北京师大二附中 2023-2024 学年度第一学期期中考试

高三数学试卷

一、单选题（共 10 小题；共 40 分）

1. 已知集合 $A=\{x|-2\le x\le 3\}$，$B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup B=$（）

A. $[-2,3]$ B. $[0,3]$ C. $(0,+\infty)$ D. $[-2,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用并集的定义可求得集合 $A\cup B$.

【详解】因为集合 $A=\{x|-2\le x\le 3\}$，$B=\{x|x>0\}$，因此，$A\cup B=[-2,+\infty)$.

故选：D.

2. 复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$ 的共轭复数 $\overline{z}=$（）

A. $1-\mathrm{i}$ B. $1+\mathrm{i}$

C. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ D. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】

【分析】先利用复数的除法得到复数 z，再求共轭复数.

【详解】解：因为复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，

所以 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}=1+\mathrm{i}$，

故选：B

3. 已知向量 $\vec{a}=(m,1),\vec{b}=(-1,2)$. 若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $m=$（）

A. 2 B. 1 C. -1 D. $-\dfrac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】由两向量共线直接列方程求解即可

【详解】因为$\vec{a}=(m,1),\vec{b}=(-1,2)$，且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，

所以$\frac{m}{-1}=\frac{1}{2}$，解得$m=-\frac{1}{2}$，

故选：D

4. 下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递减的是（）

A. $f(x)=\sin x$ B. $f(x)=2^{|x|}$

C. $f(x)=x^3+x$ D. $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性，基本初等函数的单调性，逐项判断即可.

【详解】对于A，函数$f(x)=\sin x$为奇函数，但在定义域$\mathbf{R}$上函数不单调，故A不符合；

对于B，$f(x)=2^{|x|}$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=2^{|-x|}=2^{|x|}=f(x)$，则$f(x)=2^{|x|}$为偶函数，故B不符合；

对于C，$f(x)=x^3+x$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=-x^3-x=-f(x)$，则$f(x)=x^3+x$为奇函数，又函数$y=x^3, y=x$在$\mathbf{R}$上均为增函数，故$f(x)=x^3+x$在$\mathbf{R}$上为增函数，故C不符合；

对于D，$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=-f(x)$，则$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$为奇函数，又函数$y=e^{-x}$在$\mathbf{R}$上为减函数，$y=e^{x}$在$\mathbf{R}$上为增函数，故$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$在$\mathbf{R}$上为减函数，故D符合.

故选：D.

5. 记$\cos(-80^0)=k$，那么$\tan 100^0=$

A. $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ B. $-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ C. $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ D. $-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

【答案】B

【解析】

【详解】Q $\cos\left(-80^0\right)=k$,

$\therefore \cos 80^\circ=k$,从而$\sin 80^\circ=\sqrt{1-\cos^2 80^\circ}=\sqrt{1-k^2}$，

$\therefore \tan 80^\circ = \dfrac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} = \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$，

那么 $\tan 100^\circ = \tan(180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ = -\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$，

故选 B．

6. 已知两点 $A(-2,0)$， $B(0,2)$，点 C 是圆 $x^2+y^2-4x+4y+6=0$ 上任意一点，则 $\triangle ABC$ 面积的最小值是（）

A. 8B. 6C. $3+\sqrt{2}$ D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】求出圆心坐标和半径，可得圆心到直线的距离，求得圆上的点到直线 AB 距离的最小值，从而得三角形面积最小值．

【详解】解：圆 $x^2+y^2-4x+4y+6=0$ 即 $(x-2)^2+(y+2)^2=2$，

$\therefore$ 圆心 $(2,-2)$，半径是 $r=\sqrt{2}$．

直线 AB 的方程为 $x-y+2=0$，

圆心到直线 AB 的距离为 $\dfrac{|2+2+2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，

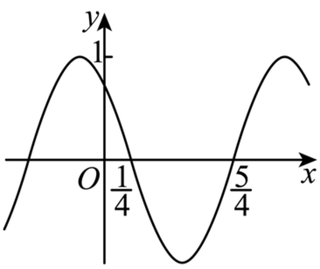
直线 AB 和圆相离，

点 C 到直线 AB 距离的最小值是 $3\sqrt{2}-r=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，

$\triangle ABC$ 的面积的最小值为 $2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=4$

故选：D．

7. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为



A. $(k\pi-\frac{1}{4},k\pi+\frac{3}{4}),k\in Z$ B. $(2k\pi-\frac{1}{4},2k\pi+\frac{3}{4}),k\in Z$

C. $(k-\frac{1}{4},k+\frac{3}{4}),k\in Z$ D. $(2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}),k\in Z$

【答案】D

【解析】

【详解】由五点作图知，$\begin{cases}\frac{1}{4}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}\\ \frac{5}{4}\omega+\varphi=\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\omega=\pi$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})$，令 $2k\pi<\pi x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\pi,k\in Z$，解得 $2k-\frac{1}{4}<x<2k+\frac{3}{4}$，$k\in Z$，故单调减区间为（$2k-\frac{1}{4}$，$2k+\frac{3}{4}$），$k\in Z$，故选 D.

考点：三角函数图像与性质

8. 若 $x>0,y>0$，则“$x+2y=2\sqrt{2xy}$”的一个充分不必要条件是

A. $x=y$ B. $x=2y$

C. $x=2$ 且 $y=1$ D. $x=y$ 或 $y=1$

【答案】C

【解析】

【详解】∵ $x>0,y>0$，

∴ $x+2y\geq 2\sqrt{2xy}$，当且仅当 $x=2y$ 时取等号.

故“$x=2$, 且 $y=1$”是“$x+2y=2\sqrt{2xy}$”的充分不必要条件. 选 C.

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则下列结论正确的是（）

A. $f(-x)-f(x)=0$

B. $f'(x)<0$

C. 若 $0<x_1<x_2$，则 $x_1f\left(x_2\right)>x_2f\left(x_1\right)$

D. 若 $0<x_1<x_2$，则 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>f\left(x_1+x_2\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性概念判断 A，根据导函数值域判断 B，利用特例法排除选项 C，利用指数运算及指数函数的单调性结合不等式的性质即可判断 D.

【详解】对于 A，易知 $x\in\mathrm{R}$，$f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^x+1}=\dfrac{2^x-1}{2(2^x+1)}$，

所以 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2(2^{-x}+1)}=\dfrac{1-2^x}{2(1+2^x)}$，所以 $f(-x)=-f(x)$，错误；

对于 B，因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^x+1}$，所以 $f'(x)=\dfrac{2^x\ln 2}{(2^x+1)^2}$，

由 $\ln 2>0$ 知 $f'(x)>0$，错误；

对于 C，$f(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2+1}=\dfrac{1}{6}$，$f(2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2+1}=\dfrac{3}{10}$，

虽然 $0<1<2$，但是 $1\times f(2)<2\times f(1)$，

故对 $0<x_1<x_2$，$x_1 f(x_2)>x_2 f(x_1)$ 不恒成立，错误；

对于 D，函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^x+1}=\dfrac{2^x-1}{2\cdot 2^x+2}$，

则 $f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{2^{x_1}-1}{2(2^{x_1}+1)}+\dfrac{2^{x_2}-1}{2(2^{x_2}+1)}$，$f(x_1+x_2)=\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2(2^{x_1+x_2}+1)}$，

因为 $x_2>x_1>0$，所以 $2^{x_2}>2^{x_1}>1$，所以 $2^{x_1}(2^{x_2}-1)>2^{x_2}-1>0$，

所以 $2^{x_1+x_2}+1>2^{x_1}+2^{x_2}$，所以 $2\cdot 2^{x_1+x_2}+2>2^{x_1+x_2}+2^{x_1}+2^{x_2}+1$，

即 $2(2^{x_1+x_2}+1)>(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)$，所以 $\dfrac{2}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}+1}$，

所以 $\dfrac{2(2^{x_1+x_2}-1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}+1}$，

又 $\left(2^{x_1}-1\right)\left(2^{x_2}+1\right)+\left(2^{x_2}-1\right)\left(2^{x_1}+1\right)=2\left(2^{x_1+x_2}-1\right)$，

所以 $\dfrac{(2^{x_1}-1)(2^{x_2}+1)+(2^{x_2}-1)(2^{x_1}+1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}+1}$，

所以 $\dfrac{(2^{x_1}-1)(2^{x_2}+1)+(2^{x_2}-1)(2^{x_1}+1)}{2(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2(2^{x_1+x_2}+1)}$，

即 $\dfrac{2^{x_1}-1}{2(2^{x_1}+1)}+\dfrac{2^{x_2}-1}{2(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2(2^{x_1+x_2}+1)}$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)>f(x_1+x_2)$，正确.

故选：D

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若对任意的正整数 n，总存在正整数 m，使得 $S_n=a_m$，下列正确命题的个数是（）

①$\{a_n\}$ 可能为等差数列；

②$\{a_n\}$ 可能为等比数列；

③$a_i(i\geq 2)$ 均能写成$\{a_n\}$ 的两项之差；

④对任意$n\in\mathbf{N}$， $n\geq 1$． 总存在$m\in\mathrm{N}$， $m\geq 1$． 使得$a_n=S_m$．

A. 0B. 1C. 2D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】对于①, 取$a_n=n$, 可知①正确; 对于②, 当$\{a_n\}$的公比$q=1, n\geq 2$时, $S_n=a_n$不存在正整数m, 当$q\neq 1$时, $S_n=a_n$即$1+q+\text{L}\ +q^{n-1}=q^{m-1}$无有理数根, 可知②错误; 对于③, 根据$a_n=S_n-S_{n-1}\left(n\geq 2\right)$, 可知③正确; 对于④取数列$a_n=n$, 显然不存在$m$,使得$S_m=a_2=2$,故④不正确.

【详解】对于①，取等差数列$a_n=n$, 易验证其满足要求, ①正确. 对于②, 若$\{a_n\}$为等比数列, 设公比为q, 显然$q=1$不满足要求,

考虑$q\neq 1$的情况, 依题意, 应有$S_{n+1}=a_{m_1}, S_{2n+2}=a_{m_2}$,

即$1+q+q^2+\text{L}\ +q^n=q^{m_1}$

$1+q+q^2+\text{L}\ +q^{2n+1}=\left(1+q+q^2+\text{L}\ +q^n\right)\left(1+q^{n+1}\right)=q^{m_2}$,

两式相除, 得$1+q^{n+1}=q^{m_2-m_1}$.

若$|q|>1$, 则取n为奇数, 那么$q^{n+1}>0$, 所以$q^{m_2-m_1}\ldots |q|^{n+2}$,

所以$1=q^{m_2-m_1}-q^{n+1}\ldots |q|^{n+2}-q^{n+1}=|q|^{n+1}\left(|q|-1\right)$.

当n足够大时, 显然不成立;

若$|q|<1$, 则$\left|q^{m_2-m_1}\right|\in\left(0,|q|\right]\cup\left[\frac{1}{|q|},+\infty\right)$,

因为$|q|<1<\dfrac{1}{|q|}$，所以当足够大时，

可以使$1+q^{n+1}\in\left(|q|,\dfrac{1}{|q|}\right)$，故也不成立. 从而知②错误；对于选项③，取$n=2$，则 $a_1+a_2=a_m$，所以

$a_1=a_m-a_2$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=a_{m_1}-a_{m_2}$，故③正确. 对于选项④，取数列$a_n=n$，显然不存在$m$，使得

$S_m=a_2=2$，故④错误. 故选：C

二、填空题（共 5 小题：共 25 分）

11. 函数$f(x)=\log_2(1-x)+\sqrt{x}$的定义域是____________.

【答案】$[0,1)$

【解析】

【分析】根据对数型函数的定义域，结合二次根式的性质进行求解即可.

【详解】由题意可知：$\begin{cases}1-x>0\\x\geq 0\end{cases}\Rightarrow 0\leq x<1$，

所以该函数的定义域为$[0,1)$，

故答案为：$[0,1)$

12. 已知$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$|\overrightarrow{OA}|=5$，$|\overrightarrow{OB}|=12$，$\angle AOB=90^\circ$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$________.

【答案】13

【解析】

【分析】根据向量减法几何意义，向量模的定义，结合勾股定理计算.

【详解】由题意$\triangle AOB$是直角三角形，$|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

故答案为：13.

13. 能够说明“$e^x>x+1$恒成立”是假命题的一个x的值为______.

【答案】0

【解析】

【分析】不等式$e^x>x+1$恒成立等价于$e^x-x-1>0$恒成立，因此可构造函数$f(x)=e^x-x-1$

，求其最值，从而找到命题不成立的具体值.

【详解】设函数 $f(x)=e^{x}-x-1$，则有

$f^{'}(x)=e^{x}-1$,

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，有 $f^{'}(x)<0$， $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，有 $f^{'}(x)>0$， $f(x)$ 单调递增；

故 $x=0$ 为最小值点，有 $f(x)\geq f(0)=0$.

因此，当 $x=0$ 时，命题不能成立．故能够说明“ $e^{x}>x+1$ 恒成立”是假命题的一个 x 的值为 0

【点睛】说明一个命题为假命题，只需举出一个反例即可，怎样找到符合条件的反例是关键．在处理时常要假设命题为真，进行推理，找出命题必备条件.

14. 《九章算术》是中国古代张苍、耿寿昌所撰写的一部数学专著，被誉为人类科学史上应用数学的最早巅峰.全书分为九章，卷第六“均输”有一问题：“今有竹九节下三节容量四升，上四节容量三升问中间二节欲均容各多少?”其意思为：“今有竹 9 节，下 3 节容量 4 升，上 4 节容量 3 升使中间两节也均匀变化，每节容量是多少?”这一问题中从下部算起第 5 节容量是________________升.(结果保留分数)

【答案】 $\dfrac{67}{66}$

【解析】

【分析】记从下部算起第 n 节的容量为 a_n，可知数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列，利用等差数列通项公式可构造关于 a_1,d 的方程组，解方程组求得 a_1,d 后，利用通项公式可求得 a_5.

【详解】记从下部算起第 n 节的容量为 a_n，

由题意可知：数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列，设其公差为 d，

则 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=4\\ a_6+a_7+a_8+a_9=4a_1+26d=3\end{cases}$，解得： $\begin{cases}a_1=\dfrac{95}{66}\\ d=-\dfrac{7}{66}\end{cases}$，

$\therefore a_5=a_1+4d=\dfrac{67}{66}$，即从下部算起第 5 节容量是 $\dfrac{67}{66}$ 升.

故答案为： $\dfrac{67}{66}$.

15. 设 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x<-a,\\ \sqrt{a^2-x^2},-a\le x\le a,\\ -\sqrt{x}-1,x>a.\end{cases}$，给出下列四个结论：

①$f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $a\ge1$ 时，$f(x)$ 存在最大值；

③设 $M\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)\left(x_1\le a\right),N\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)\left(x_2>a\right)$，则 $|MN|>1$；

④设 $P\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)\left(x_3<-a\right),Q\left(x_4,f\left(x_4\right)\right)\left(x_4\ge-a\right)$．若 $|PQ|$ 存在最小值，则 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

其中所有正确结论的序号是____________.

【答案】②③

【解析】

【分析】先分析 $f\left(x\right)$ 的图像，再逐一分析各结论；对于①，取 $a=\frac{1}{2}$，结合图像即可判断；对于②，分段讨论 $f\left(x\right)$ 的取值范围，从而得以判断；对于③，结合图像可知 $\left|MN\right|$ 的范围；对于④，取 $a=\frac{4}{5}$，结合图像可知此时 $\left|PQ\right|$ 存在最小值，从而得以判断.

【详解】依题意，$a>0$，

当 $x<-a$ 时，$f\left(x\right)=x+2$，易知其图像为一条端点取不到值的单调递增的射线；

当 $-a\le x\le a$ 时，$f\left(x\right)=\sqrt{a^2-x^2}$，易知其图像是，圆心为 $\left(0,0\right)$，半径为 a 的圆在 x 轴上方的图像（即半圆）；

当 $x>a$ 时，$f\left(x\right)=-\sqrt{x}-1$，易知其图像是一条端点取不到值的单调递减的曲线；

对于①，取 $a=\frac{1}{2}$，则 $f\left(x\right)$ 的图像如下，