《误差理论与数据处理》部分课后作业参考答案

1-18

根据数据运算规则，分别计算下式结果：

（1）3151.0+65.8+7.326+0.4162+152.28=

（2）28.13X0.037X1.473=?

【解】

（1） 原式≈3151.0+65.8+7.33+0.42+152.28

=3376.83

≈3376.8

(2) 原式≈28.1X0.037X1.47

=1.528359

≈1.5

2-12

某时某地由气压表得到的读数（单位为Pa）为 102523.85, 102391.30, 102257.97, 102124.65, 101991.33, 101858.01, 101726.69, 101591.36, 其权各为 1，3，5，7，8，6，4，2，试求加权算术平均值及其标准差。

【解】

（1） 加权算术平均值：

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i(x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$

$$= 100000 + \frac{1 \times 2523.85 + 3 \times 2391.30 + 5 \times 2257.97 + 7 \times 2124.65 + 8 \times 1991.33 + \cdots}{1 + 3 + 5 + 7 + 8 + 6 + 4 + 2}$$

$$= 102028.3425\text{Pa}$$

（2） 标准差：

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i v_{x_i}^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 \times (102523.85 \square 102028.3425) + 3 \times (102391.30 \square 102028.3425) + \square\square\square}{(1 + 3 + 5 + 7 + 8 + 6 + 4 + 2) \square (8 \square 1)}}$$

$$= 86.95\text{Pa}$$

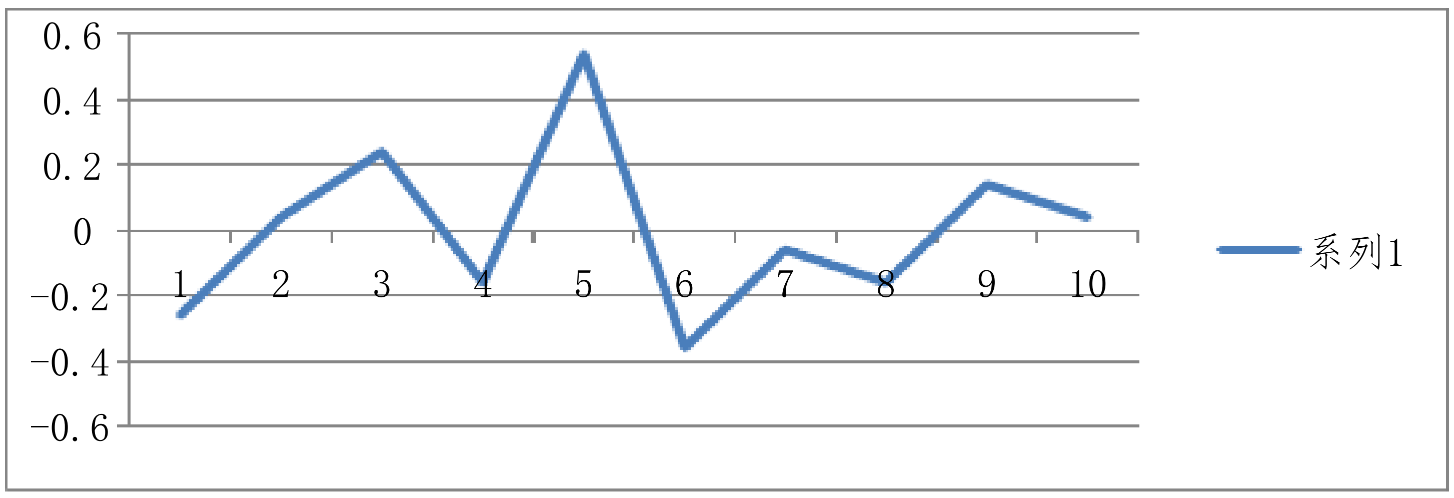
2-17

对某量进行 10 次测量，测得数据为 14.7, 1.0, 15.2, 14.8, 15.5, 14.6, 14.9, 14.8, 15.1, 15.0, 试判断该测量列中是否存在系统误差。

【解】对数据进行列表分析，如下：

序号	数据	v_i
1	14.7	−0.26
2	15.0	+0.04
3	15.2	+0.25
4	14.8	−0.16
5	15.5	+0.54
6	14.6	−0.36
7	14.9	−0.06
8	14.8	−0.16
9	15.1	+0.14
10	15.0	+0.04
	$\bar{x} = 14.96$ $\sigma = 0.2633$	$\sum_1^5 v_i = +0.4$ $\sum_5^{10} v_i = \square 0.4$ $\sum_1^{10} v_i = +0.4 + 0.4 = 0.8$

作出残差与次数的关系图：



（1） 线性系统误差：根据关系图利用残余误差观察法可知，不存在线性系统误差。

根据不同公式计算标准差比较法可得：

按贝塞尔公式：$\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} = 0.2633$

按别捷尔斯公式：$\sigma_2 = 1.253\dfrac{\sum_{i=1}^{n} |v_i|}{\sqrt{n(n-1)}} = 0.2642$

$$|u| = \left|\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1\right| = \left|\frac{0.2642}{0.2633} - 1\right| = 0.0032 < \frac{2}{\sqrt{n-1}} = \frac{2}{3}$$

故不存在线性系统误差。

（2） 周期性系统误差：

$$u = \left|\sum_{i=1}^{n-1} v_i v_{i+1}\right|$$

$$= |(-0.26)\times 0.04 + 0.04\times 0.24 + 0.24\times(-0.16) + (-0.16)\times 0.54 + 0.54\times(-0.36) + \cdots|$$

$$= 0.1112 < \sqrt{n-1}\,\sigma^2 = 0.624$$

故不存在周期性系统误差。

2-18

对一线圈电感测量 10 次，前 4 次是和一个标准线圈比较得到的，后 6 次是和另一个标准线圈比较得到的，测得结果如下（单位为 mH）：

50.82，50.83，50.87，50.89；

50.78，50.78，50.75，50.85，50.82，50.81。

试判断前 4 次与后 6 次测量中是否存在系统误差。

【解】用秩和检验法进行检验。将两组数据排列成下表：

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i					50.82		50.83		50.87	50.89
y_i	50.75	50.78	50.78	50.81		50.82		50.85		

已知：$n_1=4$，$n_2=6$

计算秩和 T：T=5.5+7+9+10=31.5

查表：$T_-=14$，$T_+=30$

因：$T=31.5>T_+=30$，判断两组数据可能存在系统误差。

2-19

等精度测得某一电压 10 次，测得结果（单位为 V）为 25.94，25.97，25.98，26.01，26.04，26.02，26.04，25.98，25.96，26.07。测量完毕后，发现测量装置有接触松动现象，为判明是否因接触不良而引入系统误差，将接触改善后，又重新做了 10 次等精度测量，测得结果（单位为 V）为 25.93，25.94，25.98，26.02，26.01，25.90，25.93，26.04，25.94，26.02。试用 t 检验法（取 α=0.05）判断两组测量值之间是否有系统误差。

【解】计算两组测量结果的算术平均值：

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\Sigma\ \square=26.001$$

$$\bar{y}=\frac{1}{10}\Sigma\ \square=25.971$$

$$\square^2_{\square}=\frac{1}{10}\Sigma(\square_{\square}\square\bar{\square})^2=0.00155$$

$$\square^2_{\square}=\frac{1}{10}\Sigma(\square_{\square}\square\bar{\square})^2=0.00215$$

$$t=(26.001\ \square 25.971)\sqrt{\frac{10\times 10(10+10\ \square 2)}{(10+10)(10\times 0.00155+10\times 0.00215)}}=1.48$$

由 v=10+10-2=18，取 α=0.05，查 t 分布表，得 $t_a=2.1$。

因 $|t|=1.48<t_a=2.1$，

故无根据怀疑两组数据间存在线性系统误差。

2-22

对某量进行 15 次测量，测得数据为 28.53，28.53，28.50，29.52，28.53，28.53，28.50，28.49，28.49，28.51，28.53，28.52，28.49，28.40，28.50，若这些测得值已消除系统误差，试用莱以特准则、格罗布斯准则和狄克松准则分别判别该测量列中是否含有粗大误差的测量值。

【解】

1）莱以特准则（3□准则）

表 1

序号	l	v	v^2	v'	v'^2	v''	v''^2
1	28.53	-0.04067	0.001654	0.02714	0.0007365796	0.01923	0.0003697929
2	28.52	-0.05067	0.002567	0.01714	0.0002937796	0.00923	0.0000851929
3	28.50	-0.07067	0.004994	-0.00286	0.0000081796	-0.01077	0.0001159929
4	29.52	0.94933	0.901227	-	-	-	-
5	28.53	-0.04067	0.001654	0.02714	0.0007365796	0.01923	0.0003697929
6	28.53	-0.04067	0.001654	0.02714	0.0007365796	0.01923	0.0003697929
7	28.50	-0.07067	0.004994	-0.00286	0.0000081796	-0.01077	0.0001159929
8	28.49	-0.08067	0.006508	-0.01286	0.0001653796	-0.02077	0.0004313929
9	28.49	-0.08067	0.006508	-0.01286	0.0001653796	-0.02077	0.0004313929
10	28.51	-0.06067	0.003681	0.00714	0.0000509796	-0.00077	0.0000005929
11	28.53	-0.04067	0.001654	0.02714	0.0007365796	0.01923	0.0003697929
12	28.52	-0.05067	0.002567	0.01714	0.0002937796	0.00923	0.0000851929
13	28.49	-0.08067	0.006508	-0.01286	0.0001653796	-0.02077	0.0004313929
14	28.40	-0.17067	0.029128	-0.10286	0.0105801796	-	-
15	28.50	-0.07067	0.004994	-0.00286	0.0000081796	-0.01077	0.0001159929
	28.57067	0	0.980293		0.0136471756		0.0032923077

由表可得

x(平均值)=28.57067

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} v_i^2}{15-1}} = 0.26461$$

$$3\sigma = 0.79384$$

根据 3σ准则，第四测得值的残余误差

$$|v_4| = 0.901227 > 0.79384$$

即它含有粗大误差，故将此测得值剔除。再根据剩下的 14 个测得值重新计算，得

$$\overline{x}' = 28.50286$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14} v_i^2}{14-1}} = 0.03240$$

$$3\sigma' = 0.097201$$

根据 3σ准则，第 14 个测得值的残余误差

$$|v_{14}|=0.10286>0.097201$$

即它含有粗大误差，故将此测得值剔除。再根据剩下的 13 个测得值重新计算，无粗大误差。

2）格罗布斯准则

由表 1 计算得

$$\bar{x}(平均值)=28.57067$$

$$\sigma = 0.26461$$

按测得值的大小，顺序排列得

$$x_{(1)} = 28.4, x_{(15)} = 29.52$$

今有两测得值 $x_{(1)}$、$x_{(15)}$ 可怀疑，但由于

$$\bar{x} - x_{(1)} = 28.5767 - 28.4 = 0.1767$$

$$x_{(15)} - \bar{x} = 29.52 - 28.5767 = 0.9433$$

故应先怀疑 $x_{(1)}$是否含有粗大误差

计算 $$g_{(15)} = \frac{29.52 - 28.5767}{0.26461} = 3.5648$$

查表 2-13[课程用书] $$g_0(15,0.05) = 2.41$$

则 $$g_{(15)} = 3.5648 > g_0(15,0.05) = 2.41$$

故表 1 中第四个测得值 $x_{(15)}$含有粗大误差，应予以剔除。

剩下 14 个数据，再重复上述步骤，判别 $x_{(1)}$是否含有粗大误差，

计算 $$\bar{x}' = 28.50286 \quad \sigma' = 0.03240$$

$$g_{(1)} = \frac{28.4 - 28.50286}{0.03240} = 3.1746$$

查表 2-13[课程用书] $$g_0(14,0.05) = 2.37$$

故表 1 中第十四个测得值 $x_{(1)}$ 含有粗大误差，应予以剔除。

余下测得值也不含粗大误差。

3）狄克松准则

x_i	顺序号 $x_{(i)}$	顺序号 $x'_{(i)}$	x_i	顺序号 $x_{(i)}$	顺序号 $x'_{(i)}$
28.4	1	1	28.52	9	9
28.49	2	2	28.52	10	10
28.49	3	3	28.53	11	11
28.49	4	4	28.53	12	12
28.5	5	5	28.53	13	13
28.5	6	6	28.53	14	14
28.5	7	7	29.52	15	
28.51	8	8			

首先判断最大值 $x_{(15)}$。

因 $n = 15$，故按式（2-93）[课程用书]计算统计量 r_{22}

$$r_{22} = \frac{x_{(15)} - x_{(13)}}{x_{(15)} - x_{(3)}} = \frac{29.52 - 28.53}{29.52 - 28.49} = 0.9612$$

查表 2-14 的 $r_0(15, 0.05) = 0.525$

则 $r_{22} > r_0 = 0.525$

故第四个测得值 $x_{(15)}$ 含有粗大误差，应予以剔除。剩下 14 个数据，再重复上述步骤。对 $x'_{(14)}$，计算不含有粗大误差。

对 $x'_{(1)}$，按式（2-94）计算 r_{22}

$$r_{22} = \frac{x'_{(1)} - x'_{(3)}}{x'_{(1)} - x'_{(12)}} = \frac{28.4 - 28.49}{28.4 - 28.53} = 0.6923$$

查表 2-14 的 $r_0(14, 0.05) = 0.546$

则 $r_{22} > r_0 = 0.546$

故第十四个测得值 $x'_{(1)}$ 含有粗大误差，应予以剔除。对剩下 13 个数据，再重复上述步骤，

不含有粗大误差。

2-26

对某被测量x进行间接测量得：$2x=1.44$，$3x=2.18$，$4x=2.90$，其权分别为 5:1:1，试求x的测量结果及其标准差？

【解】

$x_1=1.44/2=0.72$ $p_1=5$

$x_2=2.18/3=0.727$ $p_2=1$

$x_3=2.9/4=0.725$ $p_3=1$

$$\bar{x}=\frac{x_1 p_1+x_2 p_2+x_3 p_3}{p_1+p_2+p_3}=\frac{0.72\times5+0.727+0.725}{5+1+1}=0.722$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}p_i v_{x_i}^2}{(3-1)\sum_{i=1}^{3}p_i}}=\sqrt{\frac{5\times(0.722-0.72)^2+(0.722-0.727)^2+(0.722-0.725)^2}{2\times(5+1+1)}}=0.00196$$

3-7

通过电流表的电流I与指针偏转角φ服从下列关系：

$$I=C\tan\varphi$$

式中C为决定于仪表结构的常数，$C=5.031\times10^{-7}A$，两次测得$\varphi_1=6°17'\pm1'$、$\varphi_2=43°32'\pm1'$。试求两种情况下的I_1、I_2及其极限误差，并分析最佳测量方案。

【解】

由于题中给出的是角度的极限误差，所以对计算函数要做如下变形，

因$I=C\tan\varphi \Rightarrow \tan\varphi=I/C$，由三角函数随机误差（极限误差）计算公式（3-21），有：

$$\sigma_\varphi=\cos^2\varphi\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)^2\sigma_I^2}=\frac{\sigma_I}{C}\cos^2\varphi,\quad \delta_{\lim\varphi}=\cos^2\varphi\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)^2\delta_{\lim I}^2}=\frac{\delta_{\lim I}}{C}\cos^2\varphi$$

$$\delta_{\lim I} = \frac{C\delta_{\lim\alpha}}{\cos^2\alpha} \tag{1}$$

当 $\alpha=\alpha_1$ 时，把 $\alpha_1 = 6^\circ17'$ 代入关系式，有：

$$I_1 = C\tan\alpha_1 = 5.031\times10^{-7}\tan(6^\circ17') = 5.54\times10^{-8}\ (A)$$

相应的极限误差为：

$$\delta_{\lim I_1} = \frac{C\delta_{\lim\alpha}}{\cos^2\alpha_1} = \frac{5.031\times10^{-7}\times[1\times\pi/(180\times60)]}{\cos^2 6^\circ17'} = 1.481\times10^{-10}\ (A)$$

当 $\alpha=\alpha_2$ 时，把 $\alpha_2 = 43^\circ32'$ 代入关系式，有：

$$I_2 = C\tan\alpha_2 = 5.031\times10^{-7}\tan(43^\circ32') = 4.780\times10^{-7}\ (A)$$

相应的极限误差为：

$$\delta_{\lim I_2} = \frac{C\delta_{\lim\alpha}}{\cos^2\alpha_2} = \frac{5.031\times10^{-7}\times[1\times\pi/(180\times60)]}{\cos^2 43^\circ32'} = 2.784\times10^{-10}\ (A)$$

根据求得测量电流的误差传递式（1），欲使极限误差 $\delta_{\lim I}$ 变小,必须满足 $\frac{C}{\cos^2\alpha}$ 最小，又因为 C 为常数，这意味着只能使 $\cos^2\alpha$ 最大。又因为电流表指针偏转角在 $0\le\alpha\le\pi$ 范围内变化，当 $0\le\alpha\le\pi/2$ 时，$\cos^2\alpha$ 单调递减，为使 $C/\cos^2\alpha$ 趋小，α 应该越小越好，则测得的电流误差小。与上诉计算结果验证一致。

3-10

通过电流表的电流 I 与指针偏转角度 φ 服从下列关系：

$$I = C\tan\varphi$$

若测得 $C\pm\sigma_C = (124.18\pm0.03)A$, $\varphi\pm\sigma_\varphi = 19^\circ41'30''\pm40''$，试求电流 I 的标准差。

【解】由已知，$C_0 = 124.18$　$\sigma_c = 0.03$

$\varphi = 19^\circ41'30''$　$\sigma_\varphi = 40''$

将 $I = C\tan\varphi$ 分别对 C 和 φ 求导，得

$$\frac{□I}{□}□$$

$$\frac{□I}{□□}□C□\frac{1}{\cos^2□}$$

$$□^2_y□(\frac{□I}{□C})^2□□^2_C□(\frac{□I}{□□})^2□□^2_□$$

$$□(\tan 19□41□30□)^2□0.01^2□□124.18□\frac{1}{\cos^2 19□41□30□□}□^2□\frac{40}{60□60□3}□\frac{□}{180}□^2$$

$$□9.48□10^{-5}$$

$$□□_y□9.74□10^{□3}$$

3-13

假定从支点到重心的长度为 L 的单摆振动周期为 T，重力加速度可由公式 $T□2□\sqrt{L/g}$ 中给出，若要求测量 g 的相对标准差 $□_g/g□0.1\%$ ，试问按等作用原则分配误差时，测量 L 和 T 的相对标准差应该是多少？

【解】由等作用分配原则，$D_L□\frac{□_g}{\sqrt{n}},D_T□\frac{□_g}{\sqrt{n}}$

则有

$$□_L□D_L\frac{1}{\frac{□g}{□L}}□D_L\frac{T^2}{4□□^2}□\frac{□_g}{\sqrt{2}}□\frac{T^2}{4□□^2}$$

$$□_T□D_T\frac{1}{\frac{□g}{□T}}□D_T\frac{T^3}{8□□^2□L}□\frac{□_g}{\sqrt{2}}□\frac{T^3}{8□□^2□L}$$

由相对标准差的定义，有

$$\frac{□_L}{L}□\frac{□_g}{\sqrt{2}}□\frac{T^2}{4□□^2□L}□\frac{□_g}{\sqrt{2}□g}□\frac{1}{\sqrt{2}}□0.1\%□0.071\%$$

$$\frac{\sigma_T}{T} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{2}} \cdot \frac{T^2}{8\pi^2 L} = \frac{\sigma_T}{2\sqrt{2}\,T} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times 0.1\% \quad 0.035$$

g 的相对标准差 $\sigma_g / g \approx 0.1\%$ 。

3-14

对某一质量进行 4 次重复测量，测得数据（单位：g）为 428.6，429.2，426.5，430.8。已知测量的已定系统误差 $\Delta = -2.6g$，测量的各极限误差分量及其相应的传递系数如下表所列。若各误差均服从正态分布，试求该质量的最可信赖值及其极限误差。

序号	极限误差/g		误差传递系数
	随机误差	未定系统误差	
1	2.1	-	1
2	-	1.5	1
3	-	1.0	1
4	-	0.5	1
5	4.5	-	1
6	-	2.2	1.4
7	1.0	-	2.2
8	-	1.8	1

【解】

$$m_0 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8} m_i = 428.775$$

$$m = m_0 - \Delta = 428.775 + 2.6 = 431.375g$$

$$\delta_0 = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(a_i e_i)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8}(a_j \delta_i)^2} = \pm 4.9g$$

$$\therefore m = (426.2 \pm 4.9)g$$

4-6

某数字电压表说明书指出，该表在校准后的两年内，其 2V 量程的测量误差不超过±（14×