立信会计学院

数统系

概率论与数理统计

1 2

Jinsw

二．离散型随机变量的条件分布律

▲**定义：** 设(X,Y)是二维离散型随机变量，其概率分布为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，$(i,j=1,2,\cdots)$则由条件概率公式，当$P\{Y=y_j\}>0$，有

$$P\{X=x_i\,|\,Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

$(i=1,2,\cdots)$称其为在$Y=y_j$条件下随机变量X的**条件概率分布律**；类似有

$$P\{Y=y_j\,|\,X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}。$$

$*$例 2： 已知 X 与 Y 的联合概率分布，求 $Y=0$ 时，X 的条件概率分布以及 $X=0$ 时，Y 的条件概率分布律。

X \ Y	−1	0	2
0	0.10	0.20	0
1	0.30	0.05	0.10
2	0.15	0	0.10

解： $P\{Y=0\}=0.20+0.05=0.25$

$$P\{X=0 \mid Y=0\}=\frac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{Y=0\}}$$

$$=0.2/0.25=0.8$$

X \ Y	-1	0	2
0	0.10	0.20	0
1	0.30	0.05	0.10
2	0.15	0	0.10

$$P\{Y=0\}=0.25$$

$$P\{X=0 \mid Y=0\}=0.8$$

$$P\{X=1 \mid Y=0\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{0.05}{0.25}=0.2$$

$$P\{X=2 \mid Y=0\}=\frac{P\{X=2,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{0}{0.25}=0$$

$$\begin{pmatrix} X \mid Y=0 & 0 & 1 & 2 \\ P & 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Y / X	−1	0	2
0	0.10	0.20	0
1	0.30	0.05	0.10
2	0.15	0	0.10

$$P\{X=0\}=0.1+0.2+0=0.3$$

$$P\{Y=-1|X=0\}=\frac{P\{Y=-1,X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=0|X=0\}=\frac{P\{Y=0,X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$$

$$P\{Y=2|X=0\}=\frac{P\{Y=2,X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{0}{0.3}=0$$

$$\begin{pmatrix} Y|X=0 & -1 & 0 & 2 \\ P & 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

三. 连续型随机变量的条件密度

▲定义：

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，边缘概率密度为$f_X(x), f_Y(y)$，则对一切使$f_X(x)>0$的x，定义在$X=x$的条件下Y的条件概率密度为$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$；类似地，对一切使$f_Y(y)>0$的$y$，定义在$Y=y$的条件下$X$的条件密度函数为$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$。

*例 1：设 (X,Y) 服从单位圆上的均匀分布，概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1/\pi & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求 $f_{Y|X}(y|x)$。

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$

当 $|x|<1$ 时，有 $-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1/\pi}{2\sqrt{1-x^2}/\pi}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\qquad |y|\le\sqrt{1-x^2}$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & |y|\le\sqrt{1-x^2}\\ 0 & |y|>\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

*例 2： 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_2^2,\sigma_1^2,\rho)$, 求 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$。

解： $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{\dfrac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\cdot\rho\cdot\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}$$

12

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{\dfrac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\cdot\rho\cdot\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[(x-\mu_1)-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot\rho\cdot(y-\mu_2)\right]^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[(x-\mu_1)-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot\rho\cdot(y-\mu_2)\right]^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}$$

在 $Y=y$ 条件下， X 服从正态分布：

$$N\left(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot\rho\cdot(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

在 $X=x$ 条件下， Y 服从正态分布：

$$N\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\rho\cdot(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

§ 3．4 随机变量的独立性

＊两个随机变量之间的关系－－－－独立性

▲定义 1：

设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$、$F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数及边缘分布，若对于任何实数 x， y 有 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的。

*例 1： $F(x,y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{e^y} & x>0, y\geq 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$F_X(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases} \qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{e^y} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

显然： $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

———— X 和 Y 相互独立。