

两角和与差的正弦、余弦、正切公式

第1课时



一、知识梳理

在研究三角函数时，我们还常常遇到这样的问题：已知任意角 α 、 β 的三角函数值，如何求 $\alpha+\beta$ 、 $\alpha-\beta$ 或 2α 的三角函数值？

下面我们先引出平面内两点间的距离公式，并从两角和的余弦公式谈起.



一、知识梳理

在坐标平面内的任意两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$,

$P_1Q=M_1M_2=|x_1-x_2|$, $QP_2=N_1N_2=|y_1-y_2|$,

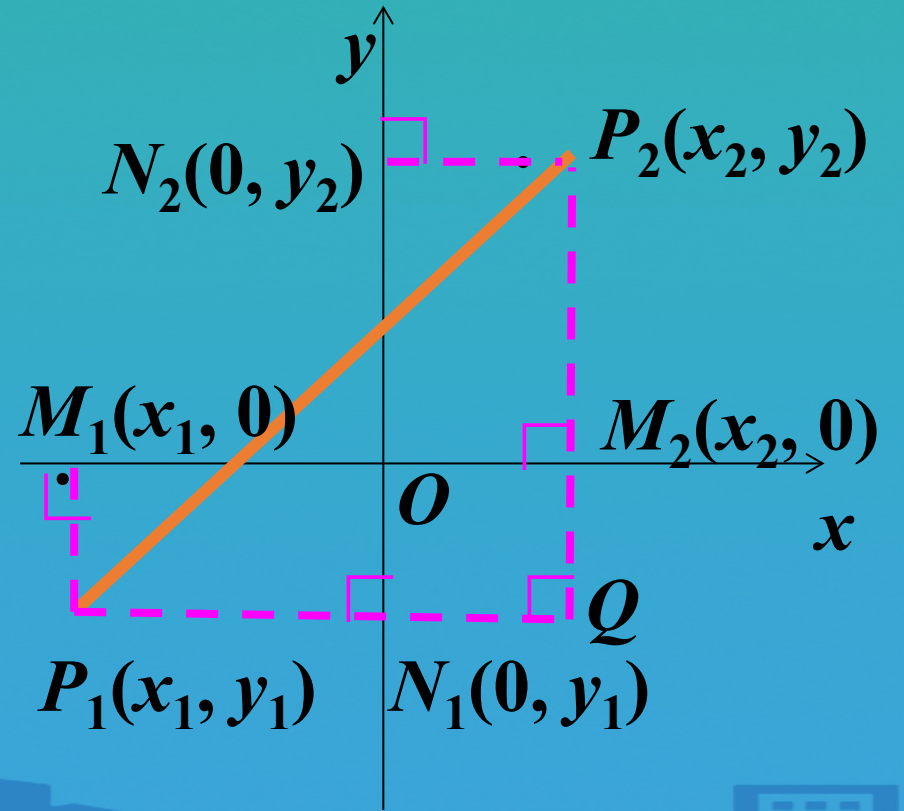
由勾股定理, 可得

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= P_1Q^2 + QP_2^2 \\ &= |x_1-x_2|^2 + |y_1-y_2|^2 \\ &= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2, \end{aligned}$$

由此得到平面内 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$

两点间距离公式:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$



一、知识梳理

接下来，我们继续考虑如何运用两点间的距离公式，把两角和的余弦 $\cos(\alpha+\beta)$ 用 α 、 β 的三角函数来表示的问题。

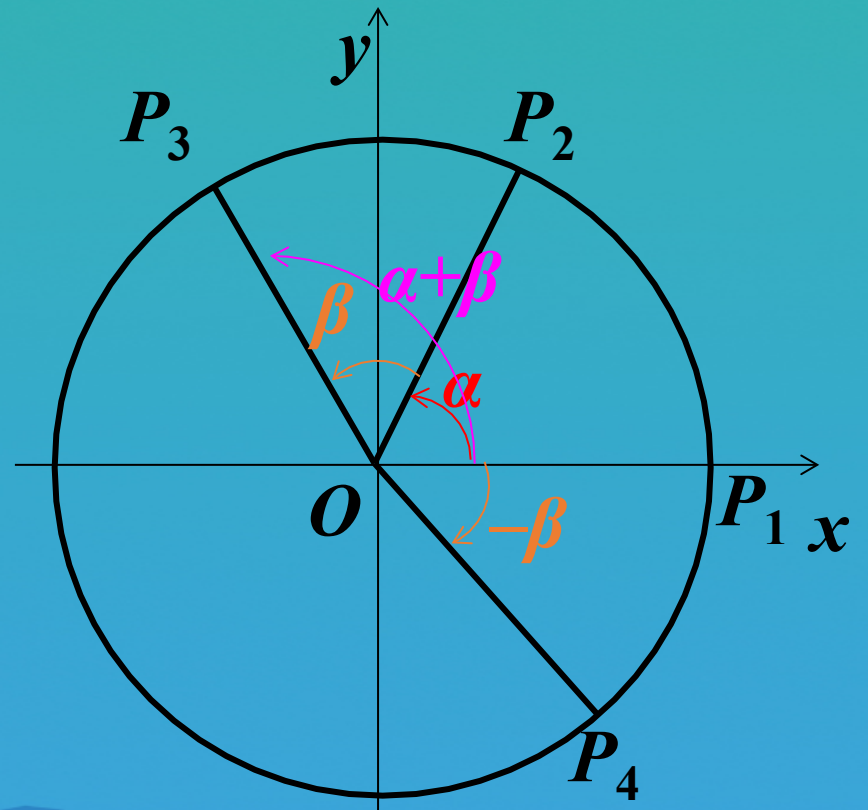
如图，在直角坐标平面 xOy 内作单位圆 O ，并作出角 α 、 β 和 $-\beta$ ，

各点坐标：

$$P_1(1, 0), \quad P_2(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

$$P_3(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)),$$

$$P_4(\cos(-\beta), \sin(-\beta)),$$



一、知识梳理

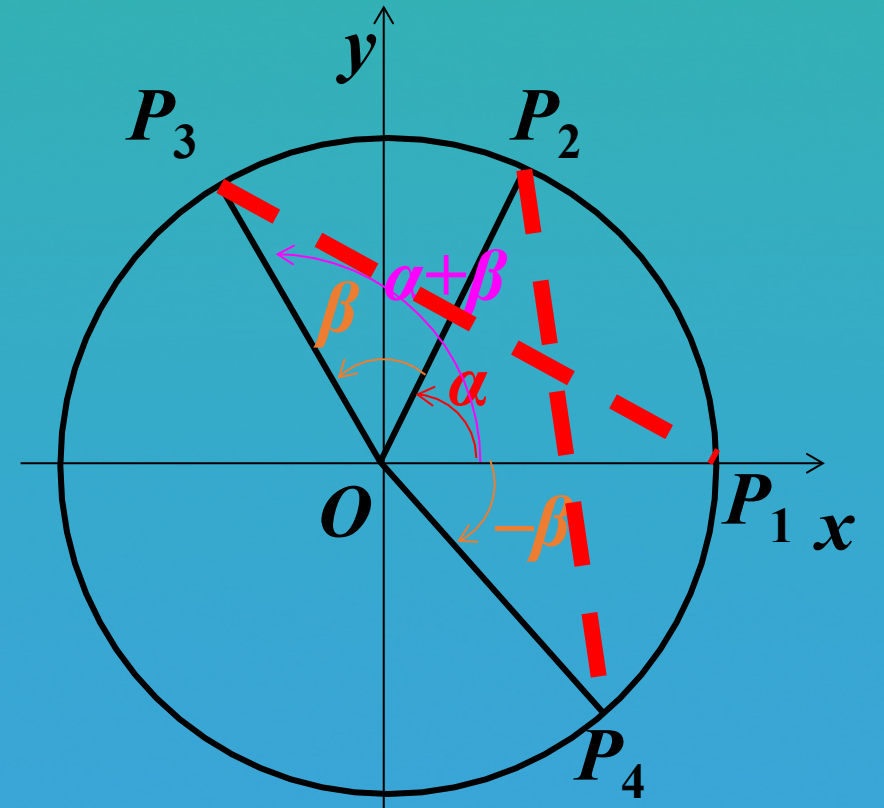
各点坐标： $P_1(1, 0)$, $P_2(\cos \alpha, \sin \alpha)$,

$P_3(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$,

$P_4(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$,

由 $P_1P_3 = P_2P_4$ 及两点间距离公式，得

$$\begin{aligned} & [\cos(\alpha+\beta)-1]^2 + \sin^2(\alpha+\beta) \\ &= [\cos(-\beta)-\cos \alpha]^2 + [\sin(-\beta)-\sin \alpha]^2, \end{aligned}$$



一、知识梳理

$$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)$$

$$=[\cos(-\beta)-\cos \alpha]^2 +[\sin(-\beta)-\sin \alpha]^2,$$

$$\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)+1+\sin^2(\alpha+\beta)$$

$$=\cos^2\beta-2\cos \alpha\cos \beta+\cos^2\alpha + \sin^2\alpha+2\sin \alpha\sin \beta+\sin^2 \beta,$$

$$2-2\cos(\alpha+\beta) =2-2\cos \alpha\cos \beta+2\sin \alpha\sin \beta,$$

$$\therefore \boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos \alpha\cos \beta-\sin \alpha\sin \beta}, \quad (C_{(\alpha+\beta)})$$



一、知识梳理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (C_{(\alpha+\beta)})$$

这个公式对于任意角 α 、 β 都成立.

例如 $\cos(62^\circ+59^\circ)$

$$=\cos 62^\circ\cos 59^\circ-\sin 62^\circ\sin 59^\circ;$$

$$\cos(113^\circ+27^\circ)$$

$$=\cos 113^\circ\cos 27^\circ-\sin 113^\circ\sin 27^\circ;$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]$$

$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),$$

一、知识梳理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (C_{(\alpha+\beta)})$$

$$\begin{aligned}\cos[\alpha+(-\beta)] \\ =\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad (C_{(\alpha-\beta)})$$

$$\begin{aligned}\text{例如 } \cos(113^\circ-27^\circ) \\ =\cos113^\circ\cos27^\circ+\sin113^\circ\sin27^\circ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(113^\circ+27^\circ) \\ =\cos113^\circ\cos27^\circ+\sin113^\circ\sin27^\circ;\end{aligned}$$

一、知识梳理

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (C_{(\alpha-\beta)})$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \sin \alpha, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$$

这里，等号两边的角的和为 $\frac{\pi}{2}$ ，

$$\therefore \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

一、知识梳理

即 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$

这里，等号两边的角的和为 $\frac{\pi}{2},$

$\therefore \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$

这就是说，诱导公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$

当 α 为任意角时仍然成立.

一、知识梳理

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

运用上述公式，得

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

即 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$

一、知识梳理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta \quad (S_{(\alpha+\beta)})$$

在上式中用 $-\beta$ 代替 β , 得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin \alpha \cos \beta -\cos \alpha \sin \beta, \quad (S_{(\alpha-\beta)})$$

当 $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$ 时, 有

$$\tan (\alpha+\beta)=\frac{\sin (\alpha+\beta)}{\cos (\alpha+\beta)}=\frac{\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta}$$

若 $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$, 得

$$\tan (\alpha+\beta)=\frac{\tan \alpha+\tan \beta}{1-\tan \alpha \tan \beta}.$$

一、知识梳理

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (T_{(\alpha+\beta)})$$

$$\therefore \tan(-\beta) = \frac{\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} = -\tan \beta,$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (T_{(\alpha-\beta)})$$

公式 $S_{(\alpha+\beta)}$ 、 $C_{(\alpha+\beta)}$ 、 $T_{(\alpha+\beta)}$ 给出了任意角 α 、 β 的三角函数值（这里指正弦、余弦或正切）与其和角 $\alpha+\beta$ 的三角函数值之间的关系。为方便起见，我们把这三个公式都叫作和角公式。

一、知识梳理

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (T_{(\alpha+\beta)})$$

$$\therefore \tan(-\beta) = \frac{\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} = -\tan \beta,$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (T_{(\alpha-\beta)})$$

类似地，公式 $S_{(\alpha-\beta)}$ 、 $C_{(\alpha-\beta)}$ 、 $T_{(\alpha-\beta)}$ 都叫作差角公式。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/238122106045006051>