立信会计学院

数统系

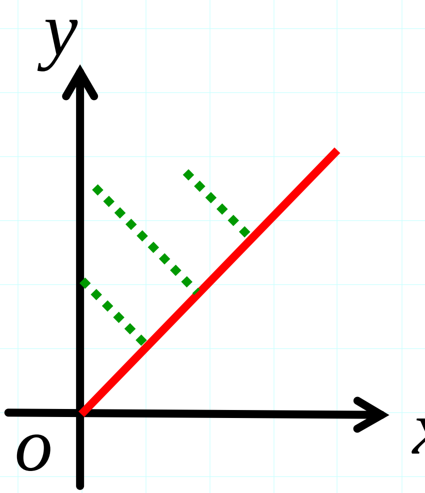
概率论与数理统计

13

Jinsw

＊例 9： 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

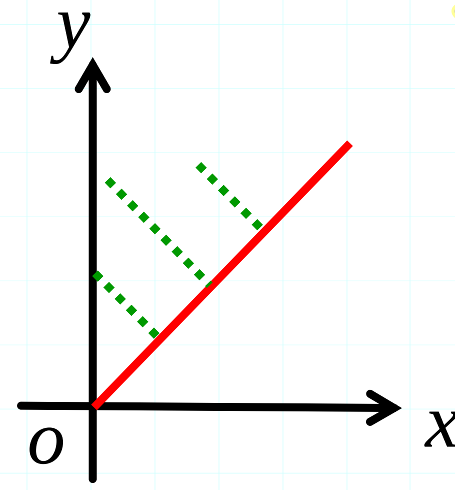
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & 其它 \end{cases}$$，（1）求 X 与 Y 的边缘概率密度，并判断 X 与 Y 是否相互独立；（2）求在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度；（3）求概率 $P\{X+2Y\le 1\}$，$P\{0\le X\le 1/2 \mid Y\le 1\}$，$P\{X\ge 2 \mid Y=4\}$。



解： $x\le 0 \quad f_X(x)=0$

$$x>0 \quad f_X(x)=\int_x^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-x}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & other \end{cases}$$



$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & other \end{cases}$$

$$y\le 0 \quad f_Y(y)=0$$

$$y>0 \quad f_Y(y)=\int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y} & y>0 \\ 0 & other \end{cases}$$

$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ —————不独立

$$y > 0 \quad f_Y(y) > 0$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \begin{cases} 1/y & 0 < x < y \\ 0 & other \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & other \end{cases}$$

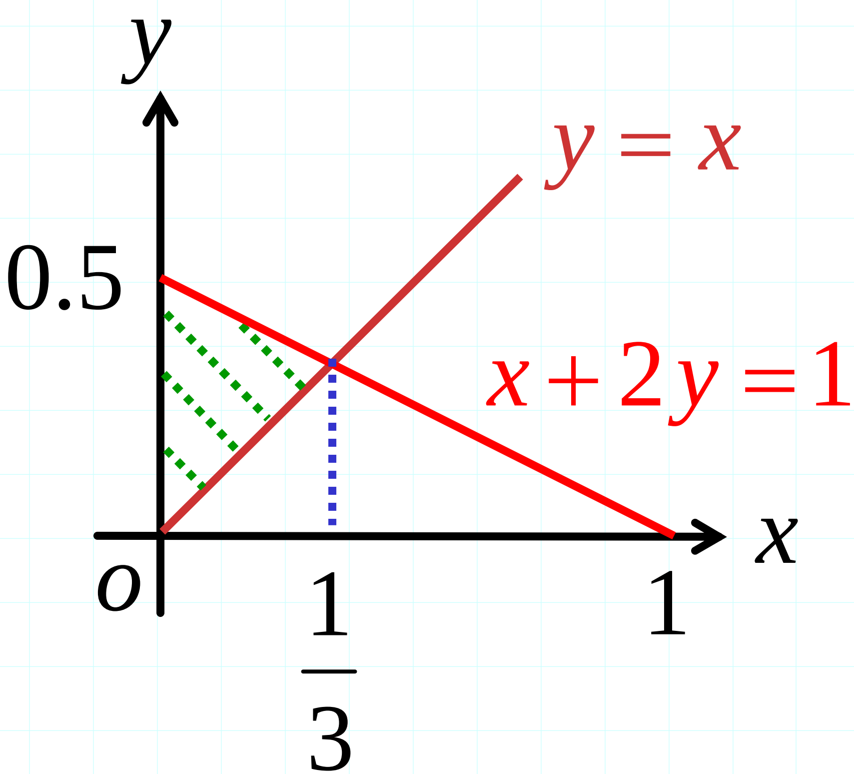
$$f_Y(y) = ye^{-y} \quad y > 0$$

$$P\{X + 2Y \le 1\}$$

$$= \iint\limits_{x+2y \le 1} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} dx \int_x^{\frac{1-x}{2}} e^{-y}\,dy$$

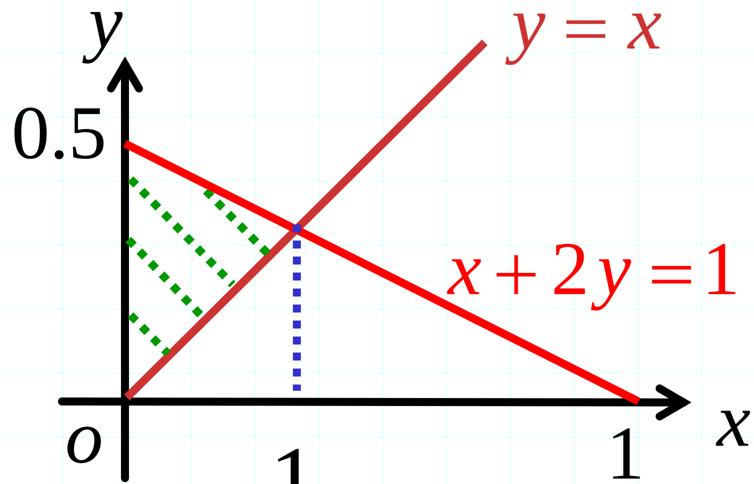
$$= 1 + 2e^{-\frac{1}{2}} - 3e^{-\frac{1}{3}}$$



$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}1/y & 0<x<y\\ 0 & other\end{cases}$$

$$P\{X+2Y\le 1\}$$

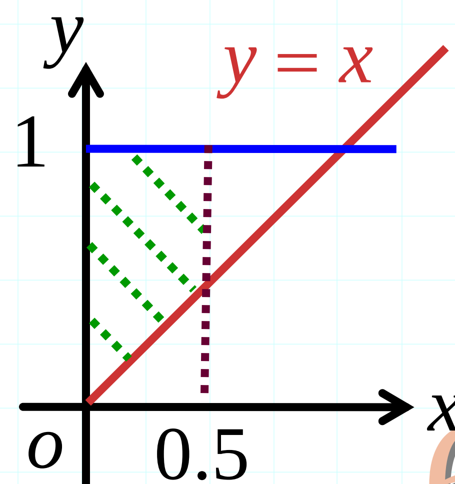
$$=1+2e^{-\frac{1}{2}}-3e^{-\frac{1}{3}}$$



$$P\{0\le X\le 0.5|Y\le 1\}$$

$$=\frac{P\{0\le X\le 0.5,Y\le 1\}}{P\{Y\le 1\}}$$

$$\frac{1}{3}$$



$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^1 e^{-y}dy}{\int_0^1 ye^{-y}dy}=\frac{1-0.5e^{-1}-e^{-\frac{1}{2}}}{1-2e^{-1}}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}1/y & 0<x<y\\ 0 & other\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|4)=\begin{cases}1/4 & 0<x<4\\ 0 & other\end{cases}$$

$$P\{X\geq 2|Y=4\}$$

$$=\int_2^{+\infty}f_{X|Y}(x|4)dx=\int_2^4\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}$$

*注：因为 $P\{Y=4\}=0$，故不能用公式

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$ 求 $P\{X\geq 2|Y=4\}$。

＊定理： $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

X 与 Y 独立充要条件： $\rho=0$ 。

＊证明： 《概率论与数理统计教程》华东师范大学数学系编，高等教育出版社，１９８３年１０月第一版，Ｐ１２８。

*随机变量的独立性的推广

▲定义：

设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$， $F_{X_i}(x_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 分别是 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数及边缘分布，若对于任何实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$，则称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的。

* 连续型随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的的充要条件：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

若对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，上式几乎处处成立。

其中“几乎处处成立”的含义是：在平面上除去面积为 0 的集合外，处处成立。$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，是 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度度，$f_{X_i}(x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 X_i 的边缘概率密度。

* 离散型随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充要条件：

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$
$$= P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\}\cdots P\{X_n = x_n\}$$

* 一般：

随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 是相互独立的充要条件是：

对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_m$； $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$= F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中： $F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)$， $F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$， $F(x_1,x_2,\cdots,x_m;y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 依次是随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ ， $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 和 $(X_1,X_2,\cdots,X_m;Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 的分布函数。

***定理:**

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立，则 $X_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立，且当 $h(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 和 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 连续时，$h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立。

§3．5 两个随机变量函数的分布

在实际应用中，有些随机变量往往是两个或两个以上随机变量的函数。

如： 考虑全国年龄在40岁以上的人群，用 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重，Z 表示这个人的血压，并且已知 Z 与 X，Y 的函数关系式 $Z=g(X,Y)$，现希望通过 (X,Y) 的分布来确定 Z 的分布。

***主要：** $Z=X+Y$　　$Z=XY$

$Z=\max\{X,Y\}$　　$Z=\min\{X,Y\}$

一． $Z = X + Y$ 的分布

已知离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为：

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

$$Z = X + Y \Rightarrow z_k = x_i + y_j \quad (i \in I, j \in J)$$

（I, J 为满足 $z_k = x_i + y_j$ 的 X, Y 的下标集）

$$P\{Z = z_k\} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

$$= \sum_{j} P\{X = z_k - y_j, Y = y_j\}$$

$$= \sum_{i} P\{X = x_i, Y = z_k - x_i\}$$

若离散型随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$P\{X=k\}=a_k, P\{Y=k\}=b_k \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

则 $Z=X+Y$ 的概率分布为：

$$P\{Z=r\}=P\{X+Y=r\} \qquad (r=0,1,2,\cdots)$$

$$=\sum_{i=0}^{r} P\{X=i, Y=r-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{r} P\{X=i\}P\{Y=r-i\}$$

$$=a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \cdots + a_r b_0$$

$$=\sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i}$$ —— —— —— —— 卷积公式

***例 1：** 设随机变量(X,Y)的概率分布如下表

X \ Y	−1	0	1	2
−1	0.20	0.15	0.10	0.30
2	0.10	0.00	0.10	0.05

求二维随机变量的函数 Z ＝ X ＋ Y 的分布。

解:

$X=-1, Y=$	-1	0	1	2
$Z=X+Y$	-2	-1	0	1
$P\{Z=X+Y\}$	0.20	0.15	0.10	0.30