）设正实数 a，b，c 分别满足 $a\cdot e^a=b\cdot\ln b=c\cdot\lg c=1$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

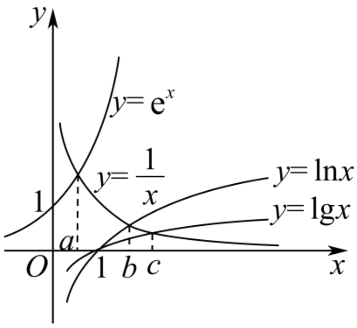
A．$a>b>c$　　B．$b>c>a$　　C．$c>b>a$　　D．$a>c>b$

【答案】C

【解析】由 $a\cdot e^a=b\cdot\ln b=c\cdot\lg c=1$，

得$\dfrac{1}{a}=e^{a}$，$\dfrac{1}{b}=\ln b$，$\dfrac{1}{c}=\ln c$，

分别作函数$y=e^{x}$，$y=\ln x$，$y=\lg x$图像，如图所示，



它们与函数$y=\dfrac{1}{x}$图像交点的横坐标分别为a，b，c，

有图像可得$a<b<c$，

故选：C.

32.（2023·北京·高一北京市十一学校校考期末）已知x_1，x_2，x_3满足$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_1}=\log_{\frac{1}{2}}x_1$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_2+1}=\log_{\frac{1}{2}}x_2$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_3}=\log_{\frac{1}{2}}x_3$，则$x_1$，$x_2$，$x_3$的大小关系为（　）

A．$x_1<x_2<x_3$　B．$x_2<x_3<x_1$　C．$x_1<x_3<x_2$　D．$x_2<x_1<x_3$

【答案】C

【解析】在同一平面直角坐标系内作出

$y=\log_{\frac{1}{2}}x$、$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$、$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$、$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$的图像

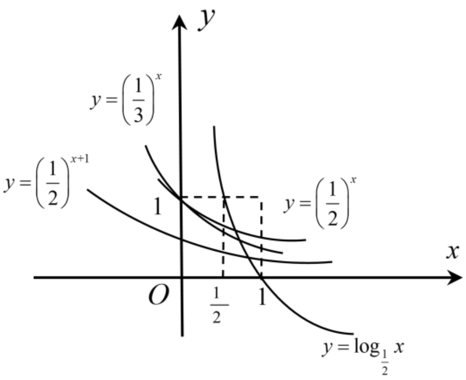
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$过点$(\dfrac{1}{2},1)$、$(1,0)$；$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$过点$(0,1)$、$(1,\dfrac{1}{2})$；

$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$过点$(0,1)$、$(1,\dfrac{1}{3})$；$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$过点$(0,\dfrac{1}{2})$、$(1,\dfrac{1}{4})$，

则$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$、$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$、$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$与$y=\log_{\frac{1}{2}}x$图像交点横坐标依次增大，

又$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$、$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$、$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$与$y=\log_{\frac{1}{2}}x$图像

交点横坐标分别为x_1、x_3、x_2，则$x_1<x_3<x_2$.



故选：C

33．（2023·宁夏银川·高三校考阶段练习）已知函数 $f\left(x\right)=\left|3^x-1\right|$，$a<b<c$，且 $f\left(a\right)>f\left(c\right)>f\left(b\right)$，则（　　）

A．$a<0$，$b<0$，$c<0$　　　　B．$a<0$，$b\geq 0$，$c>0$

C．$3^{-a}<3^c$　　　　D．$3^a+3^c<2$

【答案】D

【解析】令 $f\left(x\right)=\left|3^x-1\right|=1$，解得 $x=\log_3 2$，

画出 $f\left(x\right)=\left|3^x-1\right|$ 的图象如下图所示，

由于 $a<b<c$，且 $f\left(a\right)>f\left(c\right)>f\left(b\right)$，

由图可知：$a<0$，$0<c<\log_3 2$，b 的值可正可负也可为 0，所以 AB 选项错误.

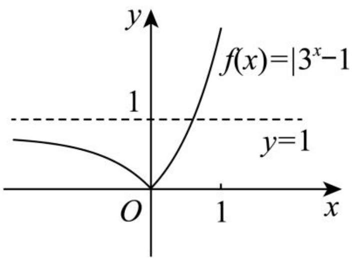
当 $a=-2,b=0,c=\frac{1}{2}$ 时，$f\left(-2\right)=\left|\frac{1}{9}-1\right|=\frac{8}{9},f\left(0\right)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-1$,

满足 $f\left(a\right)>f\left(c\right)>f\left(b\right)$，$3^{-a}=3^2=9>3^{\frac{1}{2}}$，所以 C 选项错误.

$f\left(a\right)=\left|3^a-1\right|=1-3^a,f\left(c\right)=\left|3^c-1\right|=3^c-1$，

$f\left(a\right)>f\left(c\right),1-3^a>3^c-1$，所以 $3^a+3^c<2$，D 选项正确.

故选：D



34．（2023·江苏南通·高三统考期中）已知正实数 a，b，c 满足 $e^c+e^{-2a}=e^a+e^{-c}$，$b=\log_2 3+\log_8 6$，

$c+\log_2 c=2$，则 a，b，c 的大小关系为(　)

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

【答案】B

【解析】$e^c+e^{-2a}=e^a+e^{-c}\Rightarrow e^c-e^{-c}=e^a-e^{-2a}$，

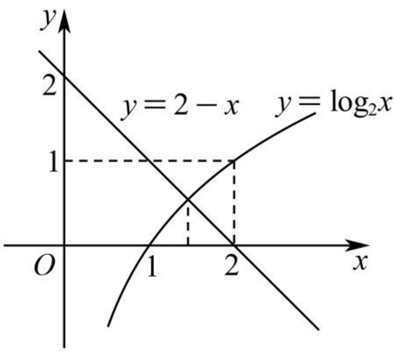
故令 $f(x)=e^x-e^{-x}$，则 $f(c)=e^c-e^{-c}$，$f(a)=e^a-e^{-a}$.

易知 $y=-e^{-x}=-\dfrac{1}{e^x}$ 和 $y=e^x$ 均为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数.

$\because e^{-2a}<e^{-a}$，故由题可知，$e^c-e^{-c}=e^a-e^{-2a}>e^a-e^{-a}$，即 $f(c)>f(a)$，则 $c>a>0$.

易知 $b=\log_2 3+\log_2\sqrt[3]{6}=\log_2 3\sqrt[3]{6}>2$，$\log_2 c=2-c$，

作出函数 $y=\log_2 x$ 与函数 $y=2-x$ 的图象，如图所示，



则两图象交点横坐标在 $(1,2)$ 内，即 $1<c<2$，

$\therefore c<b$，

$\therefore a<c<b$.

故选：B.

35.（2023·河南·统考一模）已知 $a=e^{\pi},b=\pi^{e},c=\left(\sqrt{2}\right)^{e\pi}$，则这三个数的大小关系为（　）

A．$c<b<a$　　B．$b<c<a$　　C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

【答案】A

【解析】令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2},(x>0)$，

由 $f¢(x)>0$，解得 $0<x<e$，由 $f'(x)<0$，解得 $x>e$，

所以 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},(x>0)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减；

因为 $\pi>e$，