两角和与差的正弦、余弦、正切公式

第1课时

一、知识梳理

在研究三角函数时，我们还常常遇到这样的问题：已知任意角α、β的三角函数值，如何求$\alpha+\beta$、 $\alpha-\beta$或 2α的三角函数值？

下面我们先引出平面内两点间的距离公式，并从两角和的余弦公式谈起.

一、知识梳理

在坐标平面内的任意两点$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,

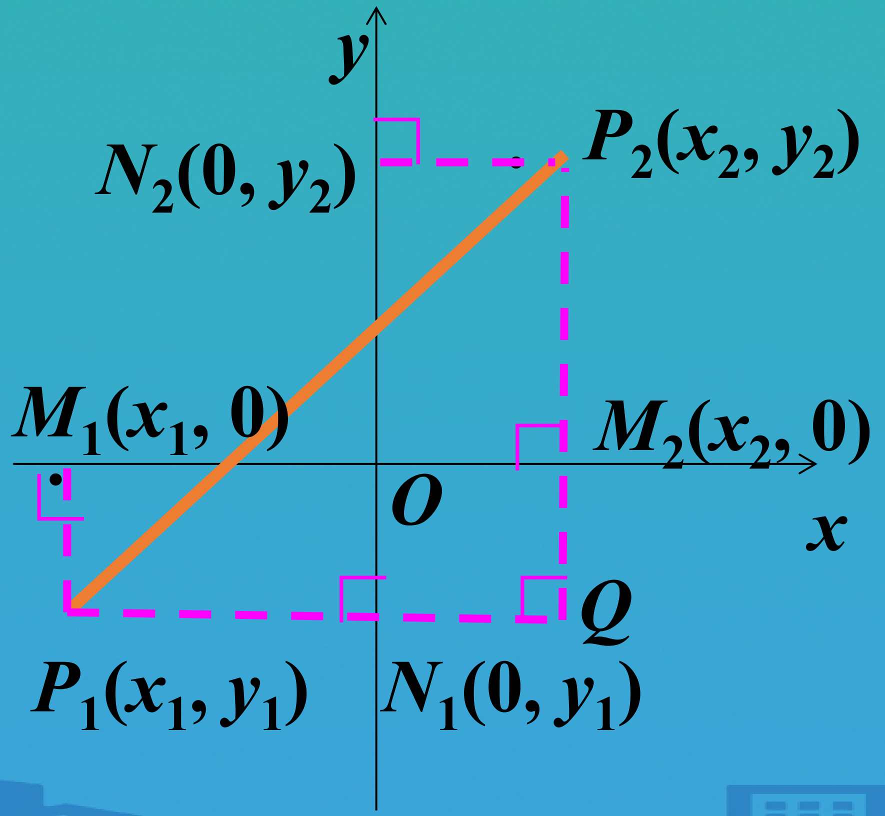
$P_1Q=M_1M_2=|x_1-x_2|$，$QP_2=N_1N_2=|y_1-y_2|$，

由勾股定理，可得

$P_1P_2^2=P_1Q^2+QP_2^2$

$=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2$

$=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$,



由此得到平面内$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

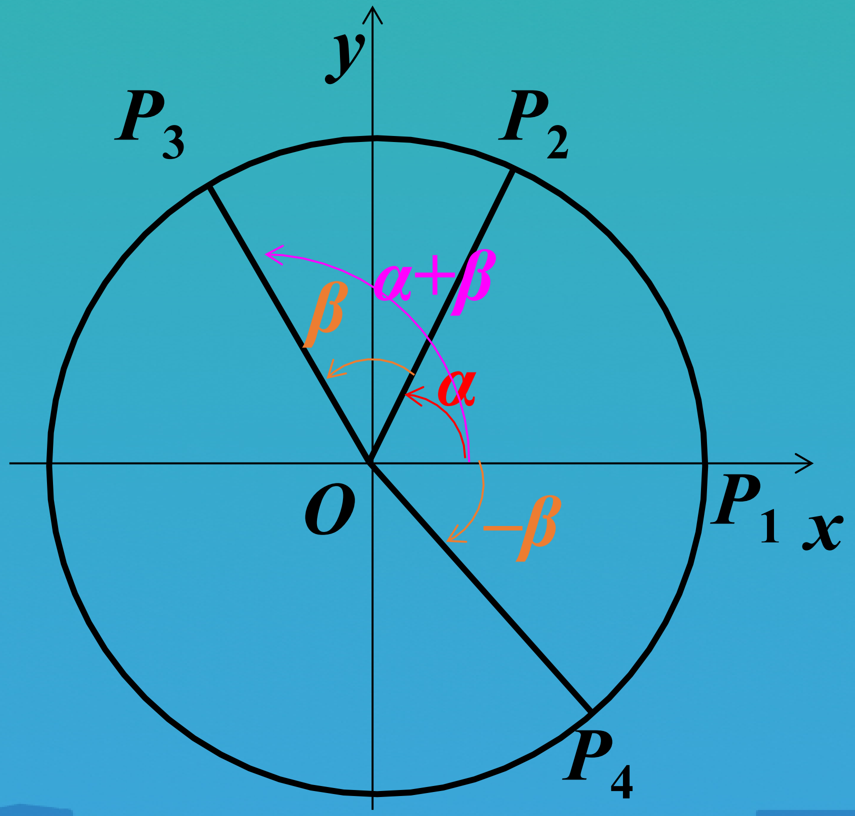
两点间距离公式：

$P_1P_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

一、知识梳理

接下来，我们继续考虑如何运用两点间的距离公式，把两角和的余弦$\cos(\alpha+\beta)$用α、β的三角函数来表示的问题.

如图，在直角坐标平面xOy内作单位圆O，并作出角α、β和$-\beta$，



各点坐标：

$P_1(1, 0)$，　　$P_2(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，

$P_3(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$，

$P_4(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$，

一、知识梳理

各点坐标：$P_1(1, 0)$，$P_2(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，

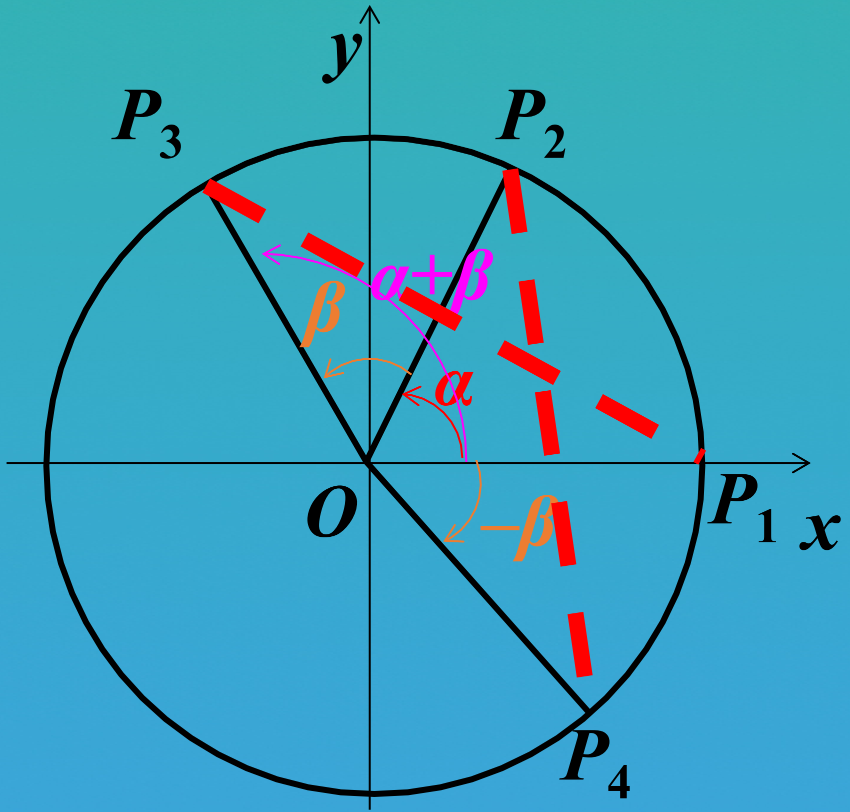
$P_3(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$，

$P_4(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$，

由$P_1P_3=P_2P_4$及两点间距离公式，得

$$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)$$

$$=[\cos(-\beta)-\cos\alpha]^2+[\sin(-\beta)-\sin\alpha]^2,$$



一、知识梳理

$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)$

$=[\cos(-\beta)-\cos\alpha]^2+[\sin(-\beta)-\sin\alpha]^2$,

$\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)+1+\sin^2(\alpha+\beta)$

$=\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta$,

$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$,

$\therefore$ $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,}$ （$C_{(\alpha+\beta)}$）

一、知识梳理

$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$　$(C_{(\alpha+\beta)})$

这个公式对于任意角α、β都成立.

例如$\cos(62°+59°)$

$=\cos62°\cos59°-\sin62°\sin59°$;

$\cos(113°+27°)$

$=\cos113°\cos27°-\sin113°\sin27°$;

$\cos[\alpha+(-\beta)]$

$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$,

一、知识梳理

$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ $(C_{(\alpha+\beta)})$

$\cos[\alpha+(-\beta)]$

$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$，

$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.}$ $(C_{(\alpha-\beta)})$

例如 $\cos(113°-27°)$

$=\cos113°\cos27°+\sin113°\sin27°$;

$\cos(113°+27°)$

$=\cos113°\cos27°+\sin113°\sin27°$;

一、知识梳理

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.}\qquad (C_{(\alpha-\beta)})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha,$$

即$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$,

这里，等号两边的角的和为$\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

一、知识梳理

即$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$，

这里，等号两边的角的和为$\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$；

这就是说，诱导公式

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha,$$

当α为任意角时仍然成立.

一、知识梳理

$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$，$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

运用上述公式，得

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]$$
$$=\cos[(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta)]$$
$$=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

即 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

一、知识梳理

$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$　$(S_{(\alpha+\beta)})$

在上式中用$-\beta$代替β，得

$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,}$　$(S_{(\alpha-\beta)})$

当　$\cos(\alpha+\beta)\neq 0$　时，有

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

若 $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$，得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

一、知识梳理

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.}\qquad (T_{(\alpha+\beta)})$$

$$\because\ \tan(-\beta)=\frac{\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}=-\tan\beta,$$

$$\therefore\ \boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.}\qquad (T_{(\alpha-\beta)})$$

公式$S_{(\alpha+\beta)}$、$C_{(\alpha+\beta)}$、$T_{(\alpha+\beta)}$给出了任意角α、β的三角函数值（这里指正弦、余弦或正切）与其和角$\alpha+\beta$的三角函数值之间的关系. 为方便起见，我们把这三个公式都叫作和角公式.

一、知识梳理

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.}\qquad (T_{(\alpha+\beta)})$$

$$\because\ \tan(-\beta)=\frac{\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}=-\tan\beta,$$

$$\therefore\ \boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.}\qquad (T_{(\alpha-\beta)})$$

类似地，公式$S_{(\alpha-\beta)}$、 $C_{(\alpha-\beta)}$、 $T_{(\alpha-\beta)}$都叫作差角公式.